

DER
of 15318

X 3

BIBLIOTECA
COMPLUTENSE.
E. ~~X~~ C. ~~X~~ N. ~~3~~

1-5-15

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII,
CONSILIARII REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ
PROFESSORIS PRIMARI IN ACADEMIA MARBURGENSI,
PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ
REGIÆ SCIENTIARUM PARISIÆ SOCIETATUMQUE
REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

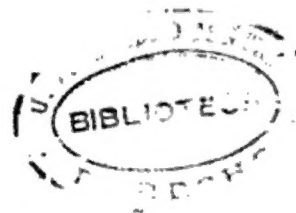
ELEMENTA MATHESIOS UNIVERSÆ.

TOMUS QUINTUS.

*Qui COMMENTATIONEM DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHE-
MATICIS, COMMENTATIONEM DE STUDIO MATHEMATICO
RECTE INSTITUENDO & INDICES IN TOMOS QUINQUE
MATHESIOS UNIVERSÆ CONTINET.*

EDITIO NOVA,

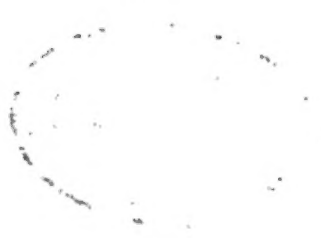
PRIORI MULTO AUCTION ET CORRECTION.



GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & Socios.

M D C C X L I





PRÆFATIO.



PRODIT tandem Tomus Quintus novæ Editionis Elementorum nostrorum Matheseos universæ, qui dudum lucem adspexisset, nisi alii labores aliaque impedimenta indeclinabilia moram injecissent. Equidem nihil restabat quam recensio Autorum, qui Mathesin vel suis inventis, vel scriptis illustrarunt, quam adjeceramus tam Germanicæ Elementorum Matheseos, quam primæ Latinæ Editioni; una cum Indice in quatuor Elementorum horum Tomos: ne tamen nimis sterilis judicaretur Tomus quintus, addere lubuit Commentationem de Studio mathematico recte instituendo. Primo igitur loco sistitur brevis Commentatio de præcipuis Scriptis mathematicis. Omnia recensere nec potuimus, nec recenseri consultum fuit. Recen-

P R Æ F A T I O.

fuius ea , quæ ipsimet possidemus , & pauca quædam , quæ aliunde nobis nota sunt. Hanc Autorum notitiam abunde sufficere credimus ei , qui vel se totum Mathesi dare , vel ejus aliquam partem sibi quasi propriam reddere decreverit. Et quoniam singulis adhuc annis scripta mathematica prodeunt , unusquisque , cui volupe fuerit , hanc recensionem facile continuabit. Qui vero Mathesi tantummodo operam navare voluerit , ut non modo divinæ hujus scientiæ compos fiat , verum etiam intellectus eum perfectionis gradum conciliet , ut eodem in omni cognitione reliqua rite ac prompte utatur ; ei abunde satisficient sola Elementa nostra , ut nullo alio librorum apparatu indigeat. Quodsi autem quis in aliqua ejus parte ulterius progredi voluerit ; ex commentatione nostra facile videbit , quem vel quosnam sibi eligere debeat duces , ut voti sui compos reddatur. Ceterum cum nemo Autorum sibi proposuerit , ut eam omni perspicuitate explicaret , quam tyro merito desideraverit , ac demonstrationes daret consummatas , quas in Logica appellamus ; suademus serio ne quis ad lectionem aliorum Autorum accedat , antequam nostra sibi familiaria reddiderit. Verendum enim , ne confundatur , & perplexitate desertor studii utilissimi efficiatur. Si quis , solius intellectus perficiendi gratia , ad Mathesin animum appellit , is vel in Elementis Arithmeticæ , Geometriæ Elementaris & Trigonometriæ plane subsistere , vel ex ceteris addere potest , quæ maxime sunt ad ipsius palatum ; modo sibi caveat , ne negligat eas disciplinas , ex quibus demonstrandi principia petuntur , nisi hæc tanquam certa sumere voluerit , etsi eorum evidentiam non perceperit. Et quænam hic ob-

servan-

P R Æ F A T I O.

servanda sint, ex Commentatione de Studio mathematico recte instituendo haud difficulter addiscet.

Secundo loco hic comparet Commentatio de Studio mathematico recte instituendo. Non omnes, qui eidem sese dedunt, eodem fine ad ipsum accedunt. Quamobrem nostrum fuit, non idem singulis dare consilium; sed potius pro diversitate finis diversa. Equidem Elementa nostra eo modo concinnavimus, ut singulis satisfaciant, quocunque tandem animo ad Mathesin accedant; cum tamen omnibus non conveniant omnia, indicandum omnino erat, quænam omittenda sint, quænam prætermitti minime debeant, & quomodo in iis percipiendis sit versandum, prouti unusquisque hunc vel alium finem sibi proposuerit; quamvis iis, qui sciendi cupidine flagrant, & in Philosophia aliisque scientiis cum laude versari voluerint, commendanda sit lectio integrorum nostrorum Elementorum. Ea sane hoc modo conscripsimus, ut haud multo temporis spatio integram Mathesin addiscere liceat, ac deinde qualibet ejus parte ulterius progredi detur, quantum libuerit. Cognitu nimirum utilissima & quæ ad ulteriora viam sternunt, cum primis principiis ita connexa sunt, ut ideas maxime adæquatas ex his Elementis haurire & ex aliis operibus petenda cum iisdem connectere liceat: id quod etiam in operibus nostris philosophicis eadem methodo conscriptis intendimus. Neque enim alia datur via, qua ad certam & solidam rerum cognitionem perveniatur. Etsi autem Mathesis multas afferat utilitates ad felicitatem generis humani promovendam, ut adeo digna sit, quæ excolatur; non tamen hinc recte infertur, eam omnibus omnino esse addiscendam, qui

P R Æ F A T I O.

studiis literariis operam navant. Sufficit enim esse aliquos, qui eidem, vel uni alterive parti, se consecrant, ut humanum genus utilitates istas consequatur. Enim vero quatenus Studium mathematicum perficit intellectum, ea ejus utilitas est, ut nemo ad scientias alias tractandas admitti debeat nisi in Mathesi versatus. Hæc ipsa utilitas omni ævo agnita, ex quo scientiæ honos fuit. Semper enim unanimi consensu assertum, ac hodiernum assertitur, studio Matheseos perfici intellectum. Non tamen defuere, qui utilitatem istam in dubium vocarunt, cum viderent viros in Mathesi præstantes nihil agere, ubi extra eandem demonstrationes dare audent. Immo hinc enata est opinio, quasi solius Matheseos sit ea, quæ affirmantur vel negantur, demonstrare; in Philosophia vero & facultatibus, quæ vocantur superioribus ad demonstrationes perveniri non posse. Ex hoc labyrintho patet egrediendi via, si paulo intimius inspicias, cur Mathesis acuat intellectum. Memini jam alias plus simplici vice me monuisse, methodo tribuendum esse, ut Matheseos studio perficiatur intellectus. Ut vero methodum distincte cognoscas, eamque in potestatem tuam redigas, non quælibet tractatio sufficit, sed legitimo quodam modo tractanda est Mathesis. Quinam igitur sit modus, a quo tam præclara utilitas unice speranda, in Commentatione nostra ex instituto docemus. Neque enim hætenus fatis hoc animadversum ab aliis: unde accidit, ut Mathematici summi, qui divinis prorsus inventis scientiam nobilissimam ditarunt, genuinam demonstrationis formam non perspexerint, quemadmodum in ipsa Commentatione clarissime ostendi. Quicquid igitur alii sentiant de Tomo hoc quinto Elementorum

rum Matheseos, quorum unicuique liberum suum relin-
 mus iudicium; ego hoc nomine eundem maximi facio, quod
 genuinum facultatum mentis nostræ usum hinc addiscere li-
 ceat, quo ad solidam rerum cognitionem pervenitur. Non
 nego eundem usum regulis comprehendere in Logica, & a no-
 bis in opere præsertim Latino maiore, quod de Logica con-
 scripsimus, demonstrari. Monui tamen jam alias, studio Ma-
 theseos rite instituto eum acquirendum esse. Quomodo igitur
 id ipsum rite instituat, ut in omni cognitionis genere
 facultatum humanarum rectum facere addiscas usum, in Com-
 mentatione nostra tanta perspicuitate docuimus, ut, quid am-
 plius desiderari possit, non videamus. Quamobrem, si quis
 consilio nostro uti voluerit, is in se ipso experietur, quod non
 modo regulas logicas, quas in opere nostro exposuimus, nunc
 penitus intelligat, & nihil in iis supersit obscuri; verum etiam
 quod iisdem prompte ac sine ulla aberratione satisfacere pos-
 sit, modo attentionem suam in se desiderari minime patiat.
 Dari aliquam Artem inveniendi, quæ hætenus absque regulis
 exercetur, Mathematici exemplo suo abunde confirmant, qui
 nostro præsertim ævo novis indies inventis Mathesin augent.
 Nemo diffitebitur, qui vel ad ea animum advertit, quæ spe-
 ciminis loco in Arithmetica (*) tradidimus, ab exemplis ab-
 strahi posse regulas. Quoniam igitur summa intellectus per-
 fectio est, eum facere facultatum nostrarum usum, qui ad
 veritatem latentem investigandam requiritur; id quoque egi-
 mus in Commentatione nostra ut ostenderemus, quomodo
 versandum sit in Mathesi, ut usum istum consequamur. Hac-
 tenus

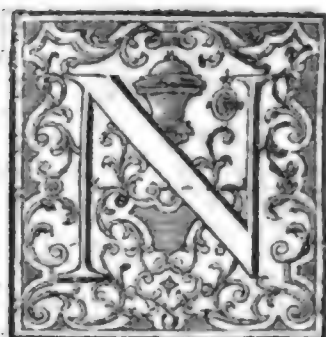
(*) S. 125.

tenus Ars inveniendi regulis comprehensa non est, quæ enim sub hoc titulo prostant, augustum istud nomen non merentur. Demus autem mox affore tempus, quo Ars inveniendi omnibus suis numeris absoluta exactisque regulis comprehensa in publicum proftet; minime tamen hinc sequitur, ea, quæ in Commentatione nostra in usum hujus Artis acquirendæ præcipiuntur, nullius fore utilitatis: valent enim de hac Arte eadem quo modo de Logica annotavimus. Quid, quod etiam consilium nostrum de studio Matheseos in usum Artis inveniendi acquirendæ instituendo ei prodesse possit, qui eam regulis comprehendere voluerit?

Ultimo demum loco sequuntur Indices, de quibus ut multa dicam opus non est. Unicum tantummodo moneri consultum duxi. Initio constitueram Indices omnes rerum & verborum in Elementis nostris contentorum in unum compingere. Enimvero cum consultissimum videretur in iis citari paragraphos, literis autem alphabeti singulæ partes non commode distingui possent; potius visum est singulos singulorum Tomorum Indices sigillatim conficere. Quoniam enim in separato Tomo leguntur, absque ulla opera, quæ in uno non inveniuntur, in alio quærantur. Ac ita tandem Elementa nostra Matheseos universæ ad umbilicum perduximus; nil magis in votis habentes, quam ut iisdem in addiscenda Mathesi utentes eum consequantur usum, quem Commentatio nostra promittit. Dabam Marburgi Cattorum d. 17. Septembr. A. O. R. 1740.



PRÆFATIO.



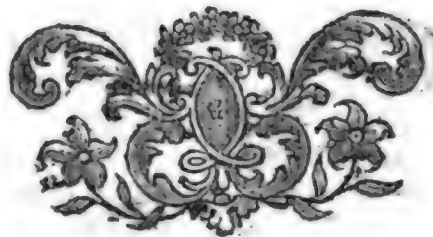
On nobis propositum est condere Historiam
Matheseos universæ, ut ortus ejus pateat at-
que progressus ad nostra usque tempora.
Opus enim hoc arduum est ac difficile, quod
infinitam propemodum requirit lectionem
& Bibliothecam libris omnibus tam anti-
quis, quam recentioribus instructissimam.

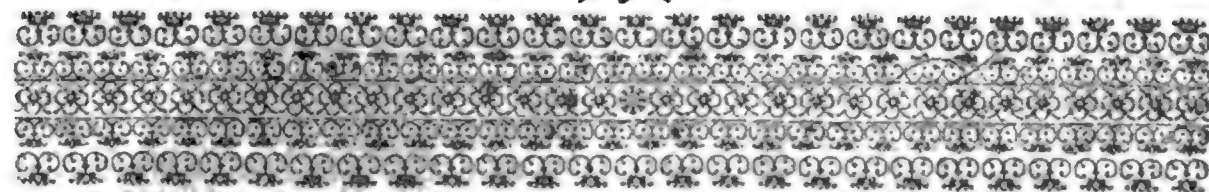
Nostrum jam non est in hunc campum descendere. Quod
ordinaria negotia nobis relinquunt otium, in Philosophia re-
formanda totum consumendum, etiamsi alia non obstarent,
de quibus in præsentī dicere nil attinet. Neque etiam nobis
animus est recensendi Autores omnes, qui vel de Mathesi
integra, vel de una aut altera ejus parte, vel etiam de par-
ticularibus quibusdam argumentis commentati sunt: Sufficit
recensuisse scripta præcipua, quorum lectione in studio Ma-
theseos feliciter progredi licet. Etsi enim hodie reperiantur



P R Æ F A T I O.

plurimi, qui in historia literaria industriam suam exercent: nullibi tamen magis quam in Mathematicorum scriptis recensendis eandem deficere animadvertes, cum plerumque Mathematicum rudes sint, qui ad hoc studiorum genus animum appellant. Utile tamen est, immo necessarium nosse libros, a quorum lectione recedas doctior, ne in legendis iis, qui ad scopum minime faciunt, tempus fallas & magno conatu parum aut nihil discas. Me igitur non inutilem operam præstitisse confido iis, qui ad Mathesin addiscendam sese converterunt. Patebit hoc ex sequente commentatione de studio mathematico, in qua indicaturus sum, quinam pro diverso discipulorum scopo legendi sint autores. Ceterum non dubito, hanc recensionem Autorum etiam prodesse posse iis, qui ad Historiam Matheseos condendam sese accingent observaturi eas leges, quas præscripsimus in opere nostro Logico. Vix tamen eandem ab uno homine expectes. Rationes perspicies ex iis, quæ de Historia scientiarum in Logica tradidimus. Optandum foret, ne pars eruditionis longe utilissima diutius negligeretur, & bene de humano genere merebitur, qui vel unius Matheseos partis historiam exasciatam dederit, exemplo suo excitaturus alios ad socias operas conferendas.





D E
P R Æ C I P U I S S C R I P T I S
M A T H E M A T I C I S
B R E V I S C O M M E N T A T I O .

C A P U T P R I M U M .

De Cursibus , Operibus atque Lexicis Mathematicis.

§. I.

Primus *Cursum mathematicum* Latino & Gallico idiomate edidit PETRUS HERIGONIUS *Parisiis* 1644. in 8. (10 Alph. 2 plag.). Constat Tomis sex. Primo continentur 1. Elementa EUCLIDIS XV. 2. Data EUCLIDIS, 3. APOLLONII PERGÆI de determinata sectione Geometria, a WILLEBRORDO SNELLIO restituta, 5. Ejusdem APOLLONII inclinationum Geometria, a MARINO GHETALDO restituta, 6. Ejusdem APOLLONII Tactionum Geometria, a FRANCISCO VIETA restituta, 7. Doctrina Sectionum angularum. Tomus secundus complectitur 1. Arithmetica[m] practica[m], & 2. Algebra[m] tum vulgarem, tum speciosam, una cum ratione componen-

di ac demonstrandi per regressum sive repetitionem vestigiorum Analyseos. Tomus tertius exhibet 1. Constructionem Canonum, Sinuum, atque Tangentium & Logarithmorum, 2. ipsos hos Canones, 3. Trigonometriam planam, 4. Geometriam practica[m], 5. Architecturam militarem, 6. Tractatum de militia Græcorum, Romanorum, & hodierna, 7. Mechanicam. Tomus quartus continet 1. Doctrinam de Sphæra mundi, 2. Geographiam tam veterem, quam novam, 3. Histiodromiam, seu Artem navigandi. In Tomo quinto extant, 1. Optica EUCLIDIS aucta & novis demonstrationibus illustrata, 2. Catoptrica EUCLIDIS, 3. Dioptrica, 4. Perspectiva, 5. THEODOSII Sphæricorum

libri tres, quibus additur quartus de triangulis sphaericis & trigonometria sphaerica, 6. Theoricae planetarum, 6. Gnomonica, 8. Musica EUCLIDIS. Denique Tomus sextus supplementis destinatur 1. in Algebram, 2. in Perspectivam, 3. in Theoriam Planetarum: quibus additur introductio in Chronologiam. Apparet adeo, prater inventa recentiora, quae Autor suo tempore tradere nondum potuit, desiderari adhuc 1. Theoremata Archimedeae, 2. Doctrinam Conicorum, 3. Staticam, 5. Hydraulicam, 6. Architecturam civilem, 7. Pyrotechniam. Quae vero de singulis disciplinis monenda sunt, ea inferius suo loco annotabimus. Nunc in genere observamus, Autorem ubique accurata uti demonstrandi methodo, eaque nova, per notas reales & universales, ita ut demonstrationes ipsius ab eo, qui notarum vim animo comprehendit, citra usum cujusque idiomatis intelligi possint. Sed cum signa sint Autori peculiariora & diversa ab iis, quibus hodie in casibus similibus utimur; nonnihil difficultatis facessunt sub initium lectionis, aliis praesertim signis jam adfecto. Ubi tamen signa familiaria evaserint, multum facilitatis habet haec demonstrandi methodus: quia integra demonstratio uno obtutu haud difficulter comprehenditur & una singulae ejus partes distincte exhibentur. Ceterum HERIGONIUS theoriam magis, quam praxin cordi habet, &

ab ejus tempore pleræque disciplinae mathematicae multum mutationis subierunt, ad altius fastigium evectae, ita ut nostro aëvo non satisfaciat iis, qui ad Mathesin universam addiscendam animum appellunt.

§. 2. Anno 1662, CASPARUS SCHOTTUS, e Societate Jesu, *Cursum Mathematicum* edidit *Herbipoli* in fol. recensum *Francosurti ad Mænum* An. 1674, & denuo *Bambergæ* An. 1677, in fol. (7 Alph. 19 plag. una cum 2 Alph. 4. plag. figurarum aeri incisurarum). Constat opus Libris 28 quorum primus Isagogen continet ad Mathesin, in qua problemata facillima Geometriae practicae explicantur: secundus Arithmeticae: tertius Libros VI priores Elementorum EUCLIDIS, quartus & quintus Trigonometriam; sextus Geometriam practicae secundum pantometron KIRCHERI; septimus elementa Astronomiae; octavus Theoricas planetarum; nonus problemata Astronomiae practicae; decimus Astrologiam judiciariam; undecimus Chronographiam; duodecimus Geographiam; decimus tertius Hydrographiam; decimus quartus Horographiam; decimus quintus Mechanicam; decimus sextus Staticam; decimus septimus Hydrostaticam; decimus octavus Hydrotechniam; decimus nonus Opticam; vigesimus Catoptricam; vigesimus primus Dioptricam; vigesimus secundus & tertius Architecturam militarem; vigesimus quartus Tacticam hodiernam;

nam; vigesimus quintus Musicam; vigesimus sextus Algebram; vigesimus septimus Logarithmorum doctrinam; vigesimus octavus Synopsis Matheseos tradit. Desiderantur adeo Pyrotechnia, Architectura civilis & Ars navigandi; pleræque disciplinæ nimis breviter pertractantur, nec demonstrativa methodus ubique adhibetur: desunt etiam recentiora inventa, nec sublimiora attingit Autor, ipsius præsertim ævo parum trita. Non ergo satisfacit, nostro tempore, iis qui ad solidam Mathematicarum notitiam aspirant.

§. 3. Anno 1681, *Londini* in 4. idiomate Anglico prodijt JONÆ MOORE Novum systema Mathematicum (*A new Systeme of the Mathematics*). Constat Tomis duobus, quorum primo continentur 1. Arithmetica tum decadica, tum decimalis, tum speciosa, 2. sex libri priores Elementorum EUCLIDIS, una cum undecimo & duodecimo, atque Geometria practica, 3. Trigonometria plana & Sphærica, 4. Cosmographia, 5. Ars navigandi, 6. Doctrina Sphærica secundum hypothesein terræ motæ: in altero autem extant Tabulæ astronomiæ, Sinuum versorum & Logarithmorum, atque Geographia seu descriptio præcipuarum Regionum. Eorum potissimum conatibus inservit hoc opus, qui Artem navigandi solidioribus fundamentis superstructam addiscere gestiunt. Commendatur quoque doctrina Sphærica talia con-

tinens, quæ alibi frustra quæveris.

§. 4. CLAUDIUS FRANCISCUS MILLIET DECHALES, Cambericensis, e Societate Jesu, An. 1674, edere cœpit *Cursum* seu *Mundum mathematicum*, tribus Tomis: sed cum novam editionem multo auctiorem meditatus ante diem obiisset, AMATUS VARCHIUS ex eadem Societate An. 1690, editionem ex MSC. Autoris auctam & emendatam dedit *Lugduni Gallorum* in fol. (32 Alph.) Editio posthuma in 4. Tomos digesta, quorum primo continentur 1. Tractatus de progressu Matheseos & de illustribus Mathematicis, 2. EUCLIDIS Elementa XIV. 3. THEODOSII Sphærica, 4. Tractatus de sectionibus Conicis, 5. Arithmetica practica, 6. Trigonometria, 7. Algebra, 8. Hypothesium Cartesianarum refutatio: secundo 1. Geometria practica, 2. Mechanica, 3. Statica, 4. Geographia, 5. Tractatus de Magnete, 6. Architectura civilis, 7. Ars tignaria, 8. Tractatus de lapidum sectione: tertio 1. Architectura militaris, 2. Hydrostatica, 3. Tractatus de fontibus & fluviiis, 4. Hydraulica, 5. Ars navigandi, 6. Optica, 7. Perspectiva, 8. Catoptrica, 9. Dioptrica: quarto denique 1. Musica, 2. Pyrotechnia, 3. Astrolabium, 4. Gnomonica, 5. Astronomia, 6. Astrologia, 7. Tractatus de Meteoris, 8. Calendarium. Autor, in Mathesi pura, antiqua & vulgaria bene explicat; recentiora vero inventa &

sublimiora non attingit. De disciplinis ad Mathesin mixtam spectantibus dicemus suo loco, id unice nunc annotasse contenti sumus, quod ad discursus physicos sæpius digrediat. In demonstrando rigori veterum perspicuitatem jungit. Cursuum Mathematicorum, qui hætenus lucem publicam adspexerunt, absolutissimus est.

§. 5. Anno 1690, WILHELMUS LEYBORN, Anglus, patrio idioma publicavit Cursum Mathematicum sub titulo: *Mathematical Sciences in nine Books; Londini* in fol. (11 Alph. Tab. æn. 43). Liber primus explicat Arithmeticam, vulgarem pariter, ac decimalem, cum logarithmica; secundus Geometriam elementarem (cui appendicis instar subjungitur brevis ad Algebram speciosam introductio); tertius doctrinam de primo mobili; quartus Cosmographiam, Geographiam & Chronologicam doctrinam de epochis; quintus Trigonometriam planam & sphæricam; sextus usum instrumentorum Geometricorum in Geodæsia, Planimetria & Architectura tam civili, quam militari; septimus Artem navigandi; octavus Gnomonicam; nonus librum secundum Institutionum Astronomicarum NICOLAI MERCATORIS de theoria planetarum. Plurimas disciplinas Mathematicas in hoc cursu desiderari statim apparebit, si quidem eam cum cursu præcedente conferre libuerit.

§. 6. ABRAHAMUS DE GRAAF, Batavus, idiomate patrio *Amsteloda-*

mi An. 1694, in 4. (1 Alph. 21 plag. Tab. æn. 94.) sub titulo *De geheele Mathesis of Wiskonst* publici juris fecit Cursum Mathematicum, in quo reperiuntur 1. tractatus brevis de Proportionibus, 2. Arithmetica practica, 3. Geometria elementaris, 4. Trigonometria plana & sphærica, 5. Astronomia, 6. Ars agrimensoria cum Stereometria doliæ, 7. Ars navigandi, 8. Architectura militaris, 9. Gnomonica, 10. Perspectiva, 11. Dioptrica cum Catoptrica, 12. Mechanica, 13. Algebra. In plerisque nimis brevis, Algebra excepta.

§. 7. Anno 1697, OZANAM, Gallus, vir variis scriptis mathematicis suo loco commendandis celebris, in publicum emisit Cursum Mathematicum, quatuor Tomis comprehensum, sub tit. *Cours de Mathematique, Parisiis* in 8., recusum *Amstelodami* (quamvis Parisiorum nomen præ se ferat) An. 1699. (4 Alph. 14 plag. Tab. æn. 155.). Tomus primus complectitur Elementa EUCLIDIS sex priora, una cum undecimo & duodecimo, atque Arithmetica litterali; secundus Trigonometriam planam & Sphæricam, cum Tabulis Sinuum, Tangentium, atque Logarithmorum; tertius Geometriam practicam; quartus Mechanicam atque Perspectivam; quintus Geographiam & Gnomonicam. Desunt adeo disciplinae quàm plurimæ. Ceterum in demonstrando rigorem veterum pulchre observat Cl. Autor.

§. 8. JAC.

§. 8. JAC. TAYLOR in Thesaurario Mathematicæ, quod An. 1707, W. ALINGHAM *Londini* in 8. recudi fecit (1 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 18.) sermone Anglico sub Titulo *Treasury of the Mathematicks*, explicat præcipua problemata Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Trigonometriæ utriusque, Astronomiæ Sphæricæ, Geographiæ, Navigationis, Geodesiæ, Stereometriæ, Gnomonicæ, Architecturæ militaris & Pyrotechniæ, suppositis terminorum definitionibus, & demonstrationibus sepositis. Adduntur Tabulæ Logarithmorum, & Tabulæ Sinuum atque Tangentium.

§. 9. Cum sub finem An. 1706, munus docendi publice Mathesin in Academia Halensi in me translatum esset; statim animadverti, me eidem ex voto satisfacere non posse, quamdiu desit liber, multiplici studioforum ad celeberrimam hanc Musarum sedem undiquaque confluentium scopo conveniens. Prælectiones mathematicæ in Academiis Germaniæ tum instituebantur in *Mathesin Compendiariam* JOANNIS CHRISTOPHORI STURMI, Philosophiæ Naturalis & Matheseos in Academia Altorfina Professoris, paucis Tabulis comprehensam. Sed cum in iis nonnisi prima Matheseos rudimenta continerentur, ac inprimis desideraretur methodus, qua intellectus juvenum ad reliqua studia rectius absolvenda formatur; meo, quem in docenda & discenda

Mathesi mihi præfixeram, scopo eadem parum conveniebant. Equidem idem An. 1699, duobus Tomis *Norimbergæ* in 8. ediderat *Mathesin Juvenilem*, quorum prior Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, cum palmariis Geometriæ elementaris theorematis, Trigonometriam planam, Architecturam militarem atque civilem, & Staticam seu Artem mechanicam; posterior Opticam, Catoptricam & Dioptricam, Astronomiam, Chronologiam, & Gnomonicam continet: in ea tamen nonnisi uberiori discursu illustrantur, quæ in Tabulis concisius proponuntur. Utitur Autor methodo erotematica, nec demonstrationibus locum concedit, ut ipse in præfatione moneat, non quærendam in hoc libro esse Mathesin suis numeris absolutam, ac demonstrationibus exactissimis ubique firmatam, sed facilem, planam ac demonstrationibus discientium captui accommodatis illustratam verius, quam corroboratam. (Tom. I. 2 Alph. 12 plag. Tabb. æn. 52. Tom. II. 2 Alph. 9 plag. Tabb. æn. 57.)

§. 10. Filius ejus LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS, Francofurti ad Oderam Matheseos Professor, Compendium Matheseos conscripsit in usum Prælectionum suarum; idiomate patrio, methodo erotematica, ad imitationem Matheseos juvenilis parentis sui, in quinque partes divisam, quarum prima Mathesin universalem, Arithmeticam, Geometriam element-

elementarem, Phoronomiam, Algebram; secunda Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, Architecturam militarem & civilem, Pyrotechniam, Mechanicam; tertia Astronomiam, Geographiam & Chronologiam; quarta Gnomonicam, Opticam, Perspectivam & Acusticam, quinta Tabulas quasdam mathematicas continet. Prodiit secunda vice *Francofurti ad Oderam*, 1710, in 8. sub Titulo: *Kurtzer Begriff der gesamten Mathesis*. Autor totum se dederat studio Architecturæ civilis ac militaris & Geometriæ practicæ, ut adeo in theoria elementari cespitet. In ceteris vestigia parentis in Mathesi juvenili legit, quantum ipsi dabatur.

§. 11. Ut igitur ad verum Mathematicos studium juventutem Academicam manuducerem, Universæ Mathematicos Elementa idiomate patrio conscripsi, & quatuor Tomis *Hale*, 1710, in 8. sub Titulo: *Anfangs-Gründe der Mathematischen Wissenschaften*, evulgavi (5 Alph. 10 plag. Tabb. æn. 111.) Tomus primus continet Commentationem de Methodo mathematica, Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam & Architecturam civilem; secundus Pyrotechniam, Architecturam militarem, Mechanicam, Hydrostaticam, Aërometriam & Hydraulicam; tertius Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perspectivam, Trigonometriam Sphæricam, Astronomiam, Chronologiam, Geographiam & Gnomoni-

cam: quartus denique Algebram communem, Analysin infinitesimalem Illustris LEIBNITII, & appendicem de præcipuis scriptis mathematicis. Theoretica parcius exposui, ut tempori ac loco servirem, quantum ad praxes, quas uberius tradidi, demonstrandas sufficere deprehendi, reliquis in parte quarta per Analysin crutis. Ubivis tamen methodi rationem habui, ut verioris Logicæ praxis animis discentium insinuaretur, & ad solidam doctrinam capiendam discentes apti efficerentur. Non inutilem fuisse huncce laborem, tum propria experientia me quotidie adhuc edocet, tum alii publice confessi sunt. Videantur Acta Eruditorum An. 1711, pag. 279; An. 1713, pag. 222, 428; & An. 1714, p. 250. Quinta vice recusa sunt hæc Elementa An. 1738, in 8. (6 Alph. Tabb. æn. 121.) Prodeunt nunc *Amstelodami* in linguam Batavorum translata & *Lausannæ* in Latinum versa eduntur.

§. 12. Quoniam hæc Elementa nonnullis prolixiora videbantur, quam ut tyronibus promiscue proponerentur, & inprimis Algebra in parte quarta prolixius explicata eorum capui non convenire, nec ad omnium palatum esse judicaretur; desiderio aliorum satisfactorius eadem in *Compendium* redegei & An. 1713, *Hale* in 8. edidi (2 Alph. Tabb. æn. 45). Continetur in hoc compendio Commentatio de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometria, Trigonometria,

metria plana, Mechanica, Hydrostatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Perspectiva, Astronomia, Geographia, Chronologia, Pyrotechnia, Architectura militaris & civilis, Algebra speciosa ad exempla arithmetica applicata. Editio sexta prodiit *Hale* An. 1737.

§. 13. Quid me impulerit, ut *Elementa Matheseos* Latina a Germanicis diversa ederem, in præfatione Tomi primi exposui. An finem mihi propositum fuerim consecutus, aliorum esto judicium. Editio altera, quæ ab Anno 1730 prodiit & cui nunc Tomo quinto colophonem imponimus, recusa est *Geneva* in 4. ab Anno 1732 forma majore. Enimvero editionem nitidissimam & ab omnibus mendis expurgatam Veronæ parat JOSEPHUS SERERIUS, Medicinæ ac Philosophiæ Doctor, in omni Mathesi ac Philosophia versatissimus. Ad commodiorem usum figuræ ipsi textui inseruntur. Eandem operam iisdem impendit, quam orbi erudito in recudendis operibus nostris philosophicis Latinis abunde comprobavit. Ut Gallorum commodis inserviat JOANNES THEOBALDUS BION, *Elementa* hæc nostra quoad substantiam in linguam Gallicam transfundit; satis ingenue ac feliciter, quemadmodum ex speciminibus ad me transmissis intellexi.

§. 14. Ab eo tempore, ex quo *Elementa Matheseos*, tam patrio, *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. V.

quam Latino sermone conscripta edidi, plura in Germania passim prodire Compendia Matheseos; Nostris satis nota & in bibliopolis nostris ubi-vis obvia. Sed de singulis dicere nimis foret prolixum & a præsentī instituto alienum.

§. 15. CONRADUS DASIPODIUS, Mathematicum Professor Argentoratensis, *Argentorati*, an. 1573, edidit *Dictionarium Mathematicum* Græce atque Latine conscriptum in 8. (plag. 12.) Continentur in eo definitiones ac divisiones Arithmetica, Logistica, Geometria, Geodesia, Astronomia, & Harmonica. Non ordinem alphabeti sequitur Autor, sed disciplinarum. In iis etiam disciplinis, quas attingit, opera ejus est admodum imperfecta.

§. 16. HIERONYMI VITALIS, Capuani, Clerici Regularis Theatini, *Lexicon Mathematicum, Parisiis* 1668, in 8. prodiit (1 Alph. 18 plag.) In eo tamen nonnisi voces Geometriae elementaris, Astronomiæ & Astrologiæ explicantur. Idem An. 1690, *Roma* in 4., recusum & ex omnibus fere disciplinis Mathematicis insigniter auctum, multis inutilibus passim rescissis. (6 Alph. 3 plag.)

§. 17. OZANAM supra laudatus *Lexicon Mathematicum*, secundum ordinem disciplinarum disposuit, editum *Parisiis* An. 1691, in 4. (4 Alph.) Explicat Cl. Autor terminos Arithmetica, Algebrae, Geometriae speculativa & practica, Cosmographiæ, Astro-

nomiæ, Navigationis, Geographiæ tum æstronomicæ, tum naturalis, tum historicæ, Opticæ, Perspectivæ, Gnomonicæ, Catoptricæ, Dioptricæ, Artis pictoriæ, Mechanicæ, Staticæ, Hydrostaticæ, Architecturæ civilis & militaris, atque Musicæ.

§. 18. J. HARRIS in Lexico Technico magno, cujus Tomus primus *Londini* 1704, alter ibidem 1710, in fol. prodiit, præter alios terminos Artium & Scientiarum non modo Mathematicos terminos, verum etiam res ipsas explicat. Titulus operis est: *An universal English Dictionary of Arts and Sciences, explaining not only the Terms of Arts, but themselves.*

§. 19. E. CHAMBERS *Londini* An. 1728, duobus Voluminibus in fol. forma majore edidit Lexicon Universale artium & scientiarum, sub Titulo, *Cyclopædia, or an Universal Dictionary of Arts and Sciences* ordine alphabetico conscriptum (Alph. 22. plag. 8. Tabb. æn. 28.) In eo etiam explicantur, quæ ad Mathesin spectant, ita ut Lexici Mathematici nomen simul tucatur. Mathematica pleraque ex Elementis hisce nostris petuntur, quæ etiam passim citat.

§. 20. An. 1716, lucem publicam adspexit *Lipsiæ* in 8. forma majore, *Lexicon Mathematicum*, (2. Alph. 5. plag. cum multis figuris textui insertis) quod nonnullorum precibus fatigatus, idiomate vernaculo, secundum ordinem alphabeticum, ita digessi, ut non modo singulos terminos in

disciplinis Mathematicis passim obvios explicuerim, verum etiam Auctores citaverim, qui vel primi res iisdem notatas invenerunt, vel optima ratione exposuerunt, ac præterea præcipua dogmata recensuerim, singulorumque usum indicaverim, ut scilicet usui sit illis, qui vel historicam Matheseos cognitionem affectant, vel in lectione Auctorum ob voces non intellectas hærent, vel denique ducem in cognoscendo aliquo argumento desiderant. In Italicum idioma idem transtulit JOSEPHUS SERERIUS supra laudatus (§. 13.)

§. 21. Cum bibliopola novam hujus Lexici editionem dare vellet, a me desideravit, ut idem ad mentem ipsius reformarem aut alteri hunc laborem committerem, sed paterer, ut nomen meum eidem præfigeretur. Quoniam non possideo calamum venalem, insulso petito deferre nec volui, nec potui. Bibliopola itaque, cum Lexicon istud diu desideraretur, tandem aliud edidit An. 1734, (2. Alph. Tabb. æn. 26) de quo judicium meum lubens suspendo. Sed quia vulgo pro meo Lexico venditur ac emitur; monendus est Lector, me istud pro meo non agnoscere, nec mea facere, quæ in eodem immutata. Præfationem quoque, quæ eidem præfigitur, diversam esse ab ea, quæ a me profecta fuerat, ipsa collatio utriusque prodit. Ne tamen abusui nominis mei locus daretur; Autor ejus nomen suum præfigere debuisset.

§. 22. Ia

§. 22. In gratiam eorum, qui castra sequuntur, Lexicon militare, pyrotechnicum & navale conscripsit JOANNES LUDOLPHUS FÆSCH, quod *Dresde* An. 1735, in 8. forma majore (2. Alph. 8. plag. Tabb. æn. 21.) prodiit sub Titulo: *Kriegs-Ingenieur-Artillerie-und See-Lexicon*. Explicantur in iis termini, qui in Architectura & re militari, Pyrotechnia, & Architectura navali ac navigatione occurrunt, figurisque æri incisis, ubi opus est, illustrantur.

§. 23. SIMON STEVINUS varia Opera mathematica conscripsit, quæ sub titulo: *Les Oeuvres Mathematiques de SIMON STEVIN de Bruges, Lugduni Batavorum* in fol. publicavit An. 1634, ALBERTUS GIRARDUS (1. Alph. 19. plag.) Continentur in iisdem 1. Arithmetica tam rationalium, quam irrationalium cum regulis Algebrae; 2. Sex libri DIOPHANTI *Alexandrini*, quorum quatuor priores opera STEVINI, duo posteriores a GIRARDO traducti, 3. Usurarum computus, Logistica decimalis, & incommensurabilium doctrina, ubi simul Elementum EUCLIDIS decimum illustratur; 4. Trigonometria plana & sphaerica, 5. Geographia, 6. Astronomia, 7. Geometria practica, 8. Statica, 9. Optica, 10. Castrametatio, 11. Ratio muniendi per cataractas, 12. Architectura militaris. Autor & in theoria, & in praxi cum laude versatus.

§. 24. CHRISTOPHORI CLAVII,

Bambergensis, e Societate Jesu, *Opera Mathematica* in quinque Tomos distributa, & ab Autore ipso correctæ, plurimisque locis aucta, prodire *Moguntia* An. 1612, in fol. (40 Alph. 9 plag.) Tomus primus complectitur XVI Elementa EUCLIDIS & Libros tres Sphaericorum THEODOſII, cum Commentariis CLAVII in utrumque Autorem, Sinuum, Tangentium & Secantium rationem & Canones; Tractationem triangulorum, tum rectilincorum, tum Sphaericorum. Tomus secundus Geometriam practicam, Arithmeticam, & Algebram, una cum refutatione Cyclometriae JOSEPHI SCALIGERI. Tomus tertius JOANNIS DE SACRO BOSCO, libellum de Sphaera, cum prolixo Commentario CLAVII in eundem, atque libros tres de Astrolabio. Tomus quartus Gnomonicam, Fabricam & usum instrumenti ad Horologiorum descriptionem peropportuni, Horologiorum novam descriptionem, Compendium brevissimum describendorum Horologiorum horizontalium ac declinantium, cum notis in idem. Tomus denique quintus Romani Calendarii a GREGORIO XIII P. M. restituti explicationem, Novi Calendarii Romani Apologiam adversus MICHAELEM MÆSTLINUM, & Appendicem ad Novi Calendarii Romani Apologiam, in qua JOSEPHUS SCALIGER, GEORGIUS GERMANUS & FRANCISCUS VIETA, qui Calendarium aliter instaurandum esse contenderunt, scor-

sim singuli confutantur. CLAVIUS instar veterum, EUCLIDIS, ARCHIMEDIS & APOLLONII, demonstrator rigidus.

§. 25. FRANCISCI VIETÆ Galli, *Opera Mathematica* in unum volumen congesta *Lugduni Batavorum*, in fol. An. 1646, edidit FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenfis, in Academia patria Mathematicum Professor (6 Alph.). Continentur in iisdem 1. Isagoge in Artem analyticam, 2. ad Logisticen Speciosam Notæ priores, 3. Zeteticorum libri quinque, 4. De æquationum recognitione & emendatione Tractatus duo, 5. de numerosa potestatum ad exegefin resolutione, 6. Effectuum Geometricarum Canonica recensio, 7. Supplementum Geometriæ, 8. Pseudo-Mesolabum & alia quædam adjuncta capitula, 9. Theoremata ad sectiones angulares, 10. Responsum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis construendum proposuit ADRIANUS ROMANUS, 11. Apollonius Gallus, 12. Variorum de rebus Mathematicis Responsorum Liber VIII, 13. Munimen adversus nova Cyclometrica, 14. Ratio Calendarii vere Gregoriani, 15. Calendarium Gregorianum perpetuum, 16. Adversus CHRISTOPHORUM CLAVIUM Expostulatio.

§. 26. PHILIPPI LANSBERGII *Opera omnia* prodicere, *Middelburgi in Selandia* A. 1663, in fol. (10 Alph.) Continentur in iisdem 1. Triangulorum Geometriæ libri quatuor, 2. Cyclo-

metriæ novæ libri duo, 3. Uranometriæ libri tres, 4. in quadrantem tura Astronomicum, tum Geometricum, nec non in Astrolabium Introductio, 5. Horologiographia plana, 6. Commentationes in motum Terræ diurnum & annum, & in verum adspectabilis cœli typum, 7. Tabulæ motuum cœlestium perpetuæ, cum novis motuum cœlestium Theoricis & Astronomicarum Observationum thesauro, 8. Chronologiæ Sacræ libri tres, in quibus annorum mundi series, ab orbe condito ad everfa per Romanos Hierosolyma, nova methodo ostenditur.

§. 27. In *Opusculis Mathematicis* GUILIELMI OUGHTRED, quondam Collegii Regalis in Cantabrigiensi Academia Socii, *Oxonii*, An. 1677, in 8. editis, habentur 1. Institutiones Mechanicæ, 2. De variis corporum generibus, gravitate & magnitudine comparatis Tractatus ex MARINI GHETALDI *Archimede promoto* excerptus, 3. Tractatus alius de Automatis, 4. quaestionum DIOPHANTI *Alexandrini* Libri tres, 5. de triangulis planis rectangulis, 6. de divisione superficierum Tractatus, 7. Musicæ Elementa, 8. Architectura militaris, 9. Tractatus de sectionibus angularibus (15 plag.).

§. 28. ANDRÆ TACQUET, Antverpiensis, e Societate Jesu, *Opera Mathematica*, *Antverpiæ* An. 1669, in fol. publicavit SIMON LAURENTIUS VETERANUS ex Comitibus *Montis Calvi*, e Societate Jesu (9 Alph. 15 plag.).

plag. Tab. æn. 88.) Extant in iisdem
1. Astronomiæ libri octo cum Ap-
pendice, 2. Geometriæ practicæ libri
tres, 3. Opticæ libri tres, 4. Catoptri-
cæ libri tres, 5. Architecturæ militaris
liber unus, 6. Cylindricorum & An-
nularium libri quinque, 7. Disserta-
tio Physico-Mathematica de Circu-
lorum revolutionibus.

§. 29. Anno 1692, prodiit *Pari-
sis* in 12. Synopsis Tractatum Ma-
thematicorum, qui necessarii esse pos-
sunt Nobilibus terra marive operam
militiæ daturis; auctore P. HOSTO,
e Societate Jesu, Mathematicum Pro-
fessore Tulonensi. Titulus operis:
*Recueil des Traités de Mathématique,
qui peuvent être nécessaires à un Gentil-
homme, pour servir par mer, ou par
terre.* (Plag. 26, Tab. æn. 67.) Con-
stat hæc synopsis tribus Tomis, quo-
rum primus Elementa EUCLIDIS,
Arithmetica & Trigonometriam; se-
cundus Geometriam practicam, Sphæ-
ricam, Mechanicam, Artem munien-
di & Pyrotechniam; tertius denique
Artem navigandi complectitur.

§. 30. Anno 1693, munificentia
LUDOVICI MAGNI, Galliarum Regis,
Parisis in fol. reg. lucem adspexe-
runt *Veterum Mathematicorum Opera*,
Græce & Latine, pleraque tum pri-
mum edita. (4 Alph. Fig. æn. 174.)
Continentur in istorum numero
ATHENÆUS de machinis; APOLLODORI
Poliorectica; PHILONIS liber quartus
de telorum constructione, & quintus
de rationibus tolerandæ institundæ-

que obsidionis; BITON de construc-
tione machinarum bellicarum & ca-
tapultarum; HERONIS Belopœeca,
Spiritalia, & Automata, JULII
AFRICANI Cesti; Anonymi liber
de toleranda obsidione. Adduntur
BERNARDINI BALDI scholia in HE-
RONIS Belopœeca & nonnulla alia.

§. 31. Ex eadem typographia Re-
gia An. 1693, in fol. prodire, Varia
Opera Mathematica & Physica, Au-
toribus Academicis Regiis scientia-
rum. Titulus operis: *Divers Ouvrages
de Mathématique & de Physique par
Messieurs de l'Académie Royale des
sciences* (Plag. 108.) Reperies in hoc
Volumine 1. FRENICLIJ Tractatum de
Exclusionibus; 2. ejusdem compen-
dium Combinationum; 3. ejusdem
Tractatus de quadratis magicis; 4.
ROBERVALLI observationes super
compositionem motuum, quam ad
tangentes curvarum ducendas appli-
cat; 5. Delinatio libri Mechanici
de motu composito; 6. de recogni-
tione æquationum liber; 7. Tractatus
de indivisibilibus; 8. Liber de Tro-
choide; 9. Epistola ad MERSENNUM
de TORRICELLI quibusdam propo-
sitionibus; 10. TORRICELLI litteræ
ad ROBERVALLIUM missæ occasione
præcedentis epistolæ; 11. ROBERVALLI
Epistola, qua sua sibi inventa con-
tra TORRICELLIUM aliosque Italos vin-
dicat; 12. HUGENII opusculum de
causa gravitatis; 13. Æquilibrii in
libra demonstratio; 14. Potentiarum
fila funesque trahentium vires; 15.

Nova vis movens ope pulveris pyrii & aëris; 16. Constructio ingeniosa loci ad hyperbolam per asymptotos; 17. Regula FERMATII de maximis & minimis demonstrata & admirabilem brevitatem perducta; 18. Problema Opticum sive 39 Prop. lib. 5. ALHAZENI, aut 22. lib. 6. VITELLIONIS constructum; 19. PICARDI praxis magnorum sciaticorum per calculum absolvenda; 20. Schediasma de mensuris; 21. Mensuræ ab originalibus desumptæ; 22. de mensura liquidorum & aridorum; 23. de proportionem aquarum effluentium; 24. experimenta circa aquas effluentes; 25. Fragmenta dioptrica de vitrorum potissimum focus determinandis; 26. AUZOUT Tractatus de micrometro; 27. MARIOTTI Regulæ de aquæ jactibus; 28. ROEMERI Regulæ de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros; 29. ejusdem experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium.

§. 32. FRANCISCI MAUROLYCI, Abbatis Messanenensis, *Opuscula Mathematica*, Venetiis 1575, in 4. edita (1. Alph. 18½ plag.) complectuntur 1. de Sphæra librum unum, in quo termini in hac doctrina obvii explicantur: 2. Computum Ecclesiasticum: 3. Tractatum instrumentorum Astronomicorum, nempe de Quadrato Geometrico, Quadrante, Astrolabio, Armillis, Sphæra Solida: 4.

De lineis horariis Tractatum Gnomonicum: 5. Propositiones libri decimi tertii Elementorum EUCLIDIS: 6. Musicæ traditiones, continentes epitomen Musicæ Boëtianæ & paucas de Musica regulas: 7. De lineis horariis libros tres, Gnomonicæ uberiora fundamenta exponentes: 8. Arithmeticorum libros duos.

§. 33. *Opuscula Mathematica* THOMÆ CEVÆ, e Societate Jesu, Mediolani 1699, in 8. typis descripta (plag. 4.), constant ex nonnullis demonstrationibus de ratione æquilibrîi, de sectione Geometrico-harmonica & arithmetica; de sectione anguli rectilinei in quotvis partes tum organice, tum per quasdam lineas curvas; Cycloides scilicet anomalas; de parabola consideranda instar ellipsis maximæ atque instar hyperbolæ habentis transversam diametrum infinitam; de lineis phantasticis & flexilincis. Adduntur quædam excerpta ex VINCENTII VIVIANI Exercitatione mathematica, cui titulus *Formatione di tutti cieli*, & ex idea universali Matheseos Cl. OZANAMI.

§. 34. JOHANNIS WALLISII, SS. Theol. Doct. & Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi celeberrimi, *Opera Mathematica* tribus voluminibus prostant. Volumen primum editum Oxonii An. 1665, in fol. (11. Alph. 17. plag.) continet 1. Orationem inauguralem An. 1649. d. ultimo Octobris habitam, cum publicam Professionem auspicaretur: 2.

Ma-

Mathesein universalem seu Arithmeti-
cum opus integrum, tam philologi-
ce, quam mathematice traditum : 3.
Tractatum elenchticum adversus MAR-
CI MEIBOMII de Proportionibus
Dialogum : 4. Tractatum de Sectio-
nibus Conicis nova methodo expo-
sitis : 5. Arithmetica infinitorum :
6. Tractatus duos de Cycloide &
Cissoide ac corporibus inde genitis,
& de curvarum tum linearum *εὐθύγραμ-
μα*, tum superficierum *πλατυσμῶ* : 7. ob-
servationem eclipsis solaris An. 1654,
d. 2 Aug. Oxonii visæ : 8. Mechanicam,
sive de motu Tractatum Geometri-
cum. Volumen secundum, quod ibi-
dem An. 1693, in fol. prodit. (10.
Alph. 17. plag.) complectitur, 1. Trac-
tatum Historicum & practicum de Al-
gebra, 2. de combinationibus, alter-
nationibus & partibus aliquotis, 3.
de Sectionibus angularibus, 4. de
angulo contactus & semicirculi, 5.
defensionem ejusdem Tractatus, 6.
disceptationem Geometricam de pos-
tulado quinto & quinta definitione lib.
6 EUCLIDIS, 7. Cono-Cuneum, seu
Corpus partim Conum, partim Cu-
neum repræsentans, Geometrice con-
sideratum, 8. de gravitate & gravita-
tione disquisitionem Geometricam,
9. de æstu maris hypothesin novam,
10. commercium epistolicum de
quæstionibus quibusdam Mathematicis
11. JOH. CASWELLI Trigonometriam
planam & Sphæricam. In tertium de-
nique volumen, quod 1699, in fol.
lucem adspexit (14. Alph.), congesta

sunt 1. CLAUDII PTOLEMÆI, POR-
PHYRII & MANUELIS BRIENNII Har-
monica ; 2. ARCHIMEDIS Arenarius.
& dimensio circuli cum EUTOCHII
Ascalonita in hanc Commentario ;
3. ARISTARCHI *Samii* liber de ma-
gnitudinibus & distantis Solis & Lu-
næ ; 4. Fragmentum libri secundi
Collectionis Mathematicæ PAPPI *Ale-
xandrinii* desideratum ; 5. Collectio
epistolarum quarundam COLLINII,
LEIBNITII, NEWTONI, WALLISII,
FLAMSTEDII rem mathematicam spec-
tantium ; 6. opera quædam miscella-
nea, nimirum Tractatus de loquela,
Grammatica linguæ Anglicanæ, In-
stitutio Logica ad communes usus
accommodata, Mens sobria serio
commendata, in concione latine ha-
bita, Epistolæ ad Titum expositio alia-
que nonnulla Theologica, quæ hujus
non sunt loci.

§. 35. CHRISTIANUS HUGENIUS,
Mathematicus summus, multa præ-
clara conscripsit opera, de quibus suo
loco dicemus. Post obitum ejus jun-
ctim prodierunt quatuor voluminibus
in 4. sub Titulo, Operum variorum, &
reliquorum. *Opera varia* lucem ad-
spexerunt *Lugduni Batavorum*, An.
1724, duobus voluminibus : *Opera
reliqua*, *Amstelodami* An. 1728, duo-
bus itidem voluminibus. Volumen
primum variorum continet 1. Horo-
logium, 2. Horologium Oscillatorium,
sive de motu pendulorum ad horolo-
gia aptato Demonstrationes Geome-
tricas, 3. brevem Institutionem de usu
horo-

horologiorum ad inveniendas longitudes, 4. de Hugeniana centri oscillationis determinatione Controversiam, 5. Machinas quasdam & varia circa Mechanicam. (Alph. 1, plag. 17, Tabb. æn. 33.) ; secundum vero 1. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus sub-juncta est *Eſſetæus* Cyclometriæ Cl. VIII GREGORII A S. VINCENTIO editæ An. 1647. 2. Epistolam ad Cl. Vir. FRANCISCUM XAVERIUM AINSCOM S. J. qua diluuntur ea, quibus *Eſſetæus* Cyclometriæ GREGORII A S. VINCENTIO impugnata fuit, 3. De Circuli magnitudine Inventæ & problematum quorundam illustrium constructiones, 4. de Circuli & Hyperbolæ Quadratura Controversiam, 5. Geometrica varia, 6. de Saturni Luna Observationem novam, 7. Systema Saturnium, 8. EUSTACHII DE DIVINIS Septempedani brevem annotationem in systema Saturnium CHRISTIANI HUGENII, 8. brevem assertionem systematis Saturnii sui, 9. de Saturni Anulo observationes, 10. Cosmotheon, sive de Terris cœlestibus earumque ornatu conjecturas, 11. Ratiocinia in Ludo aleæ, 12. Novum Cyclum harmonicum, 13. Varia de Optica, 14. Experimenta physica (Alph. 2, plag. 14, Tabb. æn. 23.) In Reliquorum volumine primo extant 1. Tractatus de Lumine & Dissertatio de causa gravitatis, 2. Geometrica demonstratio Theorematum Hugen-

nianorum circa Logisticam, GUIDONIS GRANDI, 3. ejusdem GRANDI epistola Geometrica ad V. C. THOMAM CEVAM e Societate Jesu (Alph. 1, plag. 18, Tabb. æn. 15.) In altero autem comprehenduntur opera posthuma, nimirum 1. Dioptrica, 2. Commentarii de poliendis vitris, 3. Dissertatio de Coronis & Parheliis, 4. Tractatus de motu corporum ex percussione, 5. Tractatus de vi centrifuga, 6. Descriptio Automati Planetarii. (Alph. 2, plag. 6, Tab. æn. 43.) De præclaris hisce operibus specialia monēbimus suo loco.

§. 36. Inprimis hic commemoranda sunt Acta Societatum Scientiarum, quæ nostro ævo ad promovendam Mathesin præsertim atque Physicam fuere institutæ. Pertinent huc Acta Philosophica Societatis Regiæ Anglicanæ, quæ a Secretariis eduntur sub Titulo: *Philosophical Transactions giving some account of the present undertakings, studies and labours of the ingenious, in many considerable parts of the World*, & quorum usque ad annum 1734, prostant volumina 38. De his singulis dicere ab instituto nostro alienum est. Sufficit itaque monuisse, quod in iis contineantur plurima ad mathesin spectantia lectu dignissima iis, quibus curæ cordique est Scientiam Mathematicam ultra limites præsentis promovere. Anno 1705, JOHANNES LOWTHORP Volumina 21, quæ usque ad Annum 1700 prodierunt, in epitomen redegit & in iis conten-

contenta per capita generalia disposuit. Lucem adspexit hoc opus sub Titulo: *The Philosophical Transactions and Collections to the end of the year 1700, abridg'd and dispos'd under general heads*, tribus voluminibus, *Londini* in 4. Volumine primo continentur Mathematica, ad Geometriam, Arithmetica, Algebram, Logarithmorechniam, Trigonometriam, Artem libellandi, Opticam, Astronomiam, Mechanicam, Acusticam, Hydrostaticam, Hydraulicam, Artem navigandi, Architecturam civilem & navalem, Perspectivam, Sculpturam, Artem pictoriam & Musicam spectantia. Constat Alph. 4, plag. 4, Tabb. æn. 7. Specialius ad singulas Mathe-
seos partes pertinentia recensentur in Actis Eruditorum, Supplementorum Tom. IV. sect. 7. p. 290. & seqq. Epitomen hanc Actorum Philosophicorum ab An. 1700 usque ad An. 1720, continuavit BENJAMINUS MOTTE, & ab An. 1720 usque ad An. 1732, REIDIUS & JOHANNES GRAY. Continuationis primæ Volumen I, quod *Londini* 1721, in 4. prodiit (Alph. 3. plag. 18. Tabb. æn. 18.) Mathematica, Anatomica, Medica; secundæ vero Voluminis I pars prima, quæ *Londini* 1733, in 4. lucem adspexit, (Alph. 2, plag. 7, Tab. æn. 12.) Mathematica sola continet. Illa
Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

specialius recensentur in Actis Eruditorum An. 1723, p. 89. & seqq. hæc vero in Novis Actis Eruditorum An. 1735, p. 125. Cum lingua Anglica sit minus trita & libri in Anglia impressi in aliis terris difficulter haberi possint; optandum foret, ut in Linguam Latinam, aut minimum Gallicam verterentur. Equidem cum prima volumina in linguam Latinam translata superiori seculo Lipsiæ cederentur, nullos fere invenerunt emtores, ut versio continuata non fuerit: non tamen dubitandum est, fore ut nostro ævo, ubi Mathesis & Physica plures numerat cultores, majore applausu excipiantur *.

§. 37. Ab Anno 1699, quo Academia Regia Scientiarum Parisiis florens, instaurata, singulorum annorum Historiam Gallico idiomate conscripsit ejusdem Secretarius FONTENELLIUS, quibus accedunt Commentarii Mathematici & Physici. Titulus cujuslibet Voluminis est: *Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique*. Imprimatur Parisiis in 4. forma majore & recuditur in Batavia caractere minore, ut leviori pretio comparari possint hæc opera. In singulis voluminibus continentur, quæ ad Physicam generalem, ad Anatomiam, Chimiæ, Botanicam, Geometriam,

* Autoris nostri voto satisfecit Cl. BREMOND, non compendii *Leovorthorpiæ*, sed ipsorum Actorum Societatis *Londinensis* versionem Gallicam suscipiens. Ejus duo Volumina jam prodire sub Titulo, *Transactions Philosophiques de la Société*

Royale de Londres, années 1735 & 1736, Paris. 4to. 1738. Item, années 1733 & 1734, Paris. 4to. 1740. Addatur Volumen sub hoc Titulo, Table des matières imprimées dans les Transactions Philosophiques depuis 1665, jusques en 1735, &c. Paris. 4. 1739.

metriam, Astronomiam, Geographiam, Chronologiam & Mechanicam spectant, siquidem ad singulas hæc classes referendum schediasmata a Membris fuerint exhibita & sub finem Historiæ subjiciuntur Elogia Membrorum, quæ isto anno, cujus historia exhibetur, diem supremum obierunt. Opus præclarum & omnibus Matheseos ac Physicæ cultoribus nunquam satis commendandum continuatur in hodiernum usque diem. Prolixum nimis foret de tot voluminibus sigillatim dicere & in iis contenta recensere. Adeat Diaria Eruitorum, in quibus eadem recensentur, qui hoc desiderat. Enimvero ne deessent ea, quæ ante instaurationem acta fuere, recentius edere libuit Collectionem Commentariorum Academiæ Regiæ scientiarum ab An. 1666, quo fundata fuit, usque ad An. 1699, eadem forma, qua nunc pro singulis annis Historia cum suis commentariis edi solet, Tomis undecim. Tomo primo continetur Historia a prima origine An. 1666, usque ad An. 1686; secundo Historia ab An. 1686 usque ad An. 1699; tertio Commentarii in usum Historiæ naturalis Animalium autore PERRALTIO; quarto Dissertatio de principiis mixtorum naturalium DU CLOS, observationes ejusdem de aquis mineralibus plurium Provinciarum Galliæ, Commentarii DODARTI in usum Historiæ plantarum, ejusdem descriptiones novarum quarundam plantarum, DE BEZE & S. J. De-

scriptiones quarundam arborum & plantarum exoticarum; quinto diversa opera FRENICLI DE BESSY, scilicet Methodus inveniendi solutionem problematum per Exclusiones, Compendium Combinationum, Tractatus de Triangulis reſtangularis in Numeris, Tractatus de Quadratis magicis, Tabula generalis Quadratorum magicorum, & BLONDELLI Resolutio quatuor problematum principum Architecturæ; sexto diversa opera ROBERVALLII, scilicet observationes de compositione motuum, & de modo inveniendi tangentes curvarum, Idea libri Mechanicæ de motibus compositis, Tractatus de recognitione æquationum, de geometrica planarum & cubicarum æquationum resolutione, de Indivisibilibus, de Trochoide ejusque spatio, epistola ÆGIDII PERSONERI de ROBERVAL ad Cl. P. MERSENNUM, epistola EVANGELISTÆ TORRICELLI ad ROBERVALLIUM, & Epistola ROBERVALLII ad TORRICELLIUM; præterea diversa opera PICARDI, nimirum Praxis horologiorum solarium majorum per calculum, dissertatio de Mensuris, una cum AUZOUTI comparatione mensurarum, de mensura liquidorum & aridorum, Experimenta circa aquas effluentes, fragmenta dioptrica, Tractatus de libellatione, ROEMERI de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus, secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros & ejusdem Experimenta circa altitudines & amplitudines

dines projectionis corporum gravium, instituta cum argento vivo; septimo Tractatus & observationes astronomicæ atque physicæ factæ in pluribus itineribus a Membris Academiae & pluribus, quibus commercium literarium cum Academia fuit: octavo diversa opera CASSINI, scilicet de Origine & progressu Astronomiæ & de ejus usu in Geographia & Navigatione, Elementa Astronomiæ rectificata ex observationibus RICHERII factis in Insula Cayennæ, Luminis cœlestis, quod in Zodiaco apparet, detectio, Regulæ Astronomiæ Indorum computandi motus Solis & Lunæ, Reflexiones de Chronologia Sinarum, de Insula *Taprobane*, Hypotheses & Tabulæ Satellitum Jovis ex observationibus recentioribus reformatæ, Tabularum Satellitum Jovis usus præcipui; nono diversa opera DE LA HIRE, scilicet Tractatus de Mechanica, Tractatus de Epicycloidibus & earum usu in Mechanica, Explicatio præcipuorum effectuum glaciæ & frigoris, Dissertatio de differentia sonorum chordæ & Tubæ Marinæ, Tractatus de differentibus accidentibus visus, Tractatus de Praxi Picturæ; decimo commentarii Mathematici & Physici Academiae scientiarum Annorum 1692, 1693, &c. & Commentarii Mathematici & Physici Memborum Academiae scientiarum ex diversis Diariis Eruditorum extracti; undecimo denique Analysis generalis seu Methodi novæ resolvendi proble-

mata omnis generis & omnis gradus in infinitum, autore DE LAGNY. Volumen septimum in duas partes dividitur, quarum utraque justum volumen constituit & multa continet, quæ sigillatim recensere nimis prolixum foret.

§. 38. Anno 1710, *Berolini* in 4. prodierunt *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societati Regiæ exhibitis edita* (Alph. 2, plag. 6, Tabb. æn. 31.) Dividitur in tres partes, quarum prima literaria, secunda physica & medica, tertia Mathematica & Mechanica continet. Tertia mole sua longe superat duas priores. Hæc Miscellanea deinceps continuata fuere ac in posterum continuabuntur. Continuatio prima lucem adspexit *Berolini* An. 1723, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. æn. 8); secunda ibidem An. 1727, in 4. (Alph. 1, plag. 21, Tab. æn. 10.), tertia sub Titulo Tomi quarti ibidem An. 1734, in 4. (Alph. 2, plag. Tabb. æn. 11.)

§. 39. Academia Scientiarum Petropolitana quinque ab Anno 1728 usque ad An. 1738, *Petropoli* edidit Volumina in 4. charta augusta sub Titulo: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitane* pro annis 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, & 1731. Sunt vero horum Commentariorum tres classes, nimirum Mathematica, Physica & Historica. Quæ in classe mathematica continentur, hujus sunt loci & Mathesin inprimis sublimiorem multum promovent,

quemadmodum suo loco clarius ediferemus. Cum enim hoc opus continuandum sit in posterum, ut de singulis in classe mathematica cujusvis voluminis contenta sigillatim dicamus præsentis instituti ratio non fert.

§. 40. Denique hic quoque commemorandi sunt, *De Bononiensi scientiarum & Artium Instituto atque Academia Commentarii*, qui *Bononiæ* An. 1731, in 4. charta itidem augusta lucem publicam adspexerunt (Alph. 3, plag. 13, Tab. æn. 9.). Præfationis loco præmittitur Historia Bononiensis scientiarum Instituti: in Commentariis vero præter ea, quæ ad Historiam naturæ spectant, atque Chymica, Anatomica, Medica, Physica, continentur etiam Mechanica, Analytica, Geographica, Astronomica & Meteorologica. Subjunguntur iisdem opuscula varia quorundam Academicorum, inter quæ ad Mathesin spectant DOMINICI GUILIELMINI epistola hydrostatica, EUSTACHII MANFREDII de meridianæ lineæ, quæ in D. *Petronii* exstat, dimensione & de novissimis circa fixarum siderum errores observationibus, GABRIELIS MANFREDII de formulis quibusdam integrandis, JACOBI RICCATI virium elasticarum leges, JOANNIS RIZETTI de corporum collisionibus & inde orta motuum communicatione, & FRANCISCI MARIE ZANOTTI de motu composito & de reflexionibus globi in plano rectangulo.

§. 41. Ad præsentem scriptorum

classem etiam referimus CASPARI SCHOTTI, supra laudati, *Organon Mathematicum & Magiam Universalem Naturæ & Artis*. *Organon Mathematicum* editum est *Herbipoli* An. 1688, in 4. (5 Alph. Fig. æn. 1, Alph. 7 plag.). Ope tabularum quarundam Mathematicarum problemata Arithmetica, Geometrica, Architecturæ militaris, Chronologiæ, Gnomonica, Astronomiæ, Astrologiæ judiciariæ, Steganographiæ & Musicæ facilia redduntur tyronibus. Magia in quatuor partes divisa *Bambergæ* 1677, in 4. lucem adspexit (14 Alph. Tab. æn. 89.) In Tomo primo continentur Optica, Catoptrica & Dioptrica; in secundo Acustica & Musica; in tertio Mechanica, Statica, Hydrostatica, Hydrotechnica, Aërotechnica, nec non Arithmetica, Geometrica: in quarto denique Cryptographica, Pyrotechnica, Magnetica, Sympathica, Medica, divinatoria, Physiognomica & Chiromantica.

§. 42. In eundem censum veniunt DANIELIS SCHWENTERI *Mathematicum & Linguarum orientalium in Academia Altorffina Professoris, Delicia Physico-Mathematica*, *Norimbergæ* 1636, in 4. primum editæ (3 Alph. 4 plag.) & postea a PHILIPPO HARSDOFFERO duobus Tomis auctæ (10 Alph. 8 plag.) Continentur in iisdem ludicra varia, nonnulla etiam utilia, ex Arithmetica, Geometria, Stereometria, Musica, Optica, Catoptrica, Astronomia, Astrologia, Gnomonica & Thaumato-

poë-

poëtica, Statica, Mechanica, Pyrobolia, Pneumatica, Hydraulica, Arte scriptoria, Architectura & Chymia.

§. 43. Majorem selectum in simili scripto fecit OZANAM, quod sub titulo *Recréations de Mathématique & de Physique*, Parisiis 1696, in 8. reg. edidit (3 Alph. 7 pl. Tab. an. 44.) Recusæ sunt hæ Recreationes multo auctiores, quatuor Tomis, ibidem An. 1725, in 8. forma majore, (Alph. 5, plag. 6, Tab. an. 132). Tomus primus continet problemata Arithme-

ticæ, Geometriæ & Opticæ; secundus problemata Gnomonicæ, Cosmographiæ, Mechanicæ; tertius problemata Pyrotechnicæ & Physicæ, & Tractatum de Horologiis elementaribus DOMINICI MARTINELLI ex Italico in Gallicum idioma translatus. In quarto denique Tomo agitur de Phosphoris naturalibus & artificialibus & lampadibus perpetuis, atque præstigiatorum artificia, una cum aliis ludicris explicantur.

CAPUT II.

De Arithmetica.

§. 1. **A**rithmetica veterum ab Arithmetica hodierna prorsus erat diversa. Veteres enim in eadem nonnisi varias numerorum divisiones considerabant. Videre hoc est ex duobus *Arithmetices* libris, quos tertio Urbis conditæ seculo consignavit NICOMACHUS, editis Parisiis 1538. Eum sequitur pressò pede, sexto a Christo nato seculo, ANITIUS MANLIUS SEVERINUS BOETHIUS in Arithmetica sua.

§. 2. *Compendium Arithmetica* veterum composuit, nono post Christum natum seculo, PSELLUS, a GUILIELMO XYLANDRO ex Græco idiomate in Latinum translatus, annotationibus auctum & Basilea 1556, in 8. in lu-

cem publicam emissum. Recentius simile Compendium conscripsit JODOCUS WILlichius, sub titulo: *Arithmetica libri tres* editum Argentorati 1540, in 8. (plag. 8.) Usus habet in Idea exemplari definitionum animis tyronum ingeneranda, ut præcepta Logicæ facilius comprehendant & ad divisionem rerum in sua genera & species intimius perspicendam: de quo suo loco plura.

§. 3. Prolixius hoc Arithmeticæ genus illustrarunt, duodecimo post Christum natum seculo, JORDANUS in duodecim *de Arithmetica* libris; & JACOBUS FABER *Stapulensis* in Commentario in eosdem An. 1480 edito.

§. 4. Arithmetica theoreticam,

quæ numerorum proprietates expendit, illustravit EUCLIDES Elementorum libro VII, VIII, & IX. Sed de his Elementis dicemus plura in sequente capite.

§. 5. Exactam theoriam ad demonstrandas operationes communes Arithmeticæ practicæ cum in numeris integris, tum fractis sive vulgaribus, sive sexagenariis, dedit BARLAAMUS MONACHUS in *Logistica*, quam Latine reddidit & scholiis illustratam *Parisiis* An. 1600, in 4. edidit JOANNES CHAMBERUS, Collegii Etonensis apud Anglos socius. (1 Alph. 3 plag.) Sed captum tyronum transcendit, quibus nimia accuratio inutilis, immo ridicula videtur.

§. 6. *Frater* LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI, Ordinis Minorum, Sacræ Theologiæ Magister, idiomate Italico An. 1523, edidit opus in fol. (6 Alph. 10 plag.) *de Arithmetica & Geometria*. Maxima operis pars Arithmeticæ impenditur, & in ea non modo divisiones numerorum ex NICOMACHO & proprietates ex EUCLIDE traduntur; verum etiam Algorithmus cum in integris, tum in fractis, una cum extractionibus radicum, regulis proportionum & progressionum, nec non regula falsi & Algebrae explicatur.

§. 7. MICHAEL STIFELIUS, Pastor Ecclesiæ Holtzdorffianæ, An. 1544, in 4. edidit *Arithmetica integræ* (1 Alph. 13 plag.), in qua multa tradit de numerorum cum rationa-

lium, tum irrationalium, immo etiam Cossicorum praxi, quæ alibi frustra quæsieris, sed sine demonstrationibus.

§. 8. *Arithmetica practica* opus absolutum An. 1556 dedit NICOLAUS TARTAGLIA, Venetus, in duas partes divisum, quarum prima arithmeticam practicam ad usum vitæ humanæ applicatam, altera vero Algebrae fundamenta explicat.

§. 9. FRANCISCUS MAUROLYCUS in suis *Arithmetica* libris supra laudatis (§. 32. C. 1.) doctrinam de numeris figuratis promovit, & algorithmum, cum extractionibus radicum, atque aliis Arithmeticæ practicæ regulis rigoroſe demonstravit: Sed ejus demonstrationes non sunt ad cujusvis captum accommodatæ.

§. 10. GEORGIUS HENISCHIUS in *Arithmetica perfecta & demonstrata* (*Augustæ Vindelicorum* 1609, in 4. 2 Alph. 6 plag.) omnem praxin de numero vulgari, Cossico & astronomico demonstrat, & id singulare habet, quod demonstrationes in syllogismos resolverit.

§. 11. ANDREAS TACQUET in *Theoria & praxi Arithmetices* sæpius recusa (c. gr. *Amstelodami* 1704, in 8. plag. 34. Tabb. 8.) Elementa EUCLIDIS Arithmetica facilius demonstrat & praxes arithmeticas suis quoque demonstrationibus munit. Unde non immerito commendatur hoc opus.

§. 12. Demonstrationes in Arithmetica practica etiam affert DE CHA-

LES (§. 4. C. 1.) Sed negligent CLAVIUS, HERIGONIUS, VINCENTIUS LEOTAUDUS e Societ. Jesu, qui *Institutionum arithmeticarum* libros quatuor composuit, SCHOTTUS & plerique alii (§. 5. & seqq. Cap. cit.). WALLISIUS calculum litteralem cum numerorum algorithmo conjunxit, & illius ope regulas fractorum, proportionum & extractionum radicum demonstravit: ex quo compendium dedit EDUARDUS WELLS sub titulo *Elementorum Arithmetice*, 1698, in 8. tyronibus calculi utriusque commendandum.

§. 13. In *Elementis Arithmetice* non modo praxin, verum etiam theoriam demonstravi, præsertim theoriam de ratione Quantitatum. Ast in *Elementis Germanicis* dedi demonstrationes ad captum tyronum magis compositas. Sunt vero eadem vere analyticæ, ex ipsa notione numeri deductæ: ex qua integram Arithmeticam practicam methodo analytica deduxi, ut ad meditandum formarentur ingenia studio Arithmeticæ.

§. 14. Omittimus Autores alios, qui solam praxin tradiderunt, quamvis ad usum communem commendari mereantur GEMMA FRISIUS in *Methodo facili Arithmetica practica* (*Vitebergæ* 1544, in 8. plag. 11), ex quo me puerum integram arithmeticam practicam, ipsam etiam extractionem radicum, proprio Marte didicisse memini, & ADRIANUS METIUS in *Arithmetica* duobus libris

comprehensa (*Hafnia* 1640, in 4.). Recentius regulam generalem Arithmeticæ resolvendi omnia problemata, quæ ratione nituntur, dedit K. F. DE REES, quæ ex idiomate Batavo in Germanicum translata publici juris facta *Gættingæ* An. 1739, in 8. (plag. 12.). Usui est illis, qui nulla theoria animum imbutum possident.

§. 15. SAMUEL MORLANDUS *Londini* An. 1673, in 12. (plag. 6½) idiomate Anglico emisit *descriptionem duorum instrumentorum, quorum ope additio, subtractio & multiplicatio motu quorundam orbium absolvitur*, Utrumque An. 1666, CAROLO II. Regi exhibuit. Sed multo ingeniosorem machinam Arithmeticam in juventute sua dudum invenit illustris LEIBNITIUS, de qua in *Miscellaneis Berolinensibus* pag. 394. nonnulla leguntur. Aliam utut minus perfectam, ingeniosam tamen dedit Cl. JOANNES POLENUS in *Miscellaneis, Venetiis* 1709, in 4. (plag. 8. Tabb. 9.)

§. 16. Logisticam decimalem prolixè ac perspicue peculiari libro exposuit JOHANNES HARTMANNUS BAYE-RUS, D. Medicinæ, An. 1619, *Frankof. ad Mœnum* vernaculo idiomate in 4. edito (1 Alph. 6. plag.). Arithmeticam Logarithmicam vero optime explicuit in peculiari itidem volumine, de quo inter scripta Trigonometrica plura dicemus, BRIGGIUS.

§. 17. De Arithmetica autem decimali imprimis commendari meretur libellus, quem sub Titulo: *A new and*

and compleat Treatise of the Doctrine of fractions, vulgar and Decimal, Londini An. 1714, in 8. edidit SAMUEL CUNN, ubi omnia explicantur & exemplis illustrantur, quæ de usu fractionum decimalium tenenda sunt. Non inutilem operam sumeret, qui eundem in linguam Latinam, vel etiam Germanicam transferret. Nos theoriam harum fractionum, quantum ad praxin sufficit, exposuimus & demonstravimus Cap. 9 Elementorum Arithmeticæ. Hodie enim usus earum prorsus egregius est, ubi ex æquationibus algebraicis radices per approximationem eruendæ & series infinitæ ad communem usum aptandæ.

§. 18. Virgulas suas, quibus magnorum numerorum multiplicationem ac divisionem facilitavit, JOANNES NEPERUS, Baro Merchistonius, Scotus, in *Rhabdologia* (*Edinburgi* 1617, in 12. plag. 6.) descripsit. JO-

HANNES VICO GEORGIUS HERWART AB HOHENBURG, U. J. Doct. ex Assessore summi tribunalis imperatorii & Cancellario supremo Baviaræ Ducis ejusdem consiliarius intimus, Præses provinciæ Schwabæ & inclytorum utriusque Baviaræ Statuum Cancellarius, *Monachii* An. 1610, in fol. reg. evulgavit *Tabulas Arithmeticas πολλαπλασιαστικὰς universales*, quarum subsidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per solam additionem & quotiens quilibet e divisione eliciendus per solam subtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum sit gnarus, exacte & celeriter invenitur (11 Alph. 9 plag.). NEPERUM imitatus SAMUEL REYHERUS, Mathem. Prof. Kilonienſis, Bacillos sexagenales *Kilonii* 1688, in 4. publicavit, quorum ope Logistica sexagenaria facile exercetur: de qua egimus Cap. 10. *Arithmetica*.

C A P U T III.

De Geometria.

§. 1. **G**eometria est vel theoretica, vel practica: theoretica vel elementaris, vel sublimior.

§. 2. Geometriam elementarem conscripsit EUCLIDES, cujus *Elementa* a variis in lucem edita fuere. Textum Græcum cum versione Latina An. 1703. *Oxonie* in fol. (7 Alph.

17. plag.) sub titulo ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τα στοιχειώδη, h. e. EUCLIDIS, *quæ supersunt*, omnia, edidit DAVID GREGORIUS, Astronomiæ Professor Savilianus. Anno 1530, in priora sex Elementa Commentarium edidit ORONTIUS FINÆUS, in quo mentem EUCLIDIS tantummodo explicat, qualem etiam

etiam An. 1557, dedit JACOBUS PELETARIUS. In Elementa omnia XV commentati sunt circa idem tempus NICOLAUS TARTAGLEA, aliqua etiam de suo addens, & An. 1578, FRANCISCUS FLUSSATES CANDALLA, nobilis Gallus, qui ad Elementa decimum sextum, septimum, & octavum de solidorum corporum comparatione & inscriptionibus variis adjecit. Elementa EUCLIDIS pariter ac FLUSSATIS cum commentario prolixo edidit CLAVIUS. Sæpius recusa prodire inter alia *Franc. ad Mæn.* 1654, in 8. duobus Tomis (Tom I. 2 Alph. 4 plag. & Tom. II. 1 Alph. 20 plag.) atque etiam inter Opera ejus extant (§. 24. C. 1.) Bene quoque EUCLIDEM integrum explicarunt DECHALES (§. 4. C. 1.), HERIGONIUS (§. 1. cap. cit.), & imprimis concinna brevitate ISAACUS BARROWIUS, Matheseos olim in Academia Cantabrigiensi Professor. Sed quoniam integer EUCLIDES tyronibus parum utilis; ideo complures sex tantum priora Elementa ediderunt, & ad summum undecimum & duodecimum adjecerunt. Prolixum nimis foret singulas recensere editiones: sufficit eas nominasse, quæ præ aliis commendari merentur. In hunc ergo censum referimus Elementa EUCLIDIS Gallica, quæ DECHALES sigillatim edidit, & Elementa Geometriæ planæ & solidæ ANDRÆ TACQUET. Præstantissima illorum editio est *Parisiæ* An. 1709, in 12. reg. *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. V.

(12 plag. Tab. æn. 16.); horum vero *Cantabrigiensi* An. 1703, in 8. (plag. 16. Tab. 7.), quorum illam debemus OZANAMO, hanc vero GUILIELMO WHISTONO, tunc temporis Mathematicum Professore Cantabrigiensi. Continetur autem in Elemento VII, VIII, & IX, theoria numerorum seu Arithmetica elementaris: unde ANDRÆAS TACQUET tria hæc Elementa Arithmetica suæ inseruit (§. 11. c. 2.). Opus hoc illustre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut providentiæ divinæ tribuendum sit, quod injuria temporum non interciderit.

§. 3. JOANNES SCHEUBELIUS, in Academia Tubingensi EUCLIDIS Professor, ex stimans, præter institutum EUCLIDIS, in designandis demonstrationum momentis literarum figuras usurpari, atque hac ratione & docentibus laborem ac molestiam augeri, & discentium intelligentiam impediri, An. 1550, novo consilio Elementa sex priora ita demonstravit, ut literis remotis sua unumquodque propria appellatione designarit. Prodiit opus *Basileæ* in fol. præmissa brevi Algebrae descriptione. (3 Alph. 5 plag.)

§. 4. Alio consilio An. 1565, CHRISTIANUS HERLINUS & CONRADUS DASYPODIUS demonstrationes *Euclideanas* in syllogismos resolverunt: qui labor hunc usum habere potest, ut appareat, quomodo ex plurimum Syllogismorum concatenatione tan-

D

dem

dem demonstratio completa enascatur. Idem opus utrique debetur ex parte. Prodiit *Argentina* An. 1506, in fol. (Alph. 2, plag. 4, cum figuris ligno incis.). Titulus est: *Analyses Geometricæ sex librorum EUCLIDIS, primi & quinti a CHRISTIANO HERLINO, reliquæ una cum Commentariis & scholiis perbreuibz in eosdem sex libros Geometricos, a CONRADO DASYPODIO.*

§. 5. Ordo EUCLIDIS displicuit PETRO RAMO, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ in *Scholis Mathematicis* lib. 6, & seqq. contra EUCLIDEM passim disputat. Prodiere hæ Scholæ *Francofurti ad Mænum* opera LAZARI SCHONERI An. 1599, in 4. (2 Alph. 17 plag.) continentes 1. exhortationem ad artes mathematicas, 2. disputationes de præcipuis quibusdam capitibus Arithmeticæ, & 3. discursus de quindecim libris EUCLIDIS. Confer etiam lib. 3, pag. 94, & seqq. RAMUS itaque alia Geometriæ elementa conscripsit libris 27 comprehensa secundum ordinem Scholæ, a SCHONERO An. 1599, in 4. *Francofurti*, una cum libris 2 Arithmeticæ edita & *Euclidæis* prælata. Titulus libri est: PETRI RAMI *Arithmeticae Libri duo, Geometria septem & viginti, a LAZARO SCHONERO recogniti & aucti* (2 Alph. 9 plag. cum figuris textui insertis). Arithmetica magis practica, quam theoretica est, etsi theoria de ratione & proportione exemplis illustretur &

ad praxin transferatur. Deficiunt tamen demonstrationes accuratæ, quales dedit EUCLIDES. Adjecit SCHONERUS de numeris figuratis librum unum & RAMI Algebræ libros duos a se emendatos, atque de Logistica sexagenaria librum proprium. In Geometria agitur primum de magnitudine in genere, deinde de lineis, postea de superficiebus, tandem de solidis. Enimvero qui primus Geometriam ad ordinem Scholæ reformare ausus est, statim exemplo suo docuit (quod supra §. 57. *Meth. Math.* annotatum est) accuratam demonstrandi methodum cum ordine Scholæ subsistere non posse. Etsi enim SCHONERUS testetur, se in docenda Arithmetica & Geometria P. RAMI per multos annos versatum, & quantum ex iis proficere liceat tyronibus experientia multiplici edoctum fuisse; hoc tamen non obstat, quo minus EUCLIDEM ipsum RAMO præferamus. Neque enim SCHONERUS methodi ac rigoris in demonstrando; sed tantummodo doctrinæ rationem habet, quam ex RAMO facilius hauriri ac memoriæ inprimi posse facile conceditur. Nobis vero jam sermo est de methodo, quæ cum rigore demonstrandi consistit, ut plenaria adsit convictio eaque immota, quocunque tandem acumine demonstrationem perlustras. Hanc desiderari in RAMO, nec cum eo ordine, quo doctrinas congeffit, consistere posse contendimus.

§. 6. Idem

§. 6. Idem apparet etiam ex ceterorum scriptis, qui post RAMUM idem consilii ceperunt. Pertinent huc 1. *Elementa Geometriae* IGNATII GASTONIS PARDIES e Societate Jesu, quartum *Haga Comitum* An. 1680, in 12. (plag. 8) recusa & a summe Reverendo Abbate SCHMIDIO, Helmstadiensium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Mathesin & Philosophiam profiteretur, ex Gallico sermone in Latinum translata. Extant in Opusculis ejus mathematicis, quæ sub titulo: *Oeuvres de Mathématique*, *Haga Comitum* An. 1691, in 12. prodire, in quibus præter hæc elementa libris IX comprehensa continetur Discursus de motu locali, Statica, & Descriptio duarum machinarum describendis horologiis Solaribus convenientium. 2. *Nova Elementa Geometriae* ARNALDI, suppresso nomine, Anno 1667, *Parisiis* primum edita in 4. dein An. 1685, ibidem & An. 1690, *Haga Comitum* in 8. recusa (plag. 21) idiomate Gallico. 3. *Elementa Geometriae* Gallica R. P. BERNHARDI LAMY An. 1685, *Parisiis* in 12. primum edita & An. 1710, ibidem multo auctiora recusa, ita ut nunc singulae EUCLIDIS propositiones, exceptis Elementis septimo, octavo & nono de numeris agentibus, in iisdem contineantur una cum introductione ad sectiones conicas (plag. 21.) 4. *Elementa Geometriae* Serenissimi Burgundie Ducis Gal-

lice conscripta (*Trevoltii* 1705, in 4. reg. 1 Alph. 7 plag.) concinna brevitate maxime necessaria methodo *Arnaldiana* evolventia*. Omittimus alia, quæ minoris sunt momenti & ex hisce compilata.

§. 7. Integrum quoque EUCLIDEM alio ordine digessit & novis passim demonstrationibus munivit Cl. PETRUS POLYNIER, Medicus Parisiensis, in Elementis Geometriae, quæ una cum Elementis Arithmeticae sub titulo: *Elémens des Mathématiques*, *Parisiis* 1704, in 12. reg. (1 Alph. 4 plag.) edidit. Contra quæ ex EUCLIDE cognitu minus necessaria sunt, omisit, & necessaria alio ordine digessit, aliterque subinde demonstravit Cl. ANGELUS DE MARCHETTIS in Pisana Universitate Mathematicum Professor in EUCLIDE, quem vocat, *Reformato* (*Liburni* 1709, in 4. 1 Alph. 10 plag.)

§. 8. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum EUCLIDIS non fuisse in ausu suo satis felices; sed EUCLIDIS Elementis palmam adhuc merito tribuendam esse. Memini hanc fuisse LEIBNITIO sententiam, cum me inviseret, dum Elementis Geometriae concinnandis operam darem, ipsique referrem me multiplici modo tentasse, ut eo ordine Elementa Geometriae digererem, quo usus est BERNHARDUS LAMY, sed nunquam hoc fieri potuisse, nisi quædam assumerem abs-

* Elementorum horum Autor Dn. DE MALESIEUX.

que demonstratione, quæ essent demonstranda, vel in demonstrando ac definiendo admitterem confuse tantummodo percepta. In Anglia JOHANNES KEIL, ut Matheseos Studiosos ad Elementa EUCLIDIS reduceret, eo fine *Oxonii* An. 1715, in 8. (Alph. 1, plag. 6, cum figuris textui insertis), imprimi curavit Elementa sex priora EUCLIDIS una cum decimo & undecimo ex versione FREDERICI COMMANDINI. In præfatione, quam iisdem præmisit, graviter invehitur in eos, qui EUCLIDEM carpunt, & ab ejus lectione juvenes abducunt. Addidit Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ, atque Tractatum de natura & Arithmetica Logarithmorum.

§. 9. Præter ordinem, quem EUCLIDES in Elementis suis tenet, multi ex antiquis pariter ac recentioribus Geometra, tres sibi visi suntprehendisse nævos in ejusdem Elementis, quorum primus respicit definitionem parallelarum & sub ea axioma, quod apud CLAVIUM est decimum tertium libri primi; secundus definitionem sextam libri quinti, quæ est æque proportionalium; & tertius definitionem quintam libri sexti de compositione rationum. Ab his nævis cum vindicare aggressus est HIERONIMUS SACCHERIUS, Societatis Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professor, in Opusculo, quod sub titulo: *EUCLIDES ab omnino novo vindicatus*, sive *Conatus Geome-*

tricus, quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia, *Mediolani* 1733, in 4. (plag. 20, Tab. æn. 6).

§. 10. Nos equidem in Elementis hîsce Matheseos non exhibuimus Elementa EUCLIDIS ipsa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiat vel in Arithmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus & demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in Logica Latina (§. 799, 854, 855) explicamus, ad usum tamen tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

§. 11. Quæ in EUCLIDE de Circuli, Sphæræ, & Cylindri dimensione defuere; ea supplevit ARCHIMEDES in duobus *de Sphæra & Cylindro Libris*, & *de Circuli dimensione Libello unico*: ex quibus selecta theoremata ad faciliorem tyronum intelligentiam proposuit TACQUETUS sub finem Geometriæ supra laudatæ (§. 2). Idem ARCHIMEDES Libros alios de *Spiralibus*, de *Conoidibus & Spheroidibus*, & de *Quadratura Parabole* scripsit. Opera ejus una cum *Conicis* APOLLONII & *Sphericis* THEODOSII edidit facilioribus cum demonstrationibus ISAACUS BARROWIUS *Londini* 1675, in 4. (Opera ARCHIMEDIS constant 24 plag. Tab. æn. 13-

APOL-

APOLLONII 14 plag. Tab. 12, & THEODOSII plag. 6, Tab. 3). Præter vero Geometrica in operibus ARCHIMEDIS una continentur Libri *de equiponderantibus & insidentibus humido: Arenarium* tamen ejus omisit BARROWIUS, qui in alia editione una comparet, quæ *Panormi* An. 1685, in fol. prodiit, & cujus singularia fata in Actis Eruditorum An. 1687, p. 543, & 544, recensentur. Germanicam operum ARCHIMEDIS versionem (Libris de insidentibus humido exceptis) dedit JOH. CHRISTOPH. STURMIUS (*Norimbergæ* 1670, in fol. 6 Alph. 2 plag.)

§. 12. Archimedeæ promovere studuit JOHANNES KEPLERUS in *Nova Stereometria doliorum vinariorum*, in primis Austriaci (*Lincii* 1615, in fol. plag. 28), quæ una continet supplementum ad ARCHIMEDEM de Stereometria figurarum Conoidibus & Sphæroidibus proxime succedentium. Ex Latino in Germanicum versam eandem anno sequenti edidit, sed passim mutatam, alicubi etiam practicis nonnullis auctam. Ejus exemplo excitatus BONAVENTURA CAVALERIUS, ordinis S. Hieronymi, olim Mathematicum Professor Bononiensis (quem admodum ipse in præfatione fatetur) adhuc ulterius progressus plurium, quam ARCHIMEDES & KEPLERUS, solidorum per revolutionem sectionum conicarum circa axem aut rectas alias dedit nova methodo indivisibilium, quam vocat, a KEPLERO part. 1.

theor. 2. Stereom. indicata, in *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (*Bononiæ* 1653, in 4. 3 Alph. 1 plag.) Similiter *Archimedeæ* illustravit atque promovit EVANGELISTA TORRICELLIUS, magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, in *Operibus Geometricis de Solidis sphaeralibus, de motu, de dimensione parabole, de solido hyperbolico cum appendicibus, de cycloide & cochlea* (*Florentiæ* An. 1644, in 4. 2 Alph.)

§. 13. Præter ea, quæ ARCHIMEDES ad sublimiorem Geometriam spectantia tradidit, Veteres in primis ad eandem *Sectionum Conicarum* doctrinam referebant, de quibus opus absolutum VIII Libris comprehensum composuit APOLLONIUS *Pergæus*, quorum quatuor priores sæpius editi. Inter optimas editiones refertur, quam cum Commentariis prolixis An. 1655, in fol. (5 Alph. 19 plag. Tabb. æn. 30.) *Antverpiæ* in lucem emisit CLAUDIUS RICHARDUS, e Societate Jesu, quales etiam in EUCLIDIS Elementa XV, An. 1645, in fol. dederat integro volumine comprehensos. Quintum, sextum & septimum, qui pro amissis habebantur, ex Arabico MSC. ABALPHATI *Aspahanensis* opera ABRAHAMÆ ECHELLENSIS *Maronitæ*, Linguarum Orientalium Professoris Romani, in vertendis usus, *Florentiæ* 1641, in fol. (4 Alph. 21 plag.), cum *libro Assumptorum* ARCHIMEDIS in lucem protraxit JOH. ALPHONSUS BORELLUS, in Academia Pisana Mathe-

scos Professor. Antequam vero iidem prodirent, VINCENTIUS VIVIANI, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, ex descriptione PAPPi librum quintum feliciter restituit, & sub titulo *Divinationis Geometricæ* in quintum Conicorum APOLLONII *Pergei* adhuc desideratum, *Florentia* 1659, in lucem emisit: quo successu felici permotus ex intervallo An. 1701, addidit *de locis solidis secundam divinationem Geometricam* in quinque libros injuria temporum amissos ARISTÆI senioris Geometriæ (*Florentia* in fol. 3 Alph. 15 plag.). Scripta VIVIANI usui esse possunt illis, qui methodo demonstrandi veterum in Geometria sublimiori delectantur. Præstantissimam operum APOLLONII editionem dedit Celeberrimus HALLEJUS *Oxonia* An. 1710, in fol. (5 Alph. 16 plag.). Accessere eidem SERENI Libri duo de *Sectione Cylindri & Coni*, qui primum Græce editi, & APOLLONII liber octavus ab HALLEJO restitutus.

§. 14. Inter recentiores doctrinam conicam illustrarunt varii. Commendari meretur opus de *Sectionibus Conicis* CLAUDII MYDORGII An. 1632, *Parisiis* in fol. publicatum, in quo & proprietates earundem demonstrantur, & descriptiones variæ docentur. Huic præferendus GREGORIUS A S. VINCENTIO, e Societate Jesu, qui in *Opere Geometrico Quadratura circuli & Sectionum Coni*, 20 Libris comprehenso ad inventa

recentiora viam stravit, ita ut LEIBNITIUS in *Actis Eruditorum* An. 1691, p. 438, fateatur, sibi in interiori Geometria hospiti, cum opus hoc GREGORII A S. VINCENTIO, una cum HUGENII libro de Horologio oscillatorio & DETTONVILLÆI (hoc est, PASCALII) Epistolis legeret, subito affulsisse lucem & sibi & aliis inexpectatam. Prodiit opus insignis *Antverpiæ* 1647, in fol. (14 Alph., & præter conica in eodem continentur variæ linearum inter se proportionales, triangulorum novæ proprietates, rectangulorum proportionales, progressionum Geometricarum etiam in infinitum progredientium miræ proprietates, multa de circulo alibi minus obvia, doctrina de ductu plani in planum, de proportionalitatibus Geometricis theoria nova, ungarum item, conoidum & sphæroidum doctrina. Absolutum quoque *Sectionum conicarum* opus debemus industriæ PHILIPPI DE LA HIRE (*Parisi*. An. 1685, in fol. 2 Alph. 18 plag.), in quo præter APOLLONIANA plurima alia methodo veterum demonstrantur: ex quo in gratiam tyronum compendium fecit JACOBUS MILNES impressum *Oxonii* An. 1702, in 8. (12 plag. & 19 Tab. Fig.) & recusum emendatius atque auctius ibidem 1712, in 8. (15 plag. Tabb. 19) sub titulo; *Elementa Sectionum Conicarum nova methodo demonstrata*.

§. 15. Ipse etiam celeberrimus DE LA HIRE in eorundem gratiam Ele-

Elementa Sectionum conicarum, *Parisii* An. 1679, in 12. in lucem emisit una cum constructione locorum geometricorum & æquationum, de qua in capite subsequente. Titulus opusculi: *Nouveaux Elémens des Sections Coniques, les lieux Géométriques, la construction des Equations.* (plag. 21.) Similis iisdem est Tractatus OZANAMI Gallicus de lineis primi generis, locis Geometricis & constructione æquationum (*Parisii* 1687, in 4. i Alph. 15 plag. Tab. an. 35). Nominandus hic quoque est Tractatus de Sectionibus cylindri & conii in solido & plano consideratis, cum demonstrationibus simplicibus ac novis, quem sermone Gallico *Parisii* An. 1704, in 8. edidit POIVRE (5 plag. & 8 Tabb. an.). De aliis Conicorum scriptoribus dicemus capite sequente.

§. 16. Commemoranda tamen de iisdem adhuc nonnulla sunt, quæ hic apprime locum merentur. Nimirum GUIDO GRANDUS, cum intelligeret, desiderari libellum Conicorum ad captum tyronum, cujus defectu doctrina conica in Scholis vulgo negligitur; eundem supplevit & methodo veterum conscripsit libellum mole parvum, sed rerum ubertate gravem, in quo præcipua de sectionibus conicis theoremata demonstrat. Prodiit *Florentiæ* An. 1722, in 12. (plag. 6½, Tabb. an. 7.), sub titulo: *Compendio delle sezioni coniche d'Apollonio.* Quoniam hoc compendium commendari meretur Matheseos Studiosis,

CHRISTIANUS AUGUSTUS HAUSEN, Matheseos Professor Lipsiensis, versionem huius opusculi Latinam in gratiam auditorum adornasse dicitur in Actis Eruditorum supplement. Tom. VIII, sect. X, hinc inde tamen quædam immutasse. Equidem VINCENTIUS SANTINI, Florentinus, simile Compendium dare conatus est *Luce* 1722, in 8, (plag. 6, Fig. 28) sub titulo: *Delle sezioni coniche dedotte nuovamente in Piano dal cerchio*, in quo nova ratione sectiones conicas in plano a circulo deducit; sed demonstrationes ejus laborare circulo vitioso jam annotarunt Collectores Actorum Eruditorum loc. cit. p. 432. NICOLAUS DE MARTINO, Regius Mathematicum Professor Neapoli, duobus Tomis *Elementa Sectionum conicarum* edidit *Neapoli* An. 1734, in 8. charta augusta (Tom. I, plag. 21½, Tabb. an. 8, Tom. II, plag. 22, Tabb. an. 8.). Conscripserat hæc Elementa ad usum FAUSTINÆ PIGNATELLI, Principis Culubranensis & Tolvensis Ducatus hæredis; postea in gratiam studiosæ juventutis publici juris fecit. Omissis propositionum, scholiorum & corollariorum titulis; continuo textu ad morem vulgarem extra Mathesin receptum cuncta demonstrat. Præter Sectionum conicarum proprietates, earum usum in construendis problematis solidis docet, præmissis iis, quæ cum in genere de constructionibus geometricis, tum problematum planorum sciri debent.

§. 17. Præ-

§. 17. Præter Conica apud veteres in Geometria sublimiori celebre fuit Problema Deliacum de duplicando cubo, seu, quod eodem recidit (§. 626, *Anal. fin.*), de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas: quem in finem excogitatae sunt variae lineæ curvæ a PAPPO *Alexandrino* in *Collectionibus Mathematicis* conservatae. Earum duo Libri priores hætenus desiderantur. Sex posteriores *Bononia* 1660, in fol. editi (Alph. 5, plag. 9, cum figuris textui insertis,) continent, inter alia solutiones varias problematis Deliaci, trisectionem anguli, isoperimetrorum doctrinam, sphaerica nonnulla, & quædam ad Mechanicam spectantia. Varia etiam scripta Geometrarum veterum in præfatione ad librum septimum recenset PAPPUS.

§. 18. Inter præcipua inventa Geometrica superioris seculi refertur methodus centrobaryca PAULI GULDINI, e Societate Jesu, de qua diximus in Mechanica & Statica (§. 164). Prodiit ejus liber primus *de centro gravitatis, una cum Tabulis numerorum quadratorum & cubicorum decies millium*, *Vienne Austria* 1635, in fol. (4 Alph. 21 plag.). Accessere libri secundus, tertius & quartus An. 1640, (4 Alph. 14 plag.). Libro primo adjuncta est dissertatio de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente.

§. 19. Curvarum doctrinam uni-

versaliter pertractavit & multis novis inventis auxit ISAACUS BARROWIUS supra laudatus in egregio opere *Lectionum Geometricarum*, *Londini* 1674, in 4. (plag. 21, Tabb. 13). Elementa curvarum in usum tyronum hætenus desiderantur, qualia tamen proficere consultum foret.

§. 20. Alia scripta particularia ad Geometriam theoreticam spectantia nimis longum foret hic recensere. Quædam tamen recensere lubet. Pertinet huc CHRISTIANI HUGENII liber *de circuli magnitudine*, *Hagæ Comitum* An. 1644, in 4. (plag. 5, cum figuris textui insertis) & ejusdem *Theorematum de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro*, *Lugduni Batavorum* An. 1651, in 4. (plag. 6½ cum figuris textui insertis.). Uterque Tractatus legitur Operum variorum Tomo secundo (§. 35, c. 1).

§. 21. Affinia his sunt LUDOLPHI A CEULEN, *Hildesheimensis*, *de Circulo & Adscriptis* liber, ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illustratus a WILLEBRORDO SNELLIUS (*Lugd. Batav.* 1619, in 4. plag. 8) & ejusdem *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* cum eorundem usu in variis problematis Geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irracionales & tabulas sinuum & Algebram solutis, a SNELLIUS itidem Latine versa, *Lugd. Bat.* 1615, in 4. (1 Alph. 16 plag.)

§. 22. LAURENTIUS LORENZINIUS, *Dis-*

Discipulus VINCENTII VIVIANI, edit Florentiæ An. 1721, in 4. (plag. 20, Tabb. æn. 14.) *Exercitationem Geometricam*, in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum, curvæ parabolicæ, curvæque superficiæ Conoidis parabolici. Solvit more veterum per demonstrationes problemata, quæ hodie per Algebram solvi solent. Unde ejus lectio commendanda iis, qui methodum veterum sibi familiarem reddere gestiunt. Cum viginti annos in vinculis duro fato detineretur, ab omni commercio cum hominibus literatis remotus, nullius libri usu concessio, methodum istam excoluit & duodecim libros de sectionibus conicis & cylindricis eorumque solidis conscripsit, ultra APOLLONII & VIVIANI inventa progressus. Ex carcere igitur tandem dimissus, ubi cognovisset, quæ nunc agerentur a Geometris, sublimiora quoque meditari cœpit, sed consuetæ sibi utens methodo. Sex itaque composuit Exercitationes, quarum prima est, quæ hic commemoratur: ceteræ enim, quantum constat, lucem publicam non adspexerunt.

§. 23. Comes de PAGAN, cujus non minus in Astronomia, quam Architectura militari celebre est nomen, decem edidit libros Theorematum Geometricorum sub titulo: *Les dix Livres des Théorèmes Géométriques du Comte de PAGAN*, Parisiis 1654, in 8. (1 Alph. 5 plag.), in quibus de lineis 4 proportionalibus, de se-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

ctionibus conicis, de theoria planetarum elliptica, de munitionibus regularibus & de navigatione agit. Prostant etiam ISMAELIS BULLIALDI de *Lineis spiralibus demonstrationes novæ* (Parisi. 1657, in 4. plag. 18.) & ejusdem *Exercitationes Geometricæ circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras, circa conicarum sectionum quasdam propositiones, & de porismatibus* (Parisi. 1657. in 4. plag. 6).

§. 24. STEPHANUS DE ANGELIS, Nobilis Venetus, Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, methodum CAVALERII excoluit, ejus usum insignem demonstraturus, cum non deessent, qui eandem impugnarent & contemnerent. Edidit Venetiis An. 1658, in 4. (Alph. 1, plag. 14, cum figuris textui insertis) *Problemata Geometrica Sexaginta circa Conos, sphaeras, superficies conicas sphaericasque præcipue versantia*; ibidem An. 1656, in 4. *Libros quatuor de infinitis parabolis infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum partiumque earundem genitis, una cum nonnullis ad prædictarum magnitudinum aliarumque centra gravitatis attinentibus* (Alph. 2, plag. 7.). Adidit An. 1663, librum quintum (plag. 14). Ibidem 1659, in 4. in lucem publicam emisit *Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum*, in quo præcipue agitur de centrâ gravitatis hyperbolæ, partium ejusdem, atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam Geometria locuta est. Parabola noviter quadratur dupliciter,

E ducun,

ducuntur infinitarum parabolarum tangentes, assignantur maxima inscriptibilia, minimaque circumscriptibilia infinitis parabolis, conoidibus ac semifusis parabolicis, aliaque geometrica nova exponuntur scitu digna (Alph. 1, plag. 11). An. 1660, ibidem prodiit ejus *Opusculum Geometricum de infinitorum spiraliū spatiorum mensura* (plag. 16) & tandem An. 1661, publici juris facti Tractatus de *infinitarum cochlearum mensuris ac centrīs gravitatis* (plag. 16), & Tractatus duo de *superficie Ungula & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidaliū* (Alph. 1, plag. 19). Atque adeo patet, quod suo tempore Geometriam sublimiorem multum promoverit, aliisque viam ad ulteriora monstraverit.

§. 25. FRANCISCUS A SCHOOTEN, Leydenſis, in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professor, *Exercitationum mathematicarum* libros quinque *Lugduni Batavorum* in 4. An. 1657, (Alph. 3) edidit, in quibus habentur varia tum ad Geometriam elementarem, tum sublimiorem spectantia, una cum tractatu de sectionum conicarum in plano descriptione, qui sigillatim prodiit (*Lugd. Batav.* 1646, in 4. plag. 17). Nimirum libro primo continetur propositionum arithmeticarum & geometricarum centuria, secundo constructio problematum simplicium geometricorum, tertio APOLLONII Pergæi loca plana reſtituta, quarto organica conicarum

sectionum in plano descriptio, & quinto sectiones miscellaneæ triginta. Colophonis loco adjicitur HUGENII Tractatus de *Ratiociniis in ludo alee*, qui inter opera varia Vol. 2, legitur (§. 35, C. 1.).

§. 26. JACOBI DE BILLY, e Societate Jesu, tractatus de *proportionibus harmonica*, An. 1658, editus, in quo varia problemata ejus ope solvuntur. ANTONII LALOVERÆ, e Societate Jesu, *Geometria veterum promota*, seu libri septem de Cycloide Tolosa 1660, prodire, quibus multa continentur ad Geometriam sublimiorem spectantia. Extat etiam FERDINANDI ERNESTI Comitiss ab HERBERSTEIN *Diatome Circularum seu specimen Geometricum*, quo Lunularum, Curvilinearum aliorumque spatiorum propositiones demonstrat (*Prage* 1710, in 8. 1 Alph. Tab. 1): VINCENTII VIVIANI *Exercitatio mathematica de formatione & mensura fornicum* (*Florentie* 1692, in 4. plag. 6): JOH. BAPTISTÆ PALMÆ in *Geometriam Exercitationes* (*Neapoli* 1689, in 4. plag. 16) 100 propositiones, quæ ad Geometriam elementarem pertinent, continentes.

§. 27. ANGELUS DE MARCHETTIS, in Pisana Universitate scientiarum mechanicarum Professor, *Pistoria* An. 1695, in 4. (plag. 14) sermone patrio edidit Tractatum de natura rationis & proportionis nova, facili & securo methodo explicata. Titulus libelli est: *La Natura della proporzione & della proporzionalità*. In

ed aliam viam ingressus est, quam EUCLIDES, aliam quoque, quam alii recentiores ab EUCLIDE recedentes calcarunt. Cum intellexisset, eundem probari STEPHANO DE ANGELIS, DOMINICO GULIELMINO, FRANCISCO SPOLETI, *Collectoribus Actorum Eruditorum* in Actis An. 1696, p. 244, 245, in Latinam linguam ipsum transtulit: Qua data occasione cetera quoque EUCLIDIS Elementa tam plana quam solida in breviorum & meliorem formam redigere voluit. Unde enatum est opus Elementorum planorum & solidorum Geometriæ, quod sub titulo: EUCLIDES *Reformatus* prodit & quod supra laudavimus (§. 7).

§. 28. Ad libros analyticos veterum, quorum memoriam conservavit PAPPUS in præfatione ad librum septimum Collectionum mathematicarum referendi sunt APOLLONII *Pergei de sectione rationis* Libri duo ex arabico latine versi, & de *sectione spatii* Libri duo restituti ab EDMUNDO HALLEY ac editi *Oxonii* 1706, in 8. (1 Alph. 3 plag.).

§. 29. Ad Geometriam quoque spectat *Sphæricorum* doctrina, quæ circulorum in superficie Sphære descriptorum & sese mutuo interfecantium proprietates explicat. Eam olim tribus libris comprehendit THEODOSIUS, quos Tomo primo Cursus Mathematici exhibet DECHALES, ut supra monuimus (§. 4). Eisdem nova methodo illustravit & succincte demonstravit ISAACUS BARROWIUS atque

Londini 1675, in 4. (plag. 6, Tab. æn. 3) edidit, sub junctos operibus ARCHIMEDIS & APOLLONII. Aliqua hujus doctrinæ etiam attingit PAPPUS libro septimo collectionum mathematicarum, ubi addit, quæ in THEODOSIO desiderantur scitu necessaria.

§. 30. *Geometriam practicam* omnium absolutissimam, sed sine demonstrationibus dedit MALLETTUS, quatuor Tomis idiomate Gallico conscriptis comprehensam (*Parisi*. 1702, in 8. reg. Tom. I, plag. 23, Tom. II, plag. 26, Tom. III, plag. 24, Tom. IV, plag. 18). In Geodæsia declaratur usus semicirculi, quadrati Geometrici, circini proportionum, Astrolabii, pixidis magneticæ, baculi Jacobi & mensuræ geometricæ. Singula folia Figuris elegantibus, sed ad rem parum facientibus exornantur.

§. 31. Germanico idiomate Geometriam practicam conscripsit DANIEL SCHWENTERUS, Professor olim Mathematicum Altorfinus, cum notis JOHANNIS BOECKLERI, *Norimbergæ* 1667, in 4. (4 Alph. 18 plag.) recusam. Praxis in charta cum demonstrationibus docetur: in campo solus baculorum & mensuræ geometricæ usus ostenditur, sterometria desideratur. Unde instar supplementi esse potest JOHANNIS HARTMANNI BEYERI, Med. D. Stereometria, quam sub titulo: *Eine neue und schöne Art der vollkommenen Visir-Kunst*, *Franc. ad Mæn.* 1603, in 4. (1 Alph. 7 plag.) edidit. Autor imprimis Stereo-

metriam doliorum plenius explicat, quam ab aliis factum. Cum tamen doliorum non plenorum stereometriam non attigisset; An. 1619, addidit Conometriam Mauritianam vernaculo itidem sermone conscriptam. (*Franc.* in 4. plag. 11), in qua stereometria doliorum tam plenorum, quam non plenorum traditur. Ceterum idem Autor de virgula pithometrica conficienda ibidem 1620, plagulam unam adjecit.

§. 32. Ante SCHWENTERUM in usum agrimenforum BERNHARDUS CANTZLERUS edidit tractatum geodæticum sub titulo: *Kurtzer und leichter Bericht vom Feldmessen*, quem ABDIAS TREW Mathes. Prof. Altorfius multis annotationibus auxit, ita ut sub titulo: *Summa Geometriae practica* An. 1673, *Norimbergæ* in 8. (plag. 33, Tab. æn. 55) edi meruerit.

§. 33. Nomen Autoris commendat scholam agrimenforum, quam PHIL. DE LA HIRE sub titulo: *l'Ecole des Arpenteurs*, *Paris*. Anno 1689, in 8. edidit. Prodiit tertia vice *Paris*. An. 1728, in 12. reg. (plag. 16). Explicantur in hoc libello operationes arithmeticae & trigonometricae cum principiis Geometriae, quibus agrimensores habent opus. Deinde exponuntur praxes Geodatarum & subjicitur descriptio artis libellandi. Nec minus laudem merentur CLAVII (§. 24), TACQUETI (§. 28), OZANAMI Geometriae practicae (§. 7), hujusque *Méthode facile pour arpenter*,

ou mesurer toutes sortes de superficies & pour toiser exactement la Maçonnerie, les vuidanges des Terres & tous les autres corps, dont on peut avoir besoin dans la pratique. Prodiit denuo *Paris* An. 1725, in 12. reg. (plag. 12). Explicantur etiam in hoc libello operationes Arithmeticae & Trigonometricae ac principia Geometriae agrimensores scitu necessaria. Eundem cum PHILIPPO DE LA HIRE scopum sibi praefixit HENRICUS WILSON in libro Anglico, quem sub Titulo: *Surveying improved*, *Londini* 1726, in 8. reg. (Alph. 1, Tabb. æn. 11) edidit, in suo genere satis consummatum. Solet vulgo institutionibus Architecturae militaris praemitti Geometria practica.

§. 34. ADRIANUS METIUS 1725, in 4. edidit *Arithmetica* libros duos & *Geometria* libros sex. Qui multo auctiores 1650, *Lugduni Batavorum* in 4. recusit (Alph. 3). Geometria non nisi practica est, perinde ac Arithmetica, ut adeo hic recenseri mereatur. Tractatur in hisce libris etiam Trigonometria plana, usus circini & regulae proportionalis, Architectura militaris, problemata Astronomica, & sciaterica Horologia, ita ut in hoc opere reperias, quae titulus non promittere videtur, nec in libris, quae eundem habent, vulgo quaeri solent. Nullas tamen addit demonstrationes. Aliter JOANNES DUSER, Tigurinus, in *Geometria Theorica & practica* patrio idiomate *Tiguri* 1627, in 4. publi-

publicata theoriam cum praxi conjungit, & hanc ex illa deducit. Multa docet, quæ istiusmodi autores non tangunt: de stereometria tamen nihil habet.

§. 35. A. SHARPE, Anglus, idiomate patrio edidit *Geometriam promotam* 1^o. per tabulam amplam & accuratam segmentorum circularum, & 2^o. per Tractatum concisum de Polyhedris *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 17, Tabb. æn. 4). Tractatus primus sine controversia ad Geometriam practicam spectat, cum computandis segmentis circularum destinetur, qui calculus ad Geometriam practicam pertinet ac multiplicem in variis problematis huc spectantibus habet usum. Tractatus alter ad stereometriam refertur, cumque Autor in eodem constructionem & dimensionem quinque corporum regularium ac præterea duodecim novorum a Geometris hætenus non expensorum polyhedrorum tradat; hic quoque Tractatus Geometriæ practicæ quædam pars est.

§. 36. BATTY LANGLEY *Londini* 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. æn. 40), Geometriam practicam ad Architecturam civilem, & hortensem, Geodæsiam, & Stereometriam applicatam edidit sermone patrio. Titulus libri est: *Practical Geometry applied to the useful Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration*. Sed hic liber potius jure inter Architectonicos locum meretur, quam inter eos, qui de

Geometria conscripti sunt, quemadmodum suo loco monēbimus.

§. 37. Pithometriam promovere aggressus est JOANNES MATTHIAS HASIUS, Mathematicum Professor in Academia Wittebergenſi, in *Pithometria Theoria & Praxi nova*, *Witteberga* 1728, in 4. (plag. 10, Tabb. æn. 2): ubi etiam Algebræ in hoc argumento usum declarat.

§. 38. ERASMUS REINHOLDUS in Geodæſia ſua, quæ ſub Titulo: *Gründlicher Bericht vom Feldmessen*, *Franc.* 1615, in 4. (1 Alph. 17 plag.) recuſa, Geometriam quoque ſubterraneam explicat: de qua opus peculiare conſcripſit NICOLAUS VOIGTEL, decimarum e Mansfeldenſibus metallifodinis Receptor, *Iſlebie* An. 1688, in fol. (plag. 32, Tab. 9) excuſum & itidem An. 1713, auſtius (2 Alph. 10 plag. Tab. æn. 10) recuſum, unicuſque ſane in hoc genere, donec An. 1710, LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS *Francofurti* An. 1710, in 8. Tractatus quatuor idiomate Germanico ederet, inter quos quartus eſt *Geometria ſubterranea Compendium*, primus vero de *deſcriptione corporum regularium*, ſecundus de *Circino proportionum*, tertius de *Trigonometria plana* (plag. 6, Tab. æn.), & An. 1727. JOANNES FRIDERICUS WEIDLERUS, Profeſſor Mathematicum Wittebergenſis, *Inſtitutiones Geometria ſubterranea* latinas daret *Witteberga* in 4. (plag. 10, Tab. 1).

§. 39. Circinum proportionis a

JUSTO BYRGIO multo ante inventum descripsit LEVINUS HULSIUS Tractatū tertio instrumentorum mechanicorum vernaculo idiomate *Francos. ad Mœnum* An. 1603, edito (plag. 4). Postea An. 1607, GALILÆUS, alienum inventum sibi attribuens, de eodem librum Italicum sub titulo: *Le Operationi del compasso Geometrico e militari* publicavit. Omnium maxime commendari in hoc genere meretur NICOLAI GOLDMANNI de *Circino proportionis Tractatus* (*Lugd. Batav.* 1679, Latine & Germanice in fol. (1 Alph. Tabb. 16) editus, ex quo sua descripsit MICHAEL SCHEFFELT in tractatu Germanico *Unter-richt von dem Proportional-Circul*, *Ulme* 1697, in 4. (plag. 18, Tab. 12). Prostat quoque Tractatus Gallicus Cl. OZANAMI de *usu circini proportionum* (*Parisiis* 1688, in 8). Recentius ejus constructionem & usum in peculiari Tractatu, qui multa singularia continet, exposuit SAMUEL CUNE. Eum post mortem Autoris EDMUNDUS STONE sub Titulo: *A new Treatise of construction and use of the Sector*, *Londini* An. 1729, in 8. (plag. 15,

Tab. æn. 2, & Fig. multis ligno incisis) publici juris fecit.

§. 40. Ad scripta de Geometria practica referendum quoque est CASPARIS SCHOTTI *Pantometrum Kircherianum*, hoc est, instrumentum Geometricum novum ab ATHANASIO KIRCHERO inventum, decem libris universam pæne practica Geometriam complectentibus explicatum perspicuisque demonstrationibus illustratum. Prodiit *Herbipoli* 1660, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. æn. 32). Liber primus technicus fabricam instrumenti, secundus euthymetricus linearum rectarum dimensiones, tertius enbadometricus dimensionem superficierum, quartus stereometricus dimensiones solidorum, sextus coelometricus dimensiones concavorum, septimus geodæticus divisiones superficierum, octavus metamorphoticus planorum corporumque transformationem, nonus hydragogicus libellationem aquarum totamque libellationis naturam, decimus tandem varius problematum variorum solutionem docet, quæ ope circini proportionum alias solvi solent.

C A P U T I V.

De Scriptis Analyticis.

§. 1. **S**cripta veterum analytica recenset PAPPUS in præfatione

ad librum septimum *Collectionis mathematicæ*. Sunt nempe *Datorum Euclidis*

CLIDIS liber unus (§. 1. C. 1.) APOLLONII de *Sectione Rationis* libri duo ab HALLEIO editi, & de *Sectione spatii* libri duo ab eodem restituti (§. 28. c. 3), APOLLONII de *Factionibus* libri duo, de *Inclinationibus* duo, de *locis planis* duo, *Conicorum* octo, EUCLIDIS *Porismatum* tres, & de *locis ad superficiem* duo, ARISTÆI de *locis solidis* quinque, ERATOSTHENIS de *mediis proportionalibus* duo: quorum aliqui extant (§. 13, Cap. 3), aliqui desiderantur, sed a recentioribus Geometris restituti, (§. 1, Cap. 1, & §. 13, Cap. 3). Sed Analysis veterum ab Analysis recentiorum longe fuit diversa.

§. 2. Ad analysin recentiorum potissimum spectat Algebra, de qua olim exempla tredecim libris comprehensa dedit DIOPHANTUS. Hodie nonnisi 6 prostant, a XYLANDRO latine versi, & An. 1575, in fol. primum editi, postea cum Commentariis CASPARIS BACHETI, An. 1621, recusi. Illustrat autem DIOPHANTUS artem solvendi problemata arithmetica indeterminata. Gallica eorum versio extat inter Opera STEVINI (§. 23, c. 1).

§. 3. Antequam DIOPHANTUS in publicum prostackt, LUCAS PACIOLUS seu (ut vulgo vocatur) LUCAS DE BURGO S. SEPULCHRI in *Summa Arithmeticae & Geometriae* supra laudata (§. 6, cap. 2,) Libris 8 Algebram explicat, prout eam acceperat ab Arabibus. Nimirum ultra

æquationes simplices & quadraticas non progreditur. Nec longius progressi CHRISTOPHORUS RUDOLPHUS Jaroviensis Silesius, qui primus de Algebra seu Cossâ, prout tunc dicebatur, in lingua Germanica scripsit & cujus librum additis regularum demonstrationibus & exemplis pluribus recudi fecit MICHAEL STIFELIUS *Regiomonti* An. 1553, in 4. (Alph. 5, plag. 11). Titulus libri: *Die Coss CHRISTOFFS RUDOLFFS, mit schönen Exempeln der Coss durch MICHAEL STIFEL gebessert und sehr gemehrt*. STIFELIUS, qui hoc Magistro profecit, in *Arithmetica integra* (§. 7, cap. 2), HENISCHII in *Arithmetica perfecta* (§. 10, cap. cit.) alique. Non ineleganter RUDOLPHUS, cumque secutus STIFELIUS, æquationes algebraicas ex progressionibus geometricis derivant. Sed SCIPIO FERREUS addidit regulas resolvendi æquationes cubicâs, a CARDANO in *Arte Magna*, quam vulgo Cossam seu Regulam Algebrae vocant, An. 1545, primum publicatas: Cl. LUDOVICUS FERRARIENSIS ostendit methodum reducendi æquationes biquadraticas, quam An. 1579 Algebrae suæ inseruit RAPHAEL BOMBELLI. Ulteriores progressus Algebra stricte sic dicta nondum vidit.

§. 4. Circa annum Christi 1590, FRANCISCUS VIETA Gallus Arithmetica litteralem invenit, & ad Algebram applicavit, quam & methodo ingeniosa extrahendi radices ex æquationi-

tionibus quibuscunque per approximationem locupletavit. (§. 25, cap. 1). Ejus inventa explicat, iisdemque utitur GUILIELMUS OUGHTRED, Anglus, in *Clave Mathematica*, An. 1631, primum, sed An. 1693, Oxonii quinta vice edita (plag. 12). Regulas ad exempla applicat & usum Arithmeticae literalis in Geometria elementari ostendit, quem in inveniendis theorematibus & resolvendis problematis habet. Extractionem quoque radicum per approximationem ex æquationibus exemplo VIETÆ docet.

§. 5. THOMAS HARRIOT, item Anglus, qui *Londini* An. 1621 obiit, in *Artis Analytica Praxi* ad æquationes algebraicas nova, expedita & generali methodo resolvendas, a WALTHERO WARNERO An. 1631, in fol. *Londini* (2 Alph. 2 plag.) edita, Arithmetica *Vietaam* ad commodiorem formam reduxit, eam nempe, qua nunc utimur, & æquationum indolem ac reductionem plenius explicavit.

§. 6. Anno 1637, CARTESIUS *Geometriam*, quam vocat, idiomate gallico publicavit, quam postea Latine vertit & prolixis Commentariis auxit FRANCIS. A SCHOOTEN. Utor ego editione *Amstelodamensi* An. 1659, in 4. (5 Alph. 8 plag.). Continentur in eadem præter CARTESII *Geometriam* (plag. 12), FLORIMUNDI DE BEAUNE Notæ breves & FRANCISCI A SCHOOTEN Commentarii in eandem; JOH. HUDDENII *epistola de re-*

ductione æquationum, ejusdem *epistola de maximis & minimis*: ERASMI BARTHOLINI *Principia Matheseos universalis* seu *introductio ad Geometria methodum* CARTESII; FLORIMUNDI DE BEAUNE tractatus posthumi *de natura & constitutione atque de limitibus æquationum*; JOH. DE WITT libri duo *de Elementis Curvarum*, & FRANC. A SCHOOTEN tractatus *de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. CARTESIUS Arithmetica litteralem & regulas Algebrae descripsit ex HARRIOTO, & quemadmodum OUGHTREDUS in *Clave*, atque MARINUS GHETALDUS in Libris 5, *de Resolutione & Compositione mathematica* (*Roma* 1630, in fol. 2 Alph. 15 plag.) Arithmetica *Vietaam* ad Geometriam elementarem applicarunt & constructiones æquationum simplicium ac quadraticarum dederunt, ita ipse, *Harrioteam* ad Geometriam sublimiorem transfrens, curvarum naturam per æquationes algebraicas explicare coepit & constructionem cubicarum atque bi-quadraticarum æquationum, immo etiam superiorum, docuit. Opus hoc inprimis utile ad Algebra speciosam addiscendam.

§. 7. CARTESIUS non tyronibus, sed Geometris peritis scripsit, nimis concisa brevitate, ut adeo Commentario maxime opus sit. Quamvis vero de ejus Geometria egregie meritis sit FRANCISCUS A SCHOOTEN, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ

quæ modo diximus (§. 6); nondum tamen ea dedit, quæ in Commentario consummato quærentur, sed ipse potius Commentatore haud raro opus habet. Dedit tandem istiusmodi Commentarium, qualis desiderari poterat CLAUDIUS RABUEL, e Societate Jesu, qui post fata ejus *Lugduni Gallorum* sub titulo: *Commentaires sur la Geometrie de Mr. Descartes* An. 1730, in 4. reg. prodiit (Alph. 3, plag. 6, Tabb. æn. 23.) Textum CARTESII, quem presso pede sequitur, ita explanat, atque ita regulis, exemplis, & problematis illustrat, ut nihil occurrat, quod ex Commentario non plene intelligatur. Commentarius hic in linguam Latinam transferri & in nova editione Geometriæ CARTESII Commentatoribus aliis adjungi mereretur: sit ita quod solus sufficiat menti tanti Geometriæ penitus intelligendæ.

§. 8. Regulam CARTESII construendi æquationes cubicas & biquadraticas uberius exposuit THOMAS BAKER in *Clave geometrica catholica* (Londini 1684, in 4. (1 Alph. 10 plag. 10 Tab. æn.): ast verum harum Constructionum fundamentum, quod a MENECHMO didicit CARTESIUS, minime affecutus. Hoc monstravit RENATUS SLUSIUS Tomo secundo *Mesolabi* An. 1668, in 4. (plag. 24) *Leodii* excusi cum variis Miscellaneis, in quibus Algebra ad quadraturas Curvarum, ad quæstiones de maximis & minimis, ad methodum invenien-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

di punctum flexus contrarii, ad methodum centrobarycam GULDINI &c. applicatur. Cartesiana inventa etiam promoverunt, quemadmodum SLUSIUS in *Miscellaneis*, FERMATIUS in *Operibus mathematicis* (Tolose 1679, in fol.), ROBERVALLIUS (§. 31, 39, Cap. 1), & BARROWIUS (§. 19, Cap. 3).

§. 9. JOHANNES KERSEY, An. 1671, Londini in fol. edidit *Elementa Algebra*, idiomate Anglico (Alph. 10, plag. 10). In iis explicatur arithmetica litteralis & æquationum naturalis, præceptaque exemplis plurimis illustrantur, totus DIOPHANTUS enucleatur, & resolutione & compositione mathematica ex GETHALDO multa exhibentur. Idem fere institutum apud Gallos fuit JOH. PRESTET, cujus *Nova Matheseos elementa* Tomo integro secundo auctiora, Parisiis An. 1694, in 4. (6 Alph. 3 plag.) gallice prodierunt. In iis omnia dogmata arithmetica una cum problematibus DIOPHANTI atque VIETÆ per analysin recentiore resolvuntur.

§. 10. Similiter OZANAM in *Elementis Gallicis Algebra* (Amstelodami An. 1703, in 8. reg. 1 Alph. 21 plag.) præter calculum litteralem & æquationum doctrinam, artem quoque Diophanteam resolvendi problemata numerica egregie illustrat, in qua imprimis excellit hic Autor. Quanti autem fieri debeat analysis *Diophantea*, vulgo a *Cartesianis* neglecta, docuit illustris LEIBNITIUS in *Actis Eru-*

dito-

ditorum, An. 1702, pag. 219. Etsi autem Algebra OZANAMI legi mereatur ab iis, qui in Analyfi *Diophantea* sese exercere voluerint; tyronibus tamen Algebrae ejus lectio commendanda non est, propterea quod nimis diffusa regularum explicatione nulla regularum applicatione, ad exempla facta, nimis diu detinet lectorem in parte prima; facitque studii hujus in ipso limine desertores; ut taceam ipsum inventorum recentiorum minime gnarum multa brevius tradere potuisse, ita ut & facilius intelligerentur, & sine tædio. Peccat etiam proluxa præceptorum explicatione PRESTETUS: Unde Compendium ejus dedit BERNHARDUS LAMY, quod sub titulo: *Elémens de Mathématique*, (Parisi. An. 1704, in 12. reg. (1 Alph. 7 plag.) auctius recusum tyronibus ob perspicuitatem commendari meretur. Artificia tamen analyticos *Diophantea* non attingit.

§. 11. Hi tamen autores applicationem Algebrae ad Geometriam insuper habent: quem defectum suppleant OZANAM in Tractatu Gallico *de locis Geometricis* (plag. 8, Tab. 12.) & altero *de constructione equationum* (plag. 12, Tab. 9) Tractatui de lineis primi generis (§. 15, cap. 3) subjuncto; DE LA HIRE in gemino Tractatu ejusdem nominis & argumenti (§. cit. cap. 3) & inprimis GUISNEE in *Applicatione Algebrae ad Geometriam* gallice Parisiis An. 1704,

in 4. (1 Alph. 19 plag. Tab. æn. 6) edita & ad captum tyronum composita exemplisque selectis instructa, atque Illustris Marchio DE L'HOSPITAL in egregio Tractatu Analytico *de Sectionibus Conicis & earum usu*, Parisi. 1707, in 4. reg. 2 Alph. 12½ plag. Tab. 32, Gall.) Applicatio Algebrae ad Geometriam sublimiorem ex HOSPITALIANO opere omnium optime addiscere licet iis, qui jam in Geometria & Algebra cum fructu versati & acumine pollent. Ceteris magis satisfaciet GUISNEE, quo lecto faciliores facient in illo progressus.

§. 12. Algebrae quoque præcepta, sed sine exemplis, perspicue explicat GERARD KINCKHUYSEN in *Algebra*, sermone Batavo, *Harlemi* An. 1661, in 4. edita, (plag. 14) & idem in *Fundamento Geometriæ* (*Grondt der Meetkonst*), *Harlemi* An. 1684, in 4. plag. 12) Sectionum conicarum palmarias proprietates per analysin eruit; in *Geometria* vero (*Harlemi* An. 1663, in 4. plag. 22) constructiones Geometricas problematum per Algebram solutorum elegantes affert. Singula quoque ABRAHAMUS DE GRAAF in *Algebra* sua (§. 7, cap. 1) cum laude exequitur. Unde Dn. DE TSCHIRNHAUSEN ad studium Algebrae plurimum commendavit hosce autores. Celeberrimus NEWTONUS in *Arithmetica universali*, quam GUIL. WHISTON *Cantabrigia* An. 1707, in 8. (1 Alph.) edidit, exempla habet singularia & regulas varias a se inventas.

tas. Recusa sunt hæc Elementa *Londini* An. 1722, in 8. (plag. 22). In nova editione ordo problematum paulisper immutatus, WHISTONI præfatio & methodus *Hallejana* extrahendi radices ex æquationibus per approximationem omiffa. Prodiere etiam in *Batavia*, ut nunc facilius haberi possint. Utilem tyronibus operam sumeret, qui eadem Commentario illustraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile assequi licet etiam exercitationibus. Desunt etiam constructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur solutiones per calculum. Monuit jam GRAVESANDIUS istiusmodi Commentario esse opus & ejus aliquod specimen de inventionem divisorum dedit in *Elementis Matheseos universalis*, *Lugduni Batavorum* An. 1727, in 8. editis (plag. 16, Tabb. æn. 4), quæ Algebræ principia continent.

§. 13. JOSEPHUS RAPHSO in *Analyfi æquationum universali*, quæ (si titulo credimus) secunda vice *Londini* An. 1702, in 4. prodiit una cum Conamine metaphyfico de Spatio reali seu ente infinito (plag. 20.) extractiones radicum ex æquationibus per approximationem facilitavit: ROLLIUS in Tractatu gallico *de Algebra* (*Parisi*. 1690, in 4. plag. 12) subsidia non contemnenda ad radicum extractionem suppeditat, sed more suo terminis insuetis utitur, & haud raro nodum in scirpo quærit.

Tractatum quoque Gallicum *de Algebra* conscripsit DE CROUZAS, quem *Parisiis* An. 1726, in 8. reg. sub titulo: *Traité de l'Algebre*, edidit (1 Alph. 8 plag.). In eo nonnisi Arithmeticam literalem & regulam Algebram propriissime sic dictam explicat, quemadmodum faciunt PRESSETUS & OZANAMUS, nimium prolixus in vulgaribus, ita ut longo tempore multa patientia addiscenda sint, quorum usum prospicere non licet. Desunt artificia recentiora, quibus calculus præsertim surdorum & extractio radicum mirifice fuit promota. Nec ars exercetur problematis, contra illud SENECAE: Iter longum per præcepta, breve per exempla.

§. 14. Exemplo PASCALII in *Triangulo Arithmetico*, *Parisiis* Anno 1654, Gallice edito, HUGENII in *Tractatu de Ludo alee*, qui sub finem Exercitationum Geometricarum SCHOOTENII (§. 25) & Operum variorum Vol. 2 (§. 35) legitur, aliorumque, REMUNDUS DE MONMORT in *Tentamine Gallico Analyseos de ludis eventus fortuiti*, *Parisiis* An. 1708, in 4. reg. (1 Alph. 14 plag.) excuso & ibidem 1714, auctius (2 Alph. 11 plag.) recuso ad Sortem in ludis diversis determinandam analysin applicavit: qui combinationum doctrinam egregie illustrat & insignia artificia analytica edocet. In altera editione leguntur literæ JOANNIS & NICOLAI BERNOULLIORUM de

hoc argumento ad Autorem data. Idem præstitit JACOBUS BERNOULLI in Opere posthumo. *Artis Conjectandi* (Basil. 1713, in 4. Alph. 1, plag. 20, Tab. 1). Accessit huic operi Tractatus de seriebus infinitis, mox commendandus. Inprimis autem hoc in argumento commendari meretur ABRAHAMI DE MOIVRE opus pereruditum & multa nova continens, quod sub titulo: *The doctrine of chances, or a Method of calculating probability of Events in play*, Londini 1718, in 4. reg. (Alph. 1) *.

§. 15. ÆGIDIUS FRANCISCUS DE GOTTIGNES, e Societate Jesu, in *Logistica universali* (Neap. An. 1687, in fol. 5 Alph. 14 plag. Tab. 5) principia Algebrae labefactare aggressus est; sed nodum in scirpo quærit & per ambages eo tendit, quo recta pertingere datur. Condonandum hoc videbatur ea ætate, qua Algebrae speciosæ infantia erat: sed si nostra reperiantur, qui in dubitationem adducere volunt, quæ dudum stabilita ipsoque diuturno usu probata fuerunt, vix ferendum. Nostrum igitur non esse existimamus de iis scriptis loqui, quæ hic recenseri poterant.

§. 16. HUGO DE OMERIQUE in *Analyfi Geometrica* (Gadibus Anno 1698, in 4.) methodo communi algebraica, quæ per æquationes procedit, aliud substituit per rationes argumentandi genus: quod tamen

non adeo late patet, quam illa. Applicat illud ad problemata, per Algebrae ab aliis jam soluta & parum difficultatis habentia. Non tamen usu suo caret, cum ad demonstrationes syntheticas manu ducat. Monet PEMBERTON in præfatione ad *Conspectum Philosophiæ Newtonianæ*, NEWTONUM laudasse in hoc autore, quod Analysis veterum restituere conatus fuerit.

§. 17. Methodum CAVALLERII ad calculum aptare studuit JOHANNES WALLISIUS in *Arithmetica infinitorum* An. 1655, primum edita (§. 34, cap. 1) in qua, per summationes serierum infinitarum, quadraturas curvarum & cubationes solidorum determinare aggressus est: Sed cum inductione uteretur, quæ minus demonstrativa videri poterat, ISM. BULLIALDUS per maximas ambages more veterum Geometrarum hoc Arithmeticæ genus demonstravit in Opere novo *Arithmetica infinitorum* Libris 6, comprehendente. (Parisi. An. 1682, in fol. 4 Alph. 16 plag.). Hodie tamen paucis lineis plura præstare licet, quam quæ integro opere BULLIALDI comprehenduntur.

§. 18. Veram viam ingressus non est WALLISIUS, felicius id præstitit Illustris LEIBNITIUS invento calculo differentiali & integrali, quem primum in Actis Eruditorum Anno 1684, pag. 467, publicavit, cum dudum ante An. 1677, eundem in litteris cum celeberrimo NEWTONO com-

* Atque iterum auctius, ibidem An. 1738, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 11).

communicasset, qui in egregias methodos circa idem tempus inciderat: quemadmodum apparet ex litteris LEIBNITII atque NEWTONI, quæ leguntur apud WALLISIUM Operum Tomo tertio, fol. 634, 648. Cum enim NEWTONUS in literis d. 24 Octobr. 1676, scriberet: *Inversa de Tangentibus problemata sunt in potestate atque illis difficiliora: ad quæ solvenda usus sum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est in presentia litteris transpositis consignare: saccdaioeffh &c.* Literæ in ordinem suum dispositæ hunc habent sensum: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commodè derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad inveniendos terminos assumptæ Seriei:* mox LEIBNITIUS ipsum Calculum suum differentialem in literis d. 21 Jun. 1677, apertis verbis perscripsit. Ingenue hoc ipsum fatetur NEWTONUS in prima & secunda editione Principiorum Philosophiæ naturalis Mathematicorum Schol. Lemmat. 2, Lib. 2, pag. 253, 254. In ultima vero ingenuam confessionem, quæ viros summos maxime decet, omisit. Ratio patebit inferius. LEIBNITIUS calculum suum publici juris fecit in Actis Eruditorum An. 1684, pag. 467, & NEWTONUS methodum suam in prima

editione Principiorum modo laudatorum, quæ An. 1687, prodiit. Postea JACOBI ac imprimis JOANNIS BERNOULLI opera, calculus LEIBNITII ad majorem perfectionem perductus.

§. 19. Calculi differentialis leges exposuit & problematibus exquisitis illustravit illustris Marchio DE L'HOSPITAL, Præceptore usus JOANNE BERNOULLI, in egregio Opere Gallico *Analyseos infinite parvorum* (Paris. 1696, in 4. reg. 1, Alph. 2, plag. Tab. 11), omnibus Geometriæ sublimioris Studiosis maximopere commendando. Subinde tamen Commentatore opus habet, ut a tyronibus Geometriæ sublimioris intelligatur. Equidem DE CROUZAS *Commentarium* edidit, qui idiomate Gallico Parisiis An. 1721, in 4. (2 Alph. 1½ plag. 4 Tab.) ; sed plerumque nonnisi calculos, quos Autor contraxit, extendit, in difficilioribus vero lectorem destituit. Unde magis satisfaciet VARIGNONIUS in suis dilucidationibus, quæ sub titulo: *Eclaircissemens sur l'Analyse des infiniment petits*, post fata ipsius Parisiis An. 1725, in 4, (plag. 16, Tabb. 6) prodierunt. Opus egregium HOSPITALII Anglice vertit & altera parte de calculo integrali auxit E. STONE, ac sub titulo: *A Method of fluxions both direct and inverse*, Londini 1730, in 8. reg. (1 Alph. 6 plag. Tabb. 15) edidit.

§. 20. Equidem HOSPITALIUS addere constituerat partem alteram de calculo integrali; sed cum LEIB-

NITIUS Scientiam infiniti dare sibi proposuisset, a proposito suo destitit. Enimvero præter specimina in Actis Eruditorum An. 1702, & An. 1703, nihil ejus publice comparuit. Interea calculi integralis faciliores regulas dare & exemplis illustrare consultum existimabat CARRE', cujus scriptum gallicum: *Méthode pour la mesure des surfaces, la dimension des solides, leurs centres de pesanteur, de percussion & d'oscillation par l'application du calcul integral* prodiit Paris. An. 1700, in 4. reg. (plag. 15, Tabb. 4). Sed longius progressus GABRIEL MANFREDIUS in Opere eximio *de constructione equationum differentialium primi gradus* (Bononia An. 1707, in 4. 1 Alph. 2 plag. Tabb. 7) & vir summus NEWTONUS in Tractatu *de quadraturis Curvarum*, qui Opticæ subjungitur, præclara dedit. Plura quoque in parte altera dedit STONE de hoc calculo, quam quæ in Methodo Dn. CARRE' leguntur.

§. 21. Postquam NICOLAUS MERCATOR, Holsatus, in *Logarithmotechnia* (Lond. 1668, in 4. cum MICHAELIS ANGELI RICCI *Exercitatione Geometrica* edita) prop. 17, pag. 31, seqq. quadraturam hyperbolæ per seriem infinitam dedisset; serierum doctrinam per extractionem radicum insigniter promovit & ad curvarum quadraturas & rectificationes applicavit vir summus ISAACUS NEWTONUS: cujus *Analyfin per quantitatum series, fluxiones ac diffe-*

rentias, cum Enumeratione linearum tertii ordinis, varios tractatus analyticos a Viro celeberrimo diu ante compositos continentem, Londini 1711, in 4. (plag. 16, Tabb. 2) edidit GUIL. JONES. Quemadmodum vero hoc opus ad serierum doctrinam perdiscendam multum commendari mereatur; ita recondita de hoc argumento superaddi debent ex celeberrimi JAC. BERNOULLI dissertationibus *de seriebus infinitis* (§. 14).

§. 22. Serierum doctrinam ex inventis MERCATORIS, NEWTONI, LEIBNITII atque JOHANNIS BERNOULLI exhibuit quoque GEORGIUS CHEYNÆUS in *Methodo Fluxionum inversa* (Londini 1703, in 4. reg. plag. 6). Multo vero ante methodum serierum MERCATORIS & NEWTONI multis exemplis illustravit DAVID GREGORIUS in *Exercitatione Geometrica de dimensione figurarum*, Edinburgi An. 1684, in 4. edita (plag. 7, Tabb. 1). Horum exempla complura computata sunt a patruo ipsius JACOBO GREGORIO, quemadmodum ipse fatetur pag. 2, 3, & 4. De Geometria enim sublimiore optime meritis JACOBUS GREGORIUS, quemadmodum ex ejus Libro *de vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura*, cum *Geometria parte universali*, quantitatum curvarum transmutationi inserviente colligitur. Prodiit Patavia 1668, in 4. Tractatus de Quadratura constans plag. 8, Appendix de Geometriæ parte universali plag. 19. Ceterum

terum hinc perspicere licet, quid ab eo expectandum fuisset, nisi fata propositum ejus intervertissent.

§. 23. JOAN. CRAIGE, Scotus, 1685, *Londini* in 4. (plag. 6, Tab. I) edidit Tractatum *de Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi*, & An. 1693. addidit Tractatum *de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis*, *Londini* in 4. (plag. 11, Tab. I) excusum. Utitur equidem calculo differentiali LEIBNITII, cum in Anglia calculus fluxionum adhuc ignoraretur, nec editis An. 1687, Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis NEWTONI, ullus Geometra de eodem cogitaret; per ambages tamen adhuc incedit, quod calculus integralis seu summatorius nondum ipsi esset perspectus. In quadrandis igitur curvis utitur Theorematis BARROWIANIS, quibus opus non habemus, si calculi differentialis vis fuerit perspecta, cujus pars quædam est summatorius seu integralis, qui dicitur. Inde est, quod etiam GREGORIUS alia via incedat, etsi seriebus infinitis utatur. De Locis Geometricis formulas generales tradit CRAIGIUS, quas HOSPITALIUS in opere analytico de sectionibus conicis (§. 10) uberius explicavit & illustravit, & nos in Elementis Algebrae dilucidatas ad facillimam intelligentiam reduximus, via ad ulteriora planissima strata. Enimvero ubi calculus integralis, quem Angli me-

thodum fluxionum inversam vocant, in Anglia quoque invaluisse; idem CRAIGIUS *Londini* An. 1718, in 4. (plag. 12½). Libros duos *de Calculo fluentium* & totidem *de Optica analytica* edidit, quorum istis doctrinam de Quadraturis Curvarum promovet.

§. 24. Quæ apud HOSPITALIUM in Analyfi infinite parvorum, CARRESIUM, sive Quadratum, CHEYNÆUM, GREGORIUM & CRAIGIUM in Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi & in Tractatu de Quadraturis figurarum Curvilinearum occurrunt; ea in unum volumen congestit & perspicue explicavit, varia etiam problemata, quorum solutiones in Actis Eruditorum Lipsiensibus extant, inprimis quæ in iisdem LEIBNITIIUS de motuum coelestium causis physicis dedit, illustravit CAROLUS HAYES in opere Anglico, quod sub titulo: *Traité de Fluxions, or introduction to mathematical and mechanical Philosophy*, *Londini* An. 1704. in fol. (3 Alph. 3 plag.) prodiit.

§. 25. Regulas Algebrae communis atque Analyseos LEIBNITIANÆ, hoc est, calculi differentialis & summatorii, uno opere complexus est CAROLUS REYNAU, quod sub titulo: *Analyse démontrée*, *Paris*. 1708, in 4. reg. (Alph. 5, plag. 7, Tabb. æn. 5): sed in exemplis parcius videri poterat, quam ut tyrõnibus inservire possit, provecioribus tamen commendandus. Neque etiam ea præstitisse videri.

videtur, quæ titulus promittit, cum eas demonstrationes in hoc Opere non reperiatis, quæ forsan in eodem quæſiveris, demonstrationis notionem distinctam animo complexus.

§. 26. Calculus fluxionum, qui cum differentiali & summatorio idem est, in Anglia primum comparuit, cum ISAACUS NEWTONUS Opticam suam ederet An. 1704, de qua suo loco dicemus. Addidit enim præter *Enumerationem Linearum tertii Ordinis seu curvarum secundi generis Tractatum de Quadratura curvarum*, in quo hanc doctrinam plurimum promovit, & calculum hunc explicat eademque utitur. Ex intervallo GUILIELMUS JONES *Londini* An. 1711, in 4. plag. 16, Tab. 2, edidit NEWTONI *Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum Enumeratione linearum tertii ordinis*, ex quo apparet, quid NEWTONUS in Geometria sublimiori per analysin promota præstiterit, & quantum serierum doctrinam promoverit. Cum vero in tractatu de Enumeratione linearum tertii ordinis demonstrationes desiderarentur; hunc defectum supplevit JACOBUS STIRLING in Illustratione Tractatus D. NEWTONI *de Enumeratione linearum tertii Ordinis*, quæ *Oxonia* An. 1717, in 8. (plag. 9½) lucem adspexit & multa præclara continet.

§. 27. Haud ita pridem, nimi-

rum An. 1736, JOHANNES COLSON Methodum fluxionum & infinitarum serierum NEWTONI in sermonem Anglicum translata[m] edidit *Londini* in 4. sub titulo: *The Method of fluxions and infinite series, With its application to the Geometry of curve-lines.* (Alph. 2) *. Tractatus hic idem est, quem publico An. 1728, in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtonianæ* promiserat PEMBERTON. Egregio Commentario librum hunc illustravit Editor, qui maximam operis partem complet & multa offert, quæ Analyseos cultores alibi frustra quærunt. Ipse NEWTONUS docet, quomodo æquationes in series infinitas resolvantur, quomodo fluentium fluxiones seu quantitatum variabilium differentialia & ex fluxionibus fluentes seu differentialium summæ inveniuntur, & per methodum fluxionum maxima & minima, tangentes, quadraturæ & rectificationes curvarum determinantur. Ubi simul ostenditur, quomodo curvæ quadrabiles detegantur, curvæ cum sectionibus conicis comparabiles investigentur, curvæ rectificabiles inveniantur & quæ sunt alia hujus generis.

§. 28. Anno 1730, JACOBUS STIRLING *Londini* in 4. charta augusta (Alph. 1, plag. 15) edidit *Methodum differentialem* sive Tractatum de Summatione & interpolatione serierum infinitarum. In eo potissimum docet,

* Eundem NEWTONI Tractatum Gallice versum dedit nuperrime Celeb. DE BUFFON. *Paris* in 4. (Alph. 1) cum eleganti Præfatione.

docet, quibus artificiis assequamur valores illarum serierum, quæ summari nequeunt, ut habeatur solutio illorum problematum, quæ ex quadraturis pendunt. Non modo inventa aliorum exponit, verum etiam propriis hanc doctrinam plurimum promovit, ut adeo opus insigne sublimioris Matheseos studiosis summopere sit commendandum.

§. 29. Commendanda hic quoque sunt ABRAHAMI DE MOIVRE *Miscellanea analytica de seriis & quadraturis*, quæ eodem Anno Londini in 4. reg. (Alph. 1, plag. 9) prodire. Accessere variae considerationes de Methodis comparationum, combinationum & differentiarum, solutiones difficiliorum aliquot problematum ad sortem spectantium, itemque constructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum, quæ in motibus corporum coelestium occurrunt. Multa in hisce Miscellaneis occurrunt, quibus non modo serierum doctrina, verum etiam mensura fortis & alia ad Mathesin sublimiorem spectantia capita promoventur.

§. 30. Quæ NEWTONUS in Tractatu de Quadraturis curvarum dederat, alia methodo investigare docuit ROGERUS COTESIUS, Professor Astronomiæ & Experimentalis Philosophiæ apud Cantabrigienses, in *Harmonia Mensurarum, sive Analyti & Synthesi per rationum & angulorum mensuras promota*, quam cum aliis ejusdem *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. V.

* Dr. HENRICUS PEMBERTON.

opusculis mathematicis ejus successor ROBERTUS SMITH *Cantabrigie* An. 1722, in 4. (plag. 50, Tab. I) post mortem ejus præmaturam edidit. Potissimum ipsi propositam est dare *Logometriam*, quam vocat, qua scilicet per Logarithmos, sinus, atque tangentibus investigantur, quæ hætenus ad Quadraturam circuli & hyperbolæ fuerunt reducta, differentialium summatione ad mensuras rationum & angulorum reducta. In operibus miscellaneis *Æstimatio errorum in mixta Mathesi* per variationes partium Trianguli plani & sphaerici, qualia theoremata dedimus in Trigonometria plana, Tractatus de *Methodo differentiali Newtoniana*, quem multo ante ab eo conscriptum dicit Autor, quam a JONESIO, NEWTONI de eodem argumento Tractatus in Analyti superius commendata (§. 2) ederetur, *Canonotechnia* sive constructio Tabularum per differentias, & Tractatus de *Descensu gravium, de motu pendulorum in Cycloide & de Motu projectorum*. Quomodo inventa *Cotesiana* ex *Newtonianis* deducantur, docet Anonymus * in *Epistola ad Amicum de COTESII inventis*, Londini, eodem adhuc Anno in 4. edita (plag. 13).

§. 31. LEIBNITIUS calculum differentialem & summatorium primum exercuerat in quantitativis finitis, veluti in summandis potentiis numerorum, & deinde lecto opere *Hugemiano* de horologia oscillatorio & ope-

G

re

re CONICO GREGORII A S. VINCEN-
TIO ad quantitates infinite parvas
applicavit, atque sic via vere analy-
tica in calculum differentialem & sum-
matorium seu integralem incidit,
quali hodie in Geometria sublimiori
utimur. In Anglia eundem calculum,
seu methodum fluxionum stylo Angli-
cano, ad quantitates finitas applicavit
BROOK TAYLOR in *Methodo incre-
mentorum directa & inversa*, quæ
Londini 1715, in 4. (plag. 15½) pro-
diit. De obscuritate, qua in scriben-
do usus Autor, publice conquestus
est. JOANNES BERNOULLI, ut
adeo mirari desinant lectores in
sublimioribus, nondum satis versa-
ti, siquidem hinc inde hæsitent.
Continentur tamen in hoc opere lectu
digna.

§. 32. Integram Mathesin puram,
una cum Algebra & calculo differen-
tiali, succincte explicavit WILHELMUS
JONES in *Synopsi palmariorum
Matheseos*, Anglice An. 1706, Lon-
dini in 8. (plag. 20) edita; sed sine
interprete a tyronibus vix intellige-
tur, qui tamen hoc duce commode
utuntur in repetendis iis, quæ ex aliis
Autoribus didicere. In iis, quæ ad
Algebram communem spectant, cum
hac Synopsi convenit Tractatus *de
Algebra* itidem Anglice scriptus &
Londini 1717, in 8. reg. editus (plag.
15) a RONAYNIO: recentior enim
analysis in eo desideratur, & metho-
dus Tangentium atque de maximis

& minimis per methodum exhaustio-
num illustratur.

§. 33. Equidem BERNHARDUS
NIEUWENTYT in *Considerationibus
circa Analyseos ad quantitates infinite
parvas applicata principia & calculi
differentialis usum in resolvendis pro-
blematis Geometricis* (Amstel. 1694,
in 8. plag. 3.) & in *Considerationibus
secundis circa calculi differentialis prin-
cipia* (Amstel. An. 1696, in 8. plag.
3.) contra calculum differentialem
nonnulla dubia movit, & hinc in
Analyfi Infinitorum (Amstelod. A. 1695,
in 8. plag. 20, Tab. 21) methodum
aliam substituit; sed non modo LEIB-
NITIUS atque BERNOULLIUS in
Actis Eruditorum An. 1695, p. 310,
& seqq. it. p. 369, & seqq. & An.
1697, p. 125 & seqq., verum etiam
etiam Cl. JACOBUS HERMANNUS,
nunc * Mathematicum Professor Fran-
cofurtanus, in *Responsione ad illas
considerationes secundas*, Basilea, Anno
1700, in 8. (plag. 4) iisdem abunde
satisfecerunt; quamvis memini, quod
hic LEIBNITIO non ex asse satis-
fecerit, quod quantitates infinite par-
vas tanquam entia realia consideret,
cum tamen non sint nisi modus lo-
quendi, qui exhibet, stylo *Jungiano*,
toleranter vera, quemadmodum cla-
rissime docui in Ontologia, in qua
realia ab imaginariis ubivis discrevi,
Analyfi tamen infinitorum *Nieu-
wentytiana* in rem suam uti norunt
intelligentes. BERNHARDUS DE FON-

TENELLE,

* Anno scil. 1715, quo primum hæc Commentatio edita est. Vide infra, Cap. VI. §. 17.

TENELLE, Academiæ Regiæ Scientiarum, quæ Parisiis floret, Secretarius, idiomate patrio An. 1727, *Parisiis* in 4. reg. (Alph. 3, plag. 3, Tab. I) edidit Elementa Geometriæ infinitorum (*Elémens de la Géométrie des infinis*), in quo potissimum sibi propositum habet, ut calculos hodie receptos ex ipsa notione infiniti deducat. Considerat vero, quemadmodum omnibus fere Mathematicis solenne est, infinite magnum & infinite parvum Mathematicorum per modum entis realis. Satisfacere intendit theoria sua iis, quibus Analysis infinitorum moderna suspecta videtur, ut adeo hic loci commemorari debuerit hoc opus.

§. 34. In Actis Philosophicis Anglicanis pro mensibus Septembri & Octobri Anno 1708, editis scripserat JOHANNES KEILL, inventorem Arithmeticæ fluxionum, sine omni dubio primum esse NEWTONUM, eandem tamen postea, mutatis nomine & notationis modo, editam esse a LEIBNITIO in Actis Eruditorum. LEIBNITIVS, cui hæc Acta miserat Cl. SLOANE, tum Societatis Regalis Secretarius, in literis d. 4 Martii An. 1711 datis, de injuria sibi illata conquestus desiderabat, ut KEILLIVS publice testaretur, non fuisse sibi animum LEIBNITIO imputandi, quasi alienum inventum sibi attribuerit. Enimvero KEILLIVS in epistola ad eundem SLOANUM data, quæ primum scripserat defendit &

ostendere conatur, quomodo ex *Newtonianis* sua deduxerit. Cum candorem suum jam apertius, quam ante oppugnari existimaret LEIBNITIVS, sibi que parum convenire arbitraretur, ut provectioni ætate post tot documenta vitæ cum apologia defenderet; in literis ad SLOANUM d. 29 Decembris An. 1711 datis, æquitati Societatis committebat, annon coërcendæ sint vanæ & injustæ vociferationes, quas ipsi NEWTONO improbari putabat confusus eundem sententiæ suæ libenter daturum indicia. Jussit Societas monumenta antiquiora consuli & Sociis aliquot in mandatis dedit, ut in eam rem inquirerent & quæ in scriptis antiquis invenirent ad eam, una cum sententia sua, referrent. Hi pronunciarunt, NEWTONUM esse primum inventorem, nec KEILLIVM inventum eidem vindicantem injuriam fecisse LEIBNITIO. Jussu adeo Societatis Regiæ in lucem editum est *Londini* 1712, in 4. (plag. 15½) *Commercium Epistolicum* D. JOHANNIS COLLINS & aliorum de *Analysi* promota, & per Europam inter Mathematicos distributum. Continentur in eo excerpta ex literis, quorum autographa conservat illustris Societas Regalis, una cum Epistolis NEWTONI atque LEIBNITII, quæ jam apud WALISIUM Tomo tertio Operum leguntur, Tractatus de *Analysi* per æquationes numero terminorum infinitas a JONESIO editus (§. 26), episto-

LEIBNITII ad HANS SLOANE & KEILLII responsiones ad easdem, de quibus modo diximus, & Relatio ac sententia Commissariorum, quam modo retulimus.

§. 35. LEIBNITIUS tunc temporis Viennæ in Austria degebat, nec commercium epistolicum ibidem videre ipsi contingebat. Cum igitur ex ipso per litteras quærerem, num idem in Actis Eruditorum recenseri & quædam ad ipsum reponi consultum iudicaret; consultius ipsi videbatur, ut charta quadam volante, suppresso loci ac Autoris nomine, publico significaretur, ipsum esse Viennæ nec commercium epistolicum vidisse, atque ex litteris JOANNIS BERNOULLI excerptum publicaretur, quo rationes continebantur, cur inventum calculi differentialis ipsi dubium reddi minime possit. Inde ansam arripiebat KEILLIUS, cum in Transactionibus Anglicanis, tum in Diario literario quod Hagæ Comitum prodibat, paulo durius de LEIBNITIO atque BERNOULLIO scribendi. Quamobrem cum LEIBNITIO limites modestiæ transgredi videretur, a se impetrare non potuit, ut ipse responderet. Scripsit tamen sententiam suam ad amicos, ad quas ejus litteras NEWTONUS quoque respondit, tumque apparuit, quæ a KEILLIO dicta fuerant, consentiente & approbante NEWTONO prolata fuisse. Epistolas hasce LEIBNITII atque NEWTONI idiomate Anglico

cum excerptis nonnullis aliis *Historiæ fluxionum* suæ latine conscriptæ adjecit JOSEPHUS RAPHSON, in qua originem & progressum hujus methodi brevissimo compendio exhibere intendit. Prodiit *Londini* 1715, in 4. (pag. 16). Quid sibi proposuerit Autor, ipse in præfatione monet, scilicet inventiones præcipuas in hoc genere primis suis autoribus speciatim asserere & vindicare, & inprimis D. NEWTONO inventori longe & tempore primo, & præstantia inventionum præcellentissimo, & aditum patefacere tyronibus ad hæc facilius, & explicatius, adeoque ut cuivis introductionis loco ad *Newtoniana*, *Cheyneana* aliorumque inventa & congesta in hoc genere inserviret. Si quis historiam Analyseos infinitesimalis conscribere vellet, ut origo & progressus pateret, ac unicuique quod suum est tribueretur; illi multo majore studio ac solertia inquirendum esset in ea, quæ a tempore CAVALLERII usque ad præsens a Geometris fuere edita, & accurate determinandum, quantum unusquisque ex inventis alterius sibi notis vel proficere potuerit, vel actu profecerit: ubi certa a probabilibus exacte distinguenda. Sed alibi in Logica de historia scientiarum & artium mentem nostram aperuimus & uberius explicavimus.

§. 36. Controversia hæc de inventore calculi differentialis postea magna animorum contentione agita-

ta, præsertim inter KEILLEIUM & JOANNEM BERNOULLIUM, de qua imprimis legi possunt Acta Eruditorum Lipsiensia. Nostrum jam non est eam definire, cum discussioni hic non sit locus, sine qua definiri nequit, nec hoc nobis sumimus. Neque opus est ex Actis laudatis huc transcribere, quæ ibidem legi possunt. Nos veneramur merita NEWTONI, veneramur merita LEIBNITII, BERNOULLII, aliorumque; æquum existimamus, ut suum cuique tribuatur, & gloria, quæ dat vires præclara agendi, excitentur magna ingenia; in aliorum merita extollenda proni sumus: principiis tamen Philosophiæ moralis adversum judicamus de laude altercari, nec ulla nos autoritas movebit, ut altercationibus istiusmodi calculum adjiciamus.

§. 37. Antequam igitur recensio- ni præsentī Autorum colophonem imponamus, monemus curvarum descriptionem plurimum promovisse COLINUM MAC LAURIN, Mathematicos in collegio novo Abredonensi Professore, & GULIELMUM BRAIKENRIDGE, Ecclesiæ Anglicanæ Presbyterum. Edidit ille Londini An. 1720, in 4. (plag. 19, Tabb. 12) *Geometriam organicam, sive Descriptionem Linearum curvarum universalem*. Docet in eadem, quomodo lineæ secundi, tertii, quarti tandemque ordinis cujuscunque describantur, & ubi ostendit, quomodo lineæ omnium ordinum altiorum ope linea-

rum ordinis cujuscunque inferioris describantur, simul descriptionem Curvarum organicam *Newtonianam* demonstrat. Plurima hic reperies ad Geometriam sublimiorem spectantia. Alter horum autorum, Londini 1733, in 4. in publicam lucem emisit *Exercitationem Geometricam de Descriptione Linearum Curvarum* (plag. 10). Tradit primum descriptionem curvarum primi generis, seu linearum secundi ordinis, deinde vero descriptionem Linearum cujuscunque ordinis ope Linearum ordinis inferioris & denique descriptionem sectionum conicarum ope plurium rectarum circa polos moventium. Diverſa tamen sunt ejus theoremata ab illis, quæ tradit prior, & plura hisce etiam majora promittit in una aut altera exercitatione post paucos menses edenda: Nobis tamen huc usque, præter eam quam hic commemoramus, nullam videre licuit. Utiles sunt descriptiones curvarum generales ad Theoriam Curvarum condendam, qualem adhuc desiderari supra (§. 19, c. 3) monuimus. Quid enim tribuendum sit definitionibus geneticis, vel ex *Synopsi Geometrica* HONORATI FABRY, e Societate Jesu, intelligitur, quæ Lugduni Gallorum in gratiam tyronum edita An. 1669, in 12. (Alph. 1. cum figuris multis in folio excusis), & cui accessere tria opuscula, nimirum de *Linea Sinuum & Cycloide*, de *maximis & minimis centuria & Synopsi Trigonometriae*

plana. Absit tamen, ut cum Autoribus Anglis, quorum Tractatus hic commendavimus, æquipares BARTHOLOMÆI INTIERI, Florentini, *ad nova arcana Geometrica detegenda aditum*, qui Beneventi 1703, in 4. (plag. 13, Tabb. 2) & APOLLONIUM ac SERENUM Prometum, qui Neapoli 1704, in 4. (plag. 9, Tab. 1) lucem adspexit, ubi sectionum conicarum graduum superiorum genesin tradit. A tyronibus tamen ea legi non inconsultum est, antequam ad sublimiora Anglorum inventa pedem promoveant.

§. 38. Cœterum multa ad calculum differentialem & integralem spectantia peti debent ex Actis Eruditorum, ex Historia & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis Parisiis prodeunt & Amstelodami recuduntur, ex Transactionibus Anglicanis, ex Miscellaneis Berolinensibus, & Commentariis Petropolitanis, de quibus singulis supra diximus (§. 36, & seqq. cap. 1). Inter Algebraistas inprimis quoque nominari debebant JOHAN. FAULHABERUS ex textore Mathematicus insignis, cum quo per aliquod tempus egit CARTESIUS, cum Algebra vacaret, & JUSTUS BYRGIUS WILHELMI Hassiæ Landgravii Mechanicus, sed illius scripta perpauca, hujus nulla videre hætenus licuit.

§. 39. Coronidis loco adhuc observamus, in gratiam tyronum idiomate Anglico Institutiones fluxionum edidisse HUMPHREDUM DITTON,

in quibus præcepta calculi explicat & exemplis quibusdam selectis illustrat, cum istiusmodi libellus adhuc desideraretur. Post obitum Autoris novam editionem dedit JOHANNES CLARKE, Regi a sacris ordinariis, quæ sub titulo: *An Institution of fluxions*, Londini An. 1726, in 8. reg. (plag. 16) prodiit. In eorundem usum L. TREVIGAR *Sectionum conicarum Elementa* methodo facillima demonstrata edidit Cantabrigiæ An. 1731, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 1, Tabb. æn. 12). In compendium misit Tractatum analyticum de sectionibus conicis HOSPITALII, in quo methodus genetica cum analytica conjungitur, ut in Geometria & Algebra vel mediocriter versatus præcipuas sectionum conicarum proprietates addiscere possit. Addidit nonnulla, quæ in HOSPITALIO desiderantur, sed ad Principia Philosophiæ naturalis mathematica intelligenda requiruntur. In Italia vero FRANCISCUS XAVIERIUS BRUNETTI, Sacratio Pontificis Maximi CLEMENTIS XII Præfectus, sub titulo: *Dell Arithmetica commune e speciosa Trattato*, seu Tractatus de Arithmetica communi & speciosa, Romæ A. 1731, in 4. (Alph. 1, plag. 11, Tab. 2) Introductionem edidit ad scripta arithmetica & analytica intelligenda, in quo præter Arithmeticam, Algebram quoque & Analysis infinitesimalem recentiore perspicue explicat, ut adeo plura in hoc opere reperiantur, quam titulus promittit.

C A P U T V.

De Trigonometria.

§. I. **T**rigonometria in gratiam
Astronomiæ primum in-
venta : unde PTOLEMÆUS sub ini-
tium operis sui Astronomici tantum
hujus doctrinæ exponit, quantum sco-
po suo sufficere visum est, & recentio-
res Astronomi passim institutionibus
Astronomicis Trigonometriæ præcep-
ta præmiserunt.

§. 2. Magis hanc scientiam excoluit JOHANNES DE REGIO MONTE in Libris quinque de *Triangulis omnimodis*, An. 1464, conscriptis, & *Norimbergæ*, mortuo Autore, a SCHONERO An. 1533, in fol. (2 Alph. 11 plag.) editis. Idem quoque Canonem Sinuum novum condidit assumpto radio pro unitate, eoque in fractiones decimales diviso, cum ante idem in 60 scrupula divideretur. Immo ipse primum radium sumebat 60 & non nisi in fractiones decimales subdividebat: sed cum animadverteret præstare in calculo, si sinus totus sit 1, canonem suum reformavit, aut novum potius condidit. Canon Sinuum ad radium 60000 constructus subjungitur ejusdem Tabulis Directionum Professionumque, de quibus in Astronomia dicemus. Eum in plerisque sequitur CLAVIUS (§. 24, c. 1).

§. 3. *Canonem Sinuum* ad radium
 1000000000000000000 & ad dena
 quæque scrupula secunda Quadrantis
 supputavit JOACHIMUS RHETICUS,
 quem, mortuo Autore, una cum Sini-
 bus primi & postremi gradus ad eun-
 dem radium & ad singula secunda
 scrupula Quadrantis edidit BARTHO-
 LOMÆUS PITISCUS *Francof. ad Mæ-*
num 1613, in fol. (3 Alph. 21 plag.),
 qui adjecit principia Sinuum ad ra-
 dium 100000000000000000000
 supputata & sinus decimorum,
 tricesimorum & quinquagesimo-
 rum quorumque scrupulorum se-
 cundorum per prima & postre-
 ma 35 scrupula prima ad radium
 100000000000000000000. Hu-
 jus Canonis usus imprimis est in cor-
 rigendis Tabulis Sinuum atque Tan-
 gentium vulgaribus.

§. 4. Multum nimirum Trigonometriae perficiendae incubuit RHETICUS, Mathematicum Professor Wittebergenſis, ſed qui relicta Profeſſione ad COPERNICUM profeſtus & apud eum egit: quemadmodum ex *Opere Palatino de Triangulis* apparet, quod ab ipſo coeptum conſummavit L. VALENTINUS OTHO, Principis Palatini Friderici IV Electoris

Mathc:-

Mathematicus. Prodiit An. 1616, in fol. (21 Alph. 17 plag.). Continentur in eo 1. RHETICI libri tres de fabrica Canonis doctrinæ triangulorum, & 2. ejusdem liber quartus de triangulis globi: 3. OTHONIS libri quinque de triangulis globi sine angulo recto: 4. prolixus Canon triangulorum.

§. 5. PITISCUS vero & ipse *Trigonometriam* egregie illustravit editis quinque de eadem libris An. 1599, quorum editio tertia auctior prodiit *Francos.* An. 1612, in 4. (2 Alph. 15 plag.). Libris istis subjicitur Canon Sinuum, tangentium & secantium una cum libris undecim, in quibus trigonometriæ usus in solutione problematum Geodæticorum, altimetricorum, architectonicorum, geographi-
corum, gnomonicorum & astronomicorum ostenditur, quæ a nobis suis in locis per eandem soluta.

§. 6. Non minus commendari merentur WILLEBRORDI SNELLII *doctrina Triangulorum Canonica* libri quatuor, quibus Canonis sinuum, tangentium & secantium constructio, triangulorum tam planorum, quam sphaericorum expedita dimensio breviter ac perspicue traditur, una cum Canone Secantium. Post mortem Autoris eos edidit MARTINUS HORTENSIVS, Delfensis (*Lugd. Bat.* 1627, in 8. plag. 29) & tractatus problematum geodæticorum & sphaericorum adjecit, quibus utriusque Trigonometriæ usus edocetur.

§. 7. An. 1591, PHILIPPUS LANSBERGIUS edidit *Geometriam Triangulorum*, quæ Anno 1663, *Mid-delburgi in Seelandia* in fol. (plag. 11) auctius recusa & primum inter operâ ejus locum tenet (§. 26, c. 1). In eo Trigonometriam tam planam, quam sphaericam, & constructionem sinuum atque tangentium perspicue explicat, quemadmodum jam fecerat GEORGIUS PURBACHIUS, Præceptor REGIOMONTANI, Professor Matheseos in Academia Viennensi, qui in promovendo Matheseos studio plurimum operæ collocavit, & de cujus meritis plura dicemus in Astronomia.

§. 8. Insignis ad Trigonometriam accessio facta est, Logarithmis a JOHANNNE NEPERO, Barone Merchistonii Scoto, in eandem introductis. Prodiit *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio ejusque usus in utraque Trigonometria & omni Logistica mathematica explicatio*, *Edinburgi* 1614, in 4. (plag. 21) & opera filii, parente mortuo, recusum est opus auctius An. 1619. Accessere nempe tractatus aliqui de logarithmorum constructione posthumi. In eodem opere continetur regula generalis facilius solvendi triangulorum sphaericorum rectangulorum casus omnes, cui similem nos quoque dedimus in Elementis nostris. Caterum logarithmi isti ab iis, quibus nunc utimur, sunt diversi: supposuit enim NEPERUS in prima eorundem con-
structione-

structione logarithmum Sinus totius seu radii o, ut multiplicationem & divisionem in Trigonometria plerumque prorsus evitaret, nec additionem vel subtractionem substituere opus haberet.

§. 9. Canonem NEPERI ad singula minuta prima quadrantis constructum ad dena secunda extendit BENJAMIN URSINUS, Mathematicus Electoralis Brandenburgicus, & cum Canonis tam naturalis, quam artificialis constructionem, tum Trigonometriam utramque & quidem sphericam juxta NEPERUM explicavit in *Trigonometria*, Colonia An. 1625, in 4. edita (constat liber 1 Alph. 12 plag. & Canon 2 Alph. 11 plag.). Multa continet lectu digna, præsertim quoad constructionem Canonis & praxin Trigonometriæ sphericæ.

§. 10. Postquam KEPLERUS hoc logarithmorum genus a JUSTO BYRGIO supra laudato (§. 38, C. 4) inventum, sed illo reprehendente in Rudolphinis f. 11, in privatos tantum usus reservatum, ad Astronomiam transtulerat; ipsius gener JACOBUS BARTSCHIIUS Canonem URSINI reduxit, resectis tribus ultimis cyphris, & particulam antilogarithmorum exactiorum ad singula bina secunda, Tabulamque logarithmorum indicis prostaphæreseos supputavit atque Heptacosiamdem *Keplerianam* ad singula scrupula secunda dilatavit. Has tabulas, sub socii KEPLERI auctoritate, *Sagani* edidit An. 1630, sed ob *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. V.

earum usum in calculo *Rudolphino* insignem sub titulo: JOH. KEPLERI & JACOBI BARTSCHII *Tabule Manuales Logarithmicæ* An. 1700, *Argentorati* in 8. (1 Alph. 17 plag.) recudi fecit JOHANN. CASPAR EISENSCHMID, Med. D.

§. 11. Ex consilio NEPERI logarithmorum formam immutavit HENRICUS BRIGGIUS, Professor Geometriæ Oxoniensis, ita ut logarithmus unitatis fieret o, quemadmodum nos exposuimus in *Elementis Arithmeticæ* cap. 8. Construxit Canonem Logarithmorum numerorum vulgarium ab 1 usque ad 20000 & a 90000 usque ad 100000, quem in *Arithmetica Logarithmica* una cum methodo inveniendi logarithmos & usu eorundem exhibuit An. 1624, in fol. Sed mox *Gouda* An. 1628, in fol. (9 Alph. 7 plag.) eandem recudi fecit ADRIANUS VLACQ, Goudanus, qui logarithmos Briggianos 4 numeris minuit, lacunam inter 20000 & 90000 explevit, ut 100 logarithmorum chiliades exhibuerit, Canonem triangulorum seu Tabulam sinuum & tangentium artificialium ad radium 100000000000 & ad singula scrupula prima quadrantis adjecit, in descriptione vero *Briggiana* quædam hic illic immutavit, quædam omisit, quædam adjunxit. Idem postea An. 1633, Canonem sinuum atque tangentium artificialium extendit ad singula dena secunda & sub titulo *Trigonometriæ artificialis seu Magni*
H. Cano:

Canonis triangulorum Logarithmici, *Goudæ* in fol. (5 Alph. 3 plag.), adjectis Chiliadibus viginti Logarithmorum pro numeris naturali serie crescentibus H. BRIGGII, edidit.

§. 12. Inchoaverat idem BRIGGIUS Canonem sinuum & tangentium artificialem pro gradibus graduumque centesimis; sed morte præpeditus non absolvit. Quæ adeo deficiebant, supplevit HENRICUS GELLIBRAND & An. 1633, sub nomine *Trigonometria Britannica* publicavit. Prodiit *Goudæ* in fol. (3 Alph. 7 plag.)

§. 13. Sub eodem *Trigonometria Britannica* nomine, sed Anglico idiomate opus trigonometricum præclarum edidit JOHANNES NEWTON, *Londini* 1658, in fol. (5 Alph. 19 plag.), in quo continentur 1. constructio & usus Canonis sinuum & tangentium naturalis atque artificialis, 2. solutio triangulorum, tam planorum, quam sphæricorum, 3. chiliades centum logarithmorum pro numeris vulgaribus, 4. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad singulos gradus & partes graduum centesimas, 5. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad tres primos Quadrantis gradus & partes graduum millesimas.

§. 14. Fundamentum Logarithmorum breviter quidem, attamen perspicue exposuit STIFELIUS in *Arithmetica integra* (§. 7. C. 1.) Lib. 3, f. 249, b & seqq. monens posse

hic ferè novum librum integrum scribi de mirabilibus numerorum, sed oportere, ut se hic subducatur & clausis oculis abeat. Utilitatem fractionum decimalium ad exprimendos numeros prope veros, qui in calculo excludant errorem quantumlibet exiguum, adeoque contemnendum, dudum ante monstravit REGIOMONTANUS. Hisce igitur luminibus usi sunt BYRGIUS atque NEPERUS in Logarithmis computandis. Recentiores vero alias invenere methodos, de quibus in Algebra agitur. Illa tamen, qua usi sunt Canonis conditores, ad captum tyronum composita, adeoque a nobis in Arithmetica retenta.

§. 15. An. 1643, *Bononia* in 4. (1 Alph. 1 plag.) BONAVENTURÆ CAVALLERII *Trigonometria plana & spherica, linearis & logarithmica*, cum canone duplici Trigonometrico & chiliade numerorum absolutorum ab 1 usque ad 10000, eorumque logarithmis ac differentiis, opus Autore suo dignum, prodiit. Eodem usus est GEMINIANUS RONDELLI, Mathem. Professor Bononiensis, qui An. 1705, *Bononia* in 4. (2 Alph. 12 plag.) *Trigonometriam universalem linearem & logarithmicam*, Italico idiomate edidit, cum Canone sinuum, tangentium & secantium, atque logarithmorum sinuum & tangentium & decem chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 16. SETHI WARDI *Idea Tri-*
gono-

gonometria demonstrata, quæ cum Prælectione de Cometis & Inquisitione in BULLIALDI *Astronomia Philolaica fundamentum*, Oxonii An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, est admodum concisa & characteribus expressa. Ejusdem vero indolis est *Trigonometria* WILHELMI OUGHTREDI, quæ cum Canone sinuum, tangentium & secantium *Londini* 1657, in 4. lucem adspexit (1 Alph. 13 plag.). In eundem quoque censum veniunt JOANNIS WILSON *Principia Trigonometria succincte demonstrata*, quæ *Lugduni Batavorum* An. 1718, in 8. (plag. 5, Tab. 2) prodire.

§. 17. RICHARDUS NORWOOD in *Trigonometria*, quæ Anglico sermone *Lond.* 1651, in 4. recusa, (2 Alph. 3 plag.) præter Trigonometriam planam & sphaericam, logarithmorum doctrinam explicat, & omnia Trigonometriæ sphaericæ problemata per duo axiomata fundamentalia NEPERI solvit. Adjiciuntur Canones sinuum & tangentium naturalium atque artificialium, cum 10 chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 18. WILHELMUS HAWNEY An. 1725, *Londini* in 8. reg. (Alph. 1, plag. 8) Trigonometriam planam & sphaericam omnem explicatam dedit & ejus usum in Navigatione, Astronomia, Geographia, Architectura militari, Geodæsia & Euthymetria, atque Gnomonica prolixè commonstravit in libro sermone An-

glico edito sub titulo: *The Doctrine of plain and spherical Trigonometry.*

§. 19. *Compendium Trigonometriae planæ & sphaericæ* non contemnendum, *Leodii* 1704, in 8. (12½ plag.) edidit JACOBUS GOODEN, e Societate Jesu, in quo regulæ accurate demonstrantur & exemplis utilibus ex Geodæsia, Astronomia & Geographia petitis illustrantur. Adjiciuntur palmaria ex EUCLIDE theoremata, cum Canonibus sinuum, tangentium & logarithmorum contractis.

§. 20. In cursibus Trigonometriam bene explicant DECHALES atque OZANAM (§. 4. 7. c. 1). Præterea in multis aliis libris, qui de Astronomia & Navigatione conscripti sunt, Trigonometria tam plana, quam sphaerica explicatur. Sed de eo dicemus suo loco, quando illorum mentionem facturi sumus.

§. 21. *Tabula Sinuum & Tangentium itemque Logarithmorum* separatim editæ commendantur VLACCI; quæ *Hagæ Comitum* An. 1665, prodierunt, & OZANAMI, quæ juxta eas correctæ. Quid nos in nostris præstiterimus, quæ *Hala* 1711 (plag. 20) prodierunt, & 1728, recusa ex præfatione iisdem præfixa intelligi potest.

§. 22. *Analysis speciosa Trigonometriæ sphaericæ*, primo mobili, Triangulis rectilincis & Progressioni Arithmeticæ & Geometricæ aliisque variis Problematis applicata a R. P. JACOBO KRESA, e Societate Je-

fu, quæ *Praga* prodiit 1720, in 4. (Alph. 2; Tab. 2), docet usum Algebrae communis, cujus Ifagoge

libro primo præmittitur, in Trigonometria plana & Sphærica.

CAPUT VI.

De Statica & Mechanica.

§. 1. **T**heoria Staticæ atque Mechanicæ apud veteres fuit valde imperfecta, nec quicquam ea de re extat, nisi quod ARCHIMEDES in duobus *De æquiponderantibus* libris, de centro gravitatis figurarum planarum, & de Statices palmario fundamento, & PAPPUS lib. 8. *Collect. Mathemat.* de quinque Potentiis mechanicis, vecte, axe in peritrochio, trochlea, cochlea & cuneo demonstrat.

§. 2. Neque ulterius progrediuntur Autores recentiores, qui institutiones Mechanicas ediderunt: immo plerique Archimedeæ de centro gravitatis, quæ non sunt ad palatum tyronum, nec ad praxin directe tendunt, omittunt. Pertinent huc GUIDI UBALDI liber *Mechanicorum*, *Pisauri* An. 1577, editus in fol. (2 Alph.) SIMONIS STEVINI *Statica* (§. 23, Cap. 1); JAC. ROHAULT *Tractatus de Mechanica*, qui inter posthuma habetur *Haga* 1690, in 12. reg. (1 Alph. 22 plag.) edita & non nullis editionibus Physicæ ejus in Latinum versæ subjungitur; IGNA-

TII GASTONIS PARDIES *Statica* Gallice *Haga Comitum* An. 1692, in 12. (10½ plag.) tertia vice recusa & vitiosissime in Latinam linguam translata; BERNHARDI LAMY *Tractatus Gallicus de Mechanica* (*Parisiis* 1687, in 12. plag. 12), cui accessit plagula una continens Novam methodum demonstrandi præcipua theoremata Elementorum Mechanicorum; GUIL. OUGHTRED *Institutiones Mechanicæ* (§. 27, cap. 1), PAULI CASATI *Mechanicorum* libri octo *Lugduni Gallorum* An. 1684, in 4. (4 Alph. 7 plag.) & AND. JUNGENICKELS, ex vitriario primum militis gregarii, deinde Suggestuum tormentorum Præfecti *Clavis Machinarum*, Germanice conscripta & *Norimbergæ* An. 1661, in 4. (2 Alph. 3 plag.) edita. Hos inter STEVINUS atque CASATUS multa ad praxin profutura afferunt: ROHALTIUS atque LAMY ob perspicuitatem tyronibus commendandi: JUNGENICKELIUS iis satisfacit, qui in Geometriâ non multum versati fundamenta mechanica populari modo cognoscere cupiunt.

§. 3. Theo-

§. 3. Theoriam potentiarum mechanicarum, quæ dicuntur, seu machinarum simplicium nemo prolixius demonstravit, ac singula huc spectantia uberius exposuit, quam VARI-
GNONIUS in opere posthumo, quod duobus Tomis *Parisiis* An. 1725, in 4. reg. (Alph. 4, plag. 21, Tabb. 64) sub titulo: *Nouvelle Mécanique & Statique* prodiit, ubi ex motu composito demonstrationes deducit. Ad eorum palatum est, qui theoriis profundis delectantur. Ideam hujus operis jam publicaverat An. 1687, *Parisiis* in 4. sub titulo: *Projet d'une nouvelle Mécanique*, in quo nonnisi principia continentur peritis valde probata. Adjiciuntur duo Tractatus, quorum primo examinatur Machina ab affricu libera, cujus mentionem facit PERRAULT in Commentario ad VITRUVIUM; secundo autem opinio BORELLI de ponderibus ex chorda suspensis.

§. 4. Ulterius primus omnium progressus GALILÆUS GALILÆI in *Discursibus & demonstrationibus mathematicis circa duas novas scientias, pertinentes ad Mechanicam & motum localem*, una cum *Dialogis ejus de systemate mundi*, *Lugduni Bat.* 1699, in 4. editis. (Dialogi de motu constant 1 Alph. 14 plag). In iis enim resistantiam solidorum considerare aggressus est, quamvis parum feliciter, usus nimirum principiis parum genuinis, & de motu cum generalia tradidit, tum in specie motum gravium

tam libere, quam super plano inclinato descendantium vel ascendentium, atque motum projectorum & pendulorum felicissime evoluit.

§. 5. Inventa GALILÆI expolivit discipulus ejus EVANGELISTA TORRICELLIUS in libris duobus *de motu gravium naturaliter descendantium & projectorum*, qui inter opera ejus Geometrica habentur (§. 12, Cap. 3); immutavit JOH. BAPTISTA BALIANUS in Tractatu *de motu naturali gravium* (*Genuæ* 1646, in 4.), sed parum feliciter; & doctrinam de motu pendulorum ulterius promovit CHRISTIANUS HUGENIUS in insigni Tractatu *de Horologio oscillatorio*, *Parisi*, An. 1673, in fol. (2 Alph.), cujus etiam parte tertia de linearum curvarum evolutione & dimensione Geometria sublimior novis inventis illustratur. Illustris LEIBNITIUS de resistantia solidorum certiora dedit in *Actis Eruditorum* An. 1684, pag. 319, & eandem doctrinam celeberrimus VARIIGNONIUS more suo maxime universalem reddidit *Commentariis Academiae Regiæ scientiarum* An. 1702, pag. 87.

§. 6. JOH. ALPHONSUS BORELLUS in Tractatu *De vi percussio- nis* regulas motuum explicare aggressus est. Prodiit primum *Bononiæ* An. 1666, in 4. & cum Tractatu altero *De motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*, *Lugd. Batav.* An. 1686, in 4. (3 Alph. 18 plag. 21 Tabb. æn.). Idem in Opere eximio *De motu ani-*

malium, Lugd. Batav. 1685, in 4. (3 Alph. 18 plag. 18 Tabb. æn.) regulas Staticorum ad motus animalium varios explicandos applicavit.

§. 7. Primi regulas motuum veras dedere eodem tempore WALLISIUS, HUGENIUS & CHRISTOPHORUS WREN: ille quidem de Corporibus non elasticis, hi vero de corporibus elasticis. Extant regulæ *Wallisiane* in Transactionibus Anglicanis n. 43, p. 864, *Wrenniane* n. 43. p. 867, & *Hugeniane* n. 46, pag. 927; *Conf. the Philosophical Transactions abrig'd* by JOHN LOWTHORP Vol. I. cap. 5, p. 545, & seqq.

§. 8. HUGENIUS postea Tractatum peculiarem *De motu corporum ex percussione* conscripsit, qui inter posthuma opera habetur, & in quo inventa sua clarius explicat: WALLISIUS vero absolutissimum *de Mechanica seu motu* opus perfecit, Oxonii An. 1669, in 4. primum editum, deinde Tomo primo Operum insertum, in quo non solum inventa veterum & *Galilaana*, *Wrenniana*, *Hugeniana* atque propria, ope analyseos plerumque demonstrantur, verum etiam in proluxa de centro gravitatis pertractatione multa ad Geometriam sublimiorem spectantia una evolvuntur. Utitur Arithmetica hinc inde infinitorum, sed ope calculi differentialis ac integralis talia feliciter eruuntur.

§. 9. Quoniam opus præclarum captum tyronum transcendit; operæ pretium fecit CL. JOH. KEILL, Astro-

nomiæ Professor in Academia Oxoniensi, quod in *Introductione ad veram Physicam*, quæ An. 1705, Oxonii in 8. reg. (19½ plag.) auctior recusa, palmaria illius de motu dogmata ad captum tyronum ex elementis demonstraverit, more veterum Geometrarum.

§. 10. Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in Tractatu *de Mechanica* (Paris. 1695, in reg. 12. plag. 18.) non modo ea demonstrat, quæ ad praxin mechanicam usui sunt; verum etiam motuum doctrinam attingit. Unde merito in hoc genere commendatur.

§. 11. Prostant etiam alia de motu corporum ex percussione Scripta particularia. Pertinet huc MARIOTTI Tractatus de percussione corporum (*du choc des corps*), qui Parisiis An. 1673, in 12. (plag. 18, Tab. 2) editus Autore suo dignus; & inter opera ejus legitur, quæ Lugduni Batavorum An. 1717, in 4. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 25) prodierunt. In eo ex experimentis pendulorum demonstrationes deducit; P. DE CHALES Tractatus Gallicus *De motu* (Lugd. Gall. An. 1682, in 8) & P. PARDIES *Discursus de motu locali* (Hag. Comit. An. 1692, in 12. tertia vice Gallice recusus) non magni momenti, nec veritati per omnia consentaneus. In primis vero hic nominanda sunt *Elementa* Gallica *Mechanicæ & Physicæ* a PARENTIO, Paris. An. 1700, in reg. 12, (plag. 22, Tabb. 12) edita, quamvis non satis perspicua.

§. 12. HU-

§. 12. HUGENIUS primum considerare coepit in motu curvilineo, praesertim circulari, vim centrifugam, & de ea aliquot theoremata, sed suppressa demonstratione, Tractatui de Horologio oscillatorio (§. 4) subjunxit. Conscripsit deinde Tractatum *De vi centrifuga*, qui inter posthuma comparet, ubi theoremata ista demonstrantur. Sed antequam is in publicum prodiret, Cl. KEILLIUS faciles ac elegantes eorundem theorematum demonstrationes dedit sub finem Introductionis ad veram Physicam modo laudatæ (§. 9). Eisdem regulas per calculum differentialem in Commentariis Academiae Regiae scientiarum An. 1700, p. 19. eruit HOSPITALIUS & nos nostro more in Elementis Mechanicæ demonstravimus.

§. 13. De motu, praesertim curvilineo, inventa prorsus praecleara & admiranda dedit Geometra summus ISAACUS NEWTONUS in excellenti *Principiorum Mathematicorum Philosophiae Naturalis* Opere (Londini An. 1687, in 4. reg. 2 Alph. 18 plag.) quod hinc inde emendatum & auctum Cantabrigiae 1713, in 4. reg. (2 Alph. 19 plag.) & mox Amstelodami An. 1714, eadem forma recusum cum praefatione ROGERI COTES, Astronomiae & Philosophiae experimentalis Professoris Plumiani in Academia Cantabrigiensi, qui operam dedit, ut opus praestantissimum nitide imprimeretur. Tandem An. 1726,

Londini in 4. reg. (Alph. 2 plag. 3) prodiiit editio tertia aucta & emendata, ceteris omnibus praeferenda. Docetur in hoc opere applicatio Geometriae ad Naturae explicationem & Scientia mechanica mirifice fuit promota.

§. 14. Excitavit illud attentionem Geometrarum primi ordinis, eosque incitavit, ut varia ad majorem universalitatem perducerent & ulterius proveherent: quos inter inprimis nominandus mihi est celeberrimus VARIGNONIUS, cujus praecleara in hoc genere meditata in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum passim leguntur.

§. 15. Cæterum cum ad lectionem operis *Newtoniani* non admittantur, nisi in Theoria mathematica multum diuque versati, cum in ea majorem perspicuitatem desideraverit ipse HUGENIUS; GUILIELMUS WHISTON, Matheseos tum Professor in Academia Cantabrigiensi, in *Praelectionibus Physico-Mathematicis* Philosophiam Newtoni mathematicam explicatius tradidit & facilius, quamvis subinde laxius, demonstravit (Cantabrigiae An. 1710, in 8. 1 Alph.). Forfan huc etiam tendit liber alius ab HENRICO DITTON Londini An. 1706, sub titulo *the general Laws of nature and motion with their application to Mechanicks, also the doctrine of centripetal forces and velocities of bodies, describing any of the Conick Sections* editus, quem nobis non vi-

si m.

sum nomen Autoris ex aliis specimenibus nobis noti commendat.

§. 16. Inprimis etiam loco introductionis in opus *Newtonianum* commendanda est explicatio quarundam sectionum ejusdem, quam dedit JOHANNES CLARKE & sub titulo: *A Demonstration of some of the principal sections, of Sir Isaac Newton's principles of natural Philosophy, in which his peculiar method of treating that useful subject is explained and applied to some of the chief phenomena of the system of the World*, Lond. 1730, in 8. reg. (plag. 22, Tab. 17) edidit, & omnium maxime DOMCKII *Philosophia mathematica Newtoniana* illustrata, quam Latino sermone conscriptam Londini An. 1731, in 8. (Alph. 1, plag. 3, Tab. 16) publici juris fecit autor. Enimvero cum opus *Newtonianum* merito tantopere celebratum a tyronum non modo, sed etiam provectorum captu valde removeatur, utilissimam operam sumeret, qui continuo Commentario idem illustraret, qualem in Geometriam CARTESII edidit RABUEL (§. 7, c. 4). * Præstaret enim, ut principiis Geometriæ, Analyseos & Mechanicæ instructus statim ad lectionem ejus accederet, cum dulcius ex fonte bibantur aquæ, quam demum per ambages non sine multo temporis dispendio ad eandem perduceretur, aut prorsus ab eadem avocaretur.

* Id fecerunt PP. LE SEUR & JACQUIER ex ordine Minimorum. Prodiit hujus Commentarii Volumina duo, Geneva in 4. primum An.

§. 17. Multa egregia de motu & resistantia cum solidorum, tum fluidorum a celeberrimis ævi hujus Geometris detecta in Actis Eruditorum & Commentariis Academiae Regiæ Scientiarum, nec non in Transactionibus Anglicanis, passim extant; & præclarum de motu solidorum & fluidorum opus Geometriæ insignis JACOBI HERMANNI, Mathematicum Professoris primum Patavii, deinde Francofurti ad Oderam, posthac Petropoli Mathematicum, tandem in Academia patria Basileensi Philosophiæ moralis celeberrimi, *Amstel.* 1716, in 4. (Alph. 2, plag. 15, Tab. 12) sub *Phoronomia* nomine editum plurima inventa nova eaque egregia continet. More veterum doctrinam hanc demonstrare voluit, quorum tamen methodum non satis familiarem expertus, nec intimius perspectam possedit, ut adeo & sibi, & aliis magis consulisset, siquidem analytica methodo, in qua erat versatissimus, usus fuisset.

§. 18. Ne igitur desideraretur opus Mechanicæ, in quo Motus scientia profundius explicaretur, & lectores ad solvenda proprio Marte problemata præpararentur, LEONHARDUS EULERUS, Academiae Imperialis scientiarum, quæ Petropoli floret, Membrum & Matheseos sublimioris Professor, *Mechanicam* sive *Motus scientiam analytice expositam* con-

1739 (Alph. 3, plag. 5) secundum An. 1740 (Alph. 2, plag. 7) Tertium mox proditum expectatur.

conscriptit & duobus Tomis, *Petro-
poli* in 4. reg. (Tom. I, Alph. 2,
plag. 17, Tabb. 14, & Tom. II, Alph.
2, plag. 18, Tabb. 18) in lucem pu-
blicam emisit, plura suo tempore ad-
diturus. Reperies in hoc opere multa
nova, quæ alibi frustra quæsieris,
& ad ejus lectionem cum fructu ab-
solvendam admittitur, qui in Analyfi
finitorum & infinitorum satis fuerit
exercitatus.

§. 19. Quibus machinarum con-
structio curæ cordique est, in eorum
gratiam Tractatum de Viribus motri-
cibus (*Traité des Forces mouvantes*)
Parisiis An. 1722, in 8. reg. (Alph.
1½, Tabb. 8) edidit DE CAMUS.
Explicantur enim principia & ad
machinas applicantur, quorum in
praxi mechanica cognitio præsuppo-
nitur.

§. 20. Machinarum descriptiones
dederunt JACOBUS DE SIRADA,
*Ferdinandi, Maximiliani & Rudol-
phi* II, Imperatorum Antiquarius,
An. 1618, a nepote OCTAVIO DE
STRADA in publicum emissas, &
An. 1629, recusas; ZEISINGIUS
in *Theatro Machinarum*, *Lipsiæ* An.
1612, in 4. edito, JACOBUS BESSON
in *Theatro instrumentorum & ma-
chinarum* An. 1582, in lucem emissio
in fol. (plag. 32), cum FRANCISCI
BEROALDI Figurarum declaratione
demonstrativa & JOLII PASCHALIS
additionibus: AUGUSTINUS DE RA-
MELLIS DE MASANZANA in opere,
quod ex Gallico in sermonem Ger-
Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

manicum translatus *Lipsiæ* An. 1620,
in fol. (7 Alph. 18 plag.) sub titulo:
Schatz-Kammer Mechanischer Künste
prodiit, & GEORGIUS ANDREAS
BÖCKLER, in *Theatro Machinarum*
novo (*Norimb.* 1673, in fol. plag. 11,
Tabb. an. 154).

§. 21. Quoniam descriptiones
machinarum, quas Autores isti tra-
dunt, omnes sunt nimis breves, &
inprimis dimensionum rationes non
exprimunt, ita ut adequata machi-
narum idea inde hauriri nequeat;
Mechanicus ingeniosus atque indus-
trius JACOBUS LEUPOLDUS no-
vum promisit Theatrum machinarum
& instrumentorum in *Actis Erudito-
rum* An. 1712, p. 366, cui ut sta-
ret, ipsimet cum hortati sumus.
Stetit tandem, quantum per fata li-
cuit, & *Lipsiæ* An. 1724, in publi-
cam lucem protulit *Theatrum machi-
narum generale, Schau-Platz des Grün-
des mechanischer Wissenschaften* in fol.
(Alph. 2, plag. 20, Tab. 71), in quo
potentias mechanicas & virium mo-
triciū ad machinas applicationem
declarat. Eodem adhuc anno com-
paruerunt *Theatrum machinarum hy-
drotechnicarum, Schau-Platz der Wasser-
Bau-Kunst*, in quo ea traduntur, quæ
ad Architecturam aquarum faciunt
(Alph. 2, plag. 5, Tabb. 51) & pars
prior *Theatri machinarum hydraulica-
rum, Schau-Platz der Wasser-Künste*,
in quo representantur machinæ ad
aquas elevandas excogitate (Alph. 2,
Tabb. 52). Pars posterior subsecuta
I anno

anno sequente (Alph. 2, plag. 1, Tabb. 54). Eodem adhuc anno 1725, comparuit *Theatrum Machinarium*, quod vocat Autor, *Schau-Platz der Hebezeuge* (Alph. 2, Tab. 96), in quo reperies machinas ponderibus elevandis aptas hisque agnatas, & *Theatrum staticum universale*, *Schau-Platz der Wage-und Gewicht-Kunst*, (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 57), quod exhibet varias librarum & staterarum structuras, una cum instrumentis hydrostaticis, meteorologicis & ad libellationem necessariis, & quæ ad pondera spectant, explicat. An. 1726, *Theatrum Pontificiale*, quod vocat autor, *Schau-Platz der Brücken und des Brücken-Baues* (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 57), quæ eam Architecturæ partem illustrat, quæ de pontibus struendis agit. Tandem An. 1727, *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, *Schau-Platz der Rechen-und Mess-Kunst* (2 Alph. 8½ plag. Tabb. 43) successit, in quo instrumenta Arithmetica & Geometrica describuntur. Nisi mors Autoris finem imposuisset, dare adhuc constituerat Theatra 1. fontium hydraulicorum, 2. molarum, 3. ad mechanicam ignis spectantium, 4. machinarum in metalli fodinis usitatarum, 5. machinarum & instrumentorum, quæ in Architectura civili & militari usui sunt, 6. quæ in re Oeconomica & 7. venatoria usum habent, 8. machinarum & instrumentorum aërometricorum, 9. machinarum & in-

strumentorum optidorum, 10. machinarum & instrumentorum in Gnomonica & arte horologiopæa usitatorum, 11. instrumentorum astronomicorum, 12. acusticorum & musicorum aliorumque agnatorum, 13. anatomicorum & chirurgicorum, & tandem omnium machinarum & instrumentorum apud artifices & opifices obviarum.

§. 22. Dolendum imprimis erat, quod molarum usitatarum genera cum Architecturæ parte, quæ iisdem excitandis destinatur, non describere potuerit Autor. Hunc igitur defectum supplere conatus est JOHANNES MATTHIAS BEYER, qui per modum Tomi noni Theatri machinarum LEUPOLDI An. 1735, *Lipſia* in fol. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 43) edidit, in quo non modo usitata molarum genera, verum etiam ea, quæ ad extructionem earundem necessaria scitu, describuntur. Accessit Tomus secundus, in quo jura molidinorum operose congeruntur (Alph. 2, plag. 12) in usum Jurisperitorum.

§. 23. Molas Batavorum peculiari libro exhibuit PETRUS LIMPERGH sermone patrio, cujus *Moole-Boek*, *Amſtelodami* An. 1690, in fol. reg. (plag. 2, Tabb. 32) prodiit. Accuratior illarum delineationes ac descriptiones dedit JOHANNES VAN ZYL in Theatro Machinarum universali, *of groot algemen Moolen-Boek*, cujus

cujus Tomus I, *Amstelodami* An. 1734, in fol. reg. prodiit (plag. 6, Tabb. 56.), etenim singulae partes, qualescunque tandem fuerint, quam accuratissime secundum suas dimensiones repraesentantur, ut integræ structuræ adæquatam ideam inde haurire liceat. Textus in Germanicam linguam translatus fuit, ut operis hujus etiam in Germania esset usus.

§. 24. Accuratas quarundam machinarum recentius inventarum descriptiones dedit PERRAULT in opusculo Gallico, quod sub titulo: *Recueil de plusieurs Machines de nouvelle invention*, *Parisiis* An. 1700, in 4. (plag. 7, Tabb. 11) prodiit, & HUGENIUS cum in Tractatu *De horologio oscillatorio* horologium a se inventum, tum in *Operibus posthumis* automatum suum planetarium accurate describit.

§. 25. In Gallia machinas ab Academia Scientiarum approbatas, a prima fundatione usque ad nostra tempora, una cum illarum descriptionibus, delineatas consensu Academiae sub titulo: *Machines & Inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, *Parisiis* sex Tomis publici juris fecit GALLONUS An. 1735, in 4. reg. (Alph. 6, plag. 20, Tabb. 422). Non modo machinae scenographice repraesentantur, verum etiam ichnographice, cum orthographiis & singularum partium delineationibus

adjiciuntur, ubi opus fuerit. Descriptiones sunt satis accuratae, ut nihil in iis desiderari possit. Subinde etiam vires ad agitandam machinam requisitæ ad calculum revocantur, aliaque cognitu necessaria annotantur. Opus hoc Mechanicæ practicæ cultoribus plurimum commendandum.

§. 26. Structuram horologiorum exponit Anglus Anonymus * in Tractatu Anglico, qui auctior *Londini* An. 1700, in 12. reg. sub titulo: *The artificial Clockmaker* (7½ plag. Tabb. 2) prodiit & An. 1707, in Germanicum idioma translatus, novæ editioni Gnomonicæ *Welperianæ* subjungitur: quod argumentum etiam attingit OUGHTREDUS in posthumis pag. 68, & seqq. Idiomate autem Germanico de horologiorum structura commentatus est JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, in mechanicis & praxi optica versatissimus. Prodiit ejus Tractatus sub titulo: *Vollständige Nachricht von den Uhren*, *Hale* 1718, in 8. (plag. 9, Tab. 7). Addidit An. 1722, Continuationem, in qua suppleantur, quæ desiderari poterant de horologio examinatorio & repetitorio (plag. 12, Tabb. 22).

§. 27. Autoribus tamen istis palmam præripit D. JACOBUS ALEXANDER, Monachus Benedictinus Congregationis S. Mauri, in Tractatu generali de Horologiis, qui sub titulo: *Traité général des Horloges*,

I 2

Part.

* GULIELMUS DERHAM Canon. Windsor, non uno nomine commendandus.

Parisiis in 8. maj. 1734, prodit (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 26), quem ob utilitatem suam, me suatore, in Germanicam linguam transtulit CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGERUS, Medicinæ Doctor, & *Lemgovii* An. 1738, in 8. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 25) edidit sub titulo: *Des P. Dom JACOB ALEXANDERS ausführliche Abhandlung von den Uhren*. Agit etiam de horologiis solaribus majoribus construendis. Ceterum hoc opus omnibus commendandum, qui horologiorum constructionem accurate cognoscere desiderant. Singularia vero de constructione horologiorum tradit in libro Gallico HENRICUS SULLY, qui secunda vice auctior recusus *Parisiis* An. 1737, in 12. (plag. 20, Tabb. 5) cum multis accessionibus. Maximopere commendandus iis est, qui perfectionem horologiorum curæ cordique habent, atque adeo in Germanicam linguam verti meretur, ut Tractatui ALEXANDRI jungi posset.

§. 28. Silentio denique hic præ-

tereunda non erant CASPARI SCHOTTI, e Societate Jesu, *Technica curiosa*, libris 12, comprehensa, quæ *Norimbergæ* An. 1664, in 4. (Alph. 6, Tabb. 20) prodierunt. Etenim in iis, præter varia experimenta aliaque technasinata, continentur etiam mechanica, chronometrica & automatica, consequenter plurima ad Mechanicam practicam spectantia. Edidit idem *Magiam universalem Naturæ & Artis* in tres partes distributam *Bambergæ* 1677, in 4. (Alph. 14, plag. 2, Tabb. 90): pars enim tertia multa continet, quæ ad Mechanicam & Staticam spectant, nimirum quæ sub nominibus Magiæ centrobarycæ, mechanicæ, thaumaturgæ libris tribus prioribus continentur.

§. 29. Idem SCHOTTUS in *Technica curiosa* lib. 9, sub titulo *mirabilium chronometricorum* multa artis horologiopææ utilia tradit, præter alia mechanica. Inprimis etiam de mobili perpetuo varios conatus describit.

CAPUT VII

De Hydrostatica, Aerometria, & Hydraulica.

§. 1. **H**YDROSTATICAM primus docuit ARCHIMEDES in libris *De insidentibus humido*, cujus dogmata ad experimenta applicavit

MARINUS GHETALDUS in *ARCHIMEDE promoto*: unde sua excerpfit OUGHTREDUS (§. 19, cap. 1).

§. 2. MA-

§. 2. MARIOTTUS in Tractatu Gallico de motu aquarum & aliorum corporum fluidorum, qui primum sub titulo: *Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides*, prodiit Parisius An. 1686, in 12. reg. (plag. 17½) & in editione Batava operum ipsius legitur, propositionum hydrostaticarum & hydraulicarum magnam partem & rationibus confirmavit, & experimentis comprobavit. Propter insignem utilitatem D. JOHANNES CHRISTOPHORUS MEINIG cum in Germanicam linguam transtulit & notis quibusdam illustratum Lipsiæ An. 1723, in 8. (Alph. 1, plag. 5½) edidit.

§. 3. Nec contemnenda habet ROBERTUS BOYLE, cum in *Paradoxis Hydrostaticis* (Genevæ An. 1680, in 4. plag. 15, Tabb. 3), tum in *Medicina Hydrostatica* (Genevæ An. 1693, in 4. plag. 10½): quod utrumque scriptum in usum præsertim physicum legi meretur, intelligendum etiam ab iis, qui Mathematicum sunt imperiti.

§. 4. FRANCISCUS TERTIUS DE LANIS, e Societate Jesu, Tomo tertio *Magisterii Naturæ & Artis*, Parmæ An. 1692, in fol. (6 Alph. 14 plag. Tabb. 13) lib. 25, f. 49, & seqq. dogmata hydrostatica uberius exposuit, quam alibi leguntur. Tomo autem primo & inprimis secundo passim Machinas Hydraulicas descripsit: quemadmodum etiam in primo Mechanicam multum illustra-

vit. Tom. I, Brixie An. 1684, in fol. 6 Alph. Tab. 24. Tom. II, Brixie 1686, 6 Alph. 5 plag. Tabb. 20).

§. 5. BERNHARDUS LAMY parte secunda Mechanicæ (§. 2, cap. 6), quæ inscribitur *Traité de l'équilibre des liqueurs*, propositiones aliquot Hydrostaticæ ac Hydraulicæ fundamentales explicavit: quod etiam fecere ROHALTIUS (§. cit.) & WALLISIUS in *Mechanicis* (§. 8, c. cit.). Commendanda quoque tyronibus *Hydrostatica* P. DECHALES, quæ in Mundo ipsius Mathematico Tom. III, legitur. (§. 4, cap. 1).

§. 6. Sublimiora dedit Geometra summus ISAACUS NEWTONUS in *Principiis Philosophiæ Naturalis Mathematicis* Sect. 5, lib. 2, pag. 282, & seqq.

§. 7. De Aërometria scriptum aliud non extat, nisi quod sub titulo: *Elementa Aërometriæ*, Lipsiæ An. 1709, in 12. (16 plag. Tabb. 12) edidi in usum potissimum tyronum, ut Mathesin ad experimenta applicare discant. Sed ea deinceps hîcce Elementis Matheseos universæ inserui. Passim tamen huc spectantia leguntur apud GUERICKIUM, Consullem Magdeburgicum, antliæ pneumaticæ inventorem, in *Experimentis novis Magdeburgicis de vacuo spatio*, Amstelodami An. 1672, in fol. (Alph. 2, plag. 20, Tabb. 18) editis & qui post cum aëris proprietates experimentis comprobarunt.

§. 8. Ceterum hic etiam locum

meretur libellus Gallicus, qui sub titulo: *Traitez des Barometres, Thermometres & Hygrometres* prostat & barometrorum, thermometrorum atque hygrometrorum constructionem ac usum edocet (*Amstel.* 1707, in 12. plag. 7, Tabb. 35). Inprimis autem hinc inde in Commentariis Academiae Regiae scientiarum inferuntur, quibus Aërometria locupletari ac ad maiorem perfectionem adduci potest.

§. 9. Ad hydraulicam perficiendam tendit JOHANNIS CEVÆ, Mediolanensis, *Geometria motus* (*Bononia* 1692, in 4. plag. 12, Tabb. 9), in qua de motu tam simplici, quam composito traduntur, quæ ad motum aquarum explicandum utilia sunt.

§. 10. JOHANNES BAPTISTA BALIANUS lib. 3, 4 & 5, *de motu naturali gravium, solidorum & liquidorum* (§. 5, cap. 6) de motu liquidorum, canalium sectionibus, & de foraminibus vasis, ad praxin hydraulicæ utilia profert: quorum etiam spectant Tractatus aliquot PICARDI, ROEMERI & MARIOTTI supra recensiti (§. 31, cap. 1).

§. 11. DOMINICUS GULIELMINI in *Mensura Aquarum fluentium* (*Bononia* An. 1690, & 1691, in 4. plag. 19, Tabb. 8) theorias hydraulicas sublimiores ad praxin revocare studet. Nemo autem in theoria hydraulica sublimiora dedit quam Geometræ celeberrimi, NEWTONUS in Opere modo laudato (§. 6) lib. 2. sect. 7.

p. 318, & seqq. atque VARIGNONIUS in Commentariis Academiae Regiae Scientiarum An. 1699, & 1703. Multa nova & egregia de hoc argumento dedit Geometra insignis HERMANNUS in *Phoronomia* (§. 17, cap. 6).

§. 12. Quemadmodum vero EULERUS theoriam mechanicam perficere studuit (§. 18, cap. 6), in quam stricturas Londini edidit ROBINSON NOURSE* sub titulo: *Remarks on Mr. Eulers Treatise of motion*, nobis nondum visas; ita DANIEL BERNOULLI, Medicinæ Professor Basileensis, antea Matheseos sublimioris in Academia scientiarum imperiali Petropolitana, nunc Professor honorarius, similem operam impendit theoriæ Hydrostaticæ & Hydraulicæ, quam sub titulo: *Hydrodynamica sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii*, *Argento-rati* An. 1738, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 16, Tabb. 12) publici juris fecit, cum hoc opus jam octo annis ante congefisset, dum Petropoli ageret.

§. 13. Ceterum ad Hydraulicam quoque facit SEXTI JULII FRONTINI *de Aqua ductibus urbis Roma Commentarius*, quem uberrimis notis explicatum Patavii Anno 1722, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 21, Tabb. 15) in lucem emisit JOANNES POLENUS, Professor Patavinus, cui etiam debentur de *Motu aque mixto* libri duo, quibus multa nova pertinentia ad æstua-

* Aut potius BENJAMIN ROBINS; *Nourse* nomen est Bibliopolæ.

æstuaria, ad portus atque ad flumina continentur, *Patavii* An. 1697, in 4. reg. (plag. 18, Tabb. 3) & liber de *Castellis*, per qua derivantur fluviorum aqua, habentibus latera convergentia, qui etiam continet nova experimenta ad aquas fluentes & ad percussionis vires pertinentia, & *Patavii* An. 1718, in 4. (plag. 9, Tab. 1) prodiit. Idem etiam An. 1723, edidit *Epistolam ad JOANNEM JACOBUM MARINONIUM*, Mathematicum Casareum, in qua præter defectum Solis anno isto Patavii observatum, agitur de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes, & cui subjicitur JOANNIS BUTEONIS *libellus de fluentis aqua mensura* cum annotationibus nonnullis, *Patavii* in 4. (plag. 3½, Tabb. 1).

§. 14. Neque silentio hic prætereunda sunt MARINI MERSENNI *Phænomena Hydraulica pneumatica*, quæ inter *Cogitata ipsius Physico-Mathematica* leguntur, in quibus tam naturæ, quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur, *Parisiis* An. 1654, in 4. (Alph. 8, plag. 19). In hac nimirum collectione, quæ inter opera mathematica, superius commemorari merebatur, reperiuntur 1. Tractatus de mensuris, ponderibus, atque nummis tam Hebraicis, quam Græcis & Romanis, ad Parisiensem expensis, 2. Tractatus, cui titulus: *Hydraulica pneumatica, Arsque navigandi, Harmonia theórica, practica, & Mechanica*

phænomena, 3. Tractatus mechanicus theoricus & practicus, 4. Balistica & Acontismologia, in qua sagittarum, jaculorum & aliorum missilium jactus & robur arcuum explicantur, 5. Universalis Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopsis & bini refractionum demonstratarum Tractatus, 6. ARISTARCHI SAMII Tractatus de mundi Systemate & Reflexiones Physico-Mathematicæ, quibus varia adjiciuntur ad præcedentia. In Synopsi tantummodo sine demonstratione recensentur Propositiones EUCLIDIS, PETRI RAMI, ARCHIMEDIS, THEODOSII, MENELAI, MAUROLYCI, APOLLONII, MYDORGII, geometricæ; PAPPI, GUIDONIS UBALDI & STEVINI *mechanicæ*.

§. 15. De motu fluminum scripsit DECHALES in Tractatu *De fontibus naturalibus* prop. 39, & seqq. Tomi III, *Mundi Mathematici* f. 137, & seqq. sed paucis plura & abstrusiora hisce complexus est HERMANNUS in *Phoronomia* cap. 10, pag. 226, & seqq. Ex instituto de hoc argumento scripsit DOMINICUS GULIELMINI, cujus *della Natura de' Fiumi Trattato Fisico-Matematico* prodiit *Bononiæ* An. 1697, in 4. (Alph. 2, plag. 3, Tabb. 15). Multa in Italia prodire scripta Italico sermone, in quibus plura ad hoc argumentum spectantia leguntur, occasione controversiæ de Rheno fluvio in Padum deducendo.

§. 16. Inter

§. 16. Inter Veteres, machinas hydraulicas descripsit HERON *Alexandrinus* in libro *ſpiritualium* a COMMANDINO in Latinam linguam translato (*Parifis* An. 1583, in 4.) Ex recentioribus ſimilem operam collocarunt SALOMON DE CAUX, Architectus militaris Electoris Palatini, in libro Gallico *De Machinis, præcipue hydraulicis*, qui An. 1615, prodiit: CASPARUS SCHOTTUS in *Mechanica Hydraulico-pneumatica*, *Herbipoli* 1657, in 4. (Alph. 2, plag. 22, Tabb. 56) edita, DECHALES in *Mundo Mathematico* Tom. III, (§. 4, cap. I), GEORGIUS ANDREAS BÖCKLER in *Architectura Curioſa* Germanica (*Norimbergæ* An. 1704, in fol. plag. 21, Tabb. 200), qui ultra 70 fontium ſalientium & ultra 120 fontium artificialium formas describit; & LUCAS ANTONIUS PORTIUS in nonnullis *de fontibus naturalibus*, quæ nonnullis *de motu corporum* ſubjuncta, poſſibilitatem inprimis quorundam fontium adſtruens, qui a PLINIO commemorantur. (*Neapoli* An. 1704, in 4. plag. 7, Tabb. 5).

§. 17. Denique quæ de Hydroſtica & Hydraulica per plurimos libros & volumina diſperſa leguntur, qua theoriam & praxin, uno complexus eſt & ſub titulo: *An intro-*

duction to a general ſystem of Hydroſticks and Hydraulicks, *Londini* An. 1729, in 4. charta aug. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. æn. 60) edidit STEPHANUS SWITZER. Extant etiam in hoc libro descriptiones machinarum, quibus aqua elevatur.

§. 18. Inprimis autem iis, qui praxin ſolidam Hydraulicæ curæ cordique habent, commendari meretur *Architectura hydraulica*, quam Gallico idiomate conſcriptam *Parifis* Anno 1737, in 4. reg. cum 44 Tabulis æneis ſplendidiffimis edidit DE BELIDOR. * In hoc opere etiam accurata traditur molarum deſcriptio & quæ ad molas aqua agitandas requiruntur ibidem explanantur. Opus utiliſſimum in linguam Germanicam verti mereretur.

§. 19. Ad Hydraulicam quidam referunt *Libellationem* aquarum, de qua nos egimus in *Mechanicæ Elementis*. Egregium de ea Tractatum conſcripſit PICARDUS, quem PHILIPPUS DE LA HIRE poſt mortem ipſius *Parifis* An. 1684, in 12. (plag. 15, Tabb. 3) edidit, unde ſua deſumſere, qui de hoc argumento apud Noſtros ſcripſere, veluti LEUPOLDUS atque STURMIUS filius. Inter opera MARIOTTI extat quoque *De libellatione* Tractatus brevis.

* Habet quidem Tom. I, 2 Alph. 9 plag. Tabb. 44. Prodiit autem Tom. II. Anno 1739, & complectitur 2 Alph. 12 plag. Tabb. 55.

CAPUT VIII.

De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva.

§. 1. **O**ptica & Catoptrica Elementa olim conscripsit EUCLIDES, quæ a JOHANNÉ PENA, Mathematico Regio, Latine versa Parisiis An. 1604, prodire. Extant etiam in *Cursu Mathematico* HERIGONII (§. 1. cap. 1) & in editione Gregoriana operum EUCLIDIS (§. 2, cap. 3).

§. 2. Circa annum Christi 1100, ALHAZEN Arabs ingens de Optica volumen composuit, quod in libros, capita & propositiones distinxit FRIDERICUS RISNERUS. Usus est scriptis veterum, præsertim PTOLEMÆI de Optica libris decem, qui hodie desiderantur.

§. 3. Cum demonstrationes ALHAZENI sint admodum intricatæ ac prolixæ, VITELLIO Polonus circa An. 1270, aliud de Optica volumen conscripsit in libros X digestum. Pleraque ex ALHAZENO desumpsit, sed demonstrationum fundamenta ex APOLLONIO, THEODOSIO, MENELAO, THEONE, PAPPO & PROCLO petiit. Ad hunc Autorem *Paralipomena* edidit JOHANNES KEPLERUS, quibus Astronomiæ pars optica traditur. (*Francofurti* An. 1604, in 4. 2 Alph. 15 plag.). Habentur tamen multa quoque alia in *Wolffii Oper. Mathem.* Tom. V.

hiscæ Paralipomenis, & inter alia modum visionis primus decente ratione explicat Autor. ALHAZENUM & VITELLIONEM uno volumine edidit FRIDERICUS RISNERUS *Basilæ* An. 1572, in fol. (Alph. 7, plag. 18). Titulus libri est: *Optica Thesaurus*. ALHAZENI Arabis libri septem nunc primum editi. Eiusdem liber de crepusculis & Nubium ascensionibus. Item VITELLIONIS libri X. Omnes instaurati, figuris illustrati & aucti, adjectis etiam in ALHAZENUM commentariis a FEDERICO RISNERO.

§. 4. Compendium Opticæ antiquæ circa annum 1279, conscripsit JOHANNES PECCAMUS, Archiepiscopus Cantuariensis & Primas Angliæ (*Coloniæ Agrippina* 1627, in 4. plag. 11), qualem etiam recentius dedit AMBROSIVS RHODIVS, Professor Mathematicum Wittebergenfis, cujus Optica, *Wittebergæ* 1611, cum *Tractatu de crepusculis* in 8. prodit (1 Alph. 10 plag.). Uberius eandem exposuit RISNERUS ante laudatus, cujus Optica libri quatuor, *Cassellæ* An. 1606, in 4. prodire (Alph. 1, plag. 14).

§. 5. Opticam quoque illustrare aggressus est circa idem tempus ROGERIVS BACON, Philosophus suo tempo-

tempore summus, Anno 1284, Oxonii mortuus, & ob scientias Mathematicas magiæ accusatus. Ejus *Perspectivam* in lucem protraxit JOANNES COMBACHIUS, Philos. Professor marpurgensis, (*Francof. An. 1614*, in 4. 1 Alph. 5 plag.): parum tamen mathematici ea continet, etsi lectu non indigna.

§. 6. Enimvero Veteres ea, quæ visionem directam & reflexam concernunt, potissimum explicant: quæ vero ad refractam spectant, nimis imperfecte tradunt. JOANNES BAPTISTA PORTA libris novem de *Refractione* conscriptis hanc doctrinam melius tradere conatus est (prodiere *Neapoli An. 1593*, in 4. 1 Alph. 6 plag.); sed parum adhuc profecit. Primus qui Dioptricam meliori habitu induit & lentium sphaericarum proprietates demonstravit accurate, fuit JOHANNES KEPLERUS, cujus *Dioptrica* prodiit *Augustæ Vindelicorum An. 1611*, in 4. (plag. 14) & posthac alibi recusa. Præmittuntur *Epistola GALILÆI de iis, quæ post editionem Nuncii sideris ope perspicilli nova & admiranda in cælo deprehensa sunt*, itemque *Examen præfationis JOHANNIS PENÆ in Opticam EUCLIDIS de usu Opticæ in Philosophia*.

§. 7. CARTESIUS in *Dioptrica*, quæ principiis Philosophiæ subjungi solet, veram refractionis legem a SNELLIO inventam, sed suppresso inventoris nomine, affert & modum visionis distinctius, quam ab aliis

factum fuerat, explicat, lentium ellipticarum & hyperbolicarum proprietates recenset & praxin poliendi vitra ita docet, ut in ea non satis versatum judicent experti.

§. 8. Theoriam Dioptricæ magis excoluit, novis plerumque demonstrationibus inventis, WILHELMUS MOLYNEUX in *Dioptrica nova* Anglice conscripta (*Londini An. 1692*, in 4. plag. 16, Tabb. 40), ubi calculo trigonometrico ad eruendas lentium sphaericarum proprietates juxta veram refractionis legem utitur. Omnium maxime eandem hæcenus perfecit HUGENIUS, cujus *Dioptrica* maximam posthumorum partem constituit. Eidem & praxis multum debet: de quo tractatus *De poliendis vitris* testatur, *Dioptricæ* subjunctus. Prodiere primum *Opera posthuma*, *Lugd. Batav. An. 1703*, in 4. (2 Alph. 19 plag. Tabb. 24), deinde cum aliis recusa (§. 35, cap. 1). Opus Hugenianum perfectissimum eorum, quæ in hoc genere prostant: requirit autem lectorem in Geometria probe versatum.

§. 9. Tyronibus adeo commendandum est *Dioptrica Tentamen* Gallicum NICOLAI HARTSOEKER (*Parisi An. 1694*, 1 Alph. 10 plag.), ubi multa quoque ad Physicam & praxin spectantia traduntur. Ipse enim in poliendis vitris & opticis technasmatibus erat versatissimus.

§. 10. In splendidi Operis dioptrici CHERUBINI, Capucini, Tomo

mo primo, qui sub titulo: *Dioptrique oculaire, Parisiis* An. 1671, in fol. (5 Alph. 11 plag. Tabb. 16) prodit, multa ad praxin spectantia reperiuntur. In altero Tomo, qui sub titulo: *La Vision parfaite, Parisiis* 1678, in fol. (3 Alph. 10 plag. Tabb. 23) lucem adspexit, argumentum palmarium est tubus binoculus, cujus sub finem Tomi primi mentionem iniecerat.

§. 11. Opticam sine Catoptrica & Dioptrica tradit CHRISTOPHORUS SCHÖNERUS, e Societate Jesu, in *Oculo (Oeniponti* An. 1619, in 4. 1 Alph. 10 plag.). Ab iis potissimum legendus, qui rationes phaenomenorum visionis directae cognoscere gestiunt.

§. 12. Vir summus NEWTONUS in egregio Optices opere novas luminis proprietates, ante nondum animadversas, & quarum consideratio (ceu ex HUGENII Dioptrica apparet) maximi in Dioptrica momenti, per experimenta edocet. Prodit opus primum *Londini* An. 1704, in 4. reg. (2 Alph. 5 plag.) sub titulo: *Opticks, or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and colours of Light*. In fine adjiciuntur duo Tractatus Latini, primus scilicet *de enumeratione linearum tertii ordinis*, alter *de Quadratura curvarum*. Ipsum in Latinam linguam transtulit SAMUEL CLARKE, Autore approbante & nonnulla adjiciente (*Londini* An. 1706, in reg. 4. 2 Alph. 9 plag. Tabb. 19).

An. 1719, ibidem prodit versionis editio altera in 4. (Alph. 2, plag. 8, Tabb. 12), ubi quaestiones adjectae augentur, sed Tractatus geometrici omittuntur, quos in Analyfi sua ediderat JONES (§. 21, cap. 4). Post mortem NEWTONI, *Londini* An. 1729, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 24) prodierunt *Lectiones ejus opticae* An. 1669, 1670 & 1671, in *Scholis publicis habita*. In his equidem multa continentur quae in Optica leguntur, alia tamen prorsus ratione proponuntur. Reperiuntur hic, quae alibi frustra quaesiveris.

§. 13. Huc etiam referri potest MARIOTTI *Tentamen de Coloribus* (*Parisi* An. 1681, in reg. 12. Alph. 1, plag. 9, Tabb. 16) quod Tentaminum Physicorum Gallice conscriptorum quartum est, & in editione Batava operum ipsius legitur, atque HUGENII Tractatus Gallicus *de Lumine* (*Lugd. Batav.* 1690, in 4. 1 Alph. 2 plag.), qui in Operum reliquorum volumine primo extat. Ejus hypothese in explicandis phaenomenis opticis utitur PETRUS ANGO in *Optica Gallica* (*Parisi* An. 1682, in 12).

§. 14. ANDREAS TACQUET in *Optica Perspectivae fundamenta* jecit, & in *Catoptrica* speculorum planorum & sphaericorum proprietates bene demonstrat. (§. 28, cap. 1), sed Dioptricam non attingit. ISAACUS BARROWIUS in *Lectionibus Opticis*, quae *Lectionibus Geometri-*

cis præmittuntur (§. 19, cap. 3), theoriā Catoptricæ & Dioptricæ demonstrat. Nec dubitamus, quin JACOBUS GREGORIUS in *Optica promota* multa præclara dederit, etli nobis non visa. An. 1663, in 4. lucem adspexit.

§. 15. Utriusque Compendium dedit DAVID GREGORIUS in *Elementis Dioptricæ & Catoptricæ spherica* (Oxonii 1695, in reg. 8. plag. 7). Idem in linguam Anglicam vertit WILHELMUS BROWNE, M. D. & prolixum supplementum adjecit atque Introductionem præmisit. Prodiit secunda vice cum appendice J. T. DESAGULIERS, L. L. D. de telescopio reflectente cum epistolis, quas de eodem NEWTONUS & JACOBUS GREGORIUS ad se invicem scripsere, *Londini* An. 1735, in 8. reg. (plag. 20, Tab. 4). Prima telescopii catoptrico-dioptrici idea debetur GREGORIO, qui eam describit in *Optica promota* p. 94. Sed eam perfecit NEWTONUS & tandem felicissime istiusmodi telescopium construxit J. HADLEY, atque nunc construuntur ab EDUARDO SCARLET, Optico Regio, ejusque filio. Descripsimus idem in *Elementis Dioptricæ nostris*.

§. 16. Opticam, Catoptricam & Dioptricam una exposuit ZACHARIAS TRABERUS, e Societate Jesu, in *Nervo Optico* (Viennæ An. 1675, in fol. 2 Alph. 16 plag. Tab. 28). Multa in praxi jucunda habet, sed theoria exigui momenti. Quoad praxes

opticas opus absolutum censeri potest JOHANNIS ZAHN *Oculus artificialis teledioptricus*. Editio altera auctior, sed vitiosior prodiit *Norimbergæ* An. 1702, in fol. (9 Alph. 8 plag.) cum figuris multis cum ligno, tum æri incis. Huc etiam spectat ATHANASII KIRCHERI *Ars magna lucis & umbræ* (Roma 1646, in fol. 10 Alph. 16 plag. Tab. 34).

§. 17. JOHANNES CHRISTOPHORUS KOLHANS in *Tractatu Optico* (Lips. An. 1663, in 8. 1 Alph. 15 plag.) non contemnenda prorsus dedit excerpta cum ad theoriā, tum ad praxin opticam spectantia, retentis ipsorummet Autorum verbis. Omnes tres Opticæ partes discursu vulgari recensuit in gratiam artificum JOHANNES MICHAEL CONRADI in *Optica Germanica*, quam sub titulo: *Der dreyfash geartete Sehe-Strahl*, Coburgi An. 1710, in 4. edidit (plag. 17, Tab. 25).

§. 18. *De poliendis vitris Commentarios* reliquit HUGENIUS, qui inter posthuma leguntur (§. 35). Hac arte excelluit ipse: primus enim lentes objectivas tanta exactitudine paravit, ut iis pares nullibi reperirentur, quemadmodum in Astronomicis docuimus & Dioptriciis. In Germania An. 1716, in 8. (plag. 14, Tab. 20) *Hale* prodiit sub titulo: *CHRISTIAN GOTTLIEB HERTELS vollständige Anweisung zum Glas schleiffen, wie auch zu Verfertigung der optischen Maschinen*. Erat Autor *Matheseos Pro-*

Professor in Academia illustri Lignicensi & in arte poliendo vitra plurimum exercitatus. Eandem notis illustravit JOANNES GEORGIUS LEUTMANNUS, qui & ipse hanc artem non sine successu excoluerat. Prodierunt *Wittebergæ* An. 1719, in 8. (plag. 7, Tabb. 21) sub titulo: *Neue Anmerckungen vom Glas schleifen*.

§. 19. Scriptis opticis accenseri merentur ea, in quibus microscopicae observationes recensentur. Pertinent huc I^o. ROBERTI HOOKE *Micrographia* Anglice scripta (*Londini* t. n. 1667, in fol. 3 Alph. 8 plag. Tabb. 38) II^o. Antonii van Leeuwenhoek scripta varia; nempe 1) *Arcana Naturæ detecta*, *Delphis* An. 1695, in 4. (Alph. 2, plag. 6, Tabb. 11) 2) *Continuatio Arcanorum Naturæ detectorum* Ibid. An. 1697, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tab. 7) 3) *Arcana Naturæ ope & beneficio exquisitissimorum microscopiorum detecta*, *Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. Alph. 3, Tabb. 26) 4) *Continuatio epistolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinensem* *Lugd. Batav.* An. 1696, in 4. (plag. 16½, Tabb. 10) 5) *Epistola ad Societatem Regiam Anglicam & alios illustres viros*, *Lugd. Bat.* 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 33). 6) *Epistola physiologica super compluribus naturæ arcanis*, *Delphis* An. 1719, in 4. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 31). Titulus generalis: ANTONII A LEEUWENHOEK *Opera omnia*, seu

Arcana naturæ ope exactissimorum microscopiorum detecta, experimentis variis comprobata, epistolis ad varios illustres viros, ut & ad integram, quæ *Londini* floret, sapientem Societatem datis comprehensa, impressus *Lugduni Batavorum* & scriptis istis diverso tempore nec eadem prorsus forma editis in unum fasciculum collectis præfixus. III^o. JOHANNIS FRANCISCI GRIENDELS VON AACH *Micrographia curiosa Germanica* (*Norimbergæ* An. 1687, in 4. plag. 9, Tabb. 35) IV^o. PHILIPPI BONANNI *Micrographia curiosa*, adjuncta observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur (*Romæ* An. 1691, in 4. 2 Alph. 12 plag. Tabb. 68).

§. 20. Inter scriptores Perspectivæ omnium maxime commendatur DESARGUES, cujus *methodum universalem exercendi Perspectivam* gallice conscriptam edidit ABRAHAMUS BOSSE, ex Gallico in Belgicum sermonem transtulit J. BARA. Prodiit *Amstelodami* An. 1686, in 8. (plag. 12, & figurarum æri incisarum 1 Alph.).

§. 21. Nec parum Perspectivæ studiosum juvant ANDRÆ ALBERTI Libri duo *De Perspectiva*, (*Norimb.* An. 1670, in fol. plag. 19, Tabb. 15): primis vero tyronum conatibus respondet BERNHARDI LAMY *Perspectiva* Gallice conscripta (*Parisii* An. 1701, in 8).

§. 22. Concinnas Praxium Perspecti-

ſpectivæ demonstrationes dedit JOH. FRANCISCUS NICERON ex Ordine Minimorum, in hac arte excellens, in *Thaumaturgo Optico*, cujus tantum pars prima *Parisiis* 1646, in fol. prodiit (2 Alph. 18 plag. Tabb. 42). Poſt mortem ejus immaturam Anno 1652, prodiit *Perspectiva curioſa* Gallice conſcripta in 4. ſub ejuſdem nomine, in libros quatuor di- viſa, in qua plura continentur, quam in *Thaumaturgo*.

§. 23. Ad praxin properantibus & theoriam ſpinofam averſantibus ſatisfacit Anonymus Gallus e Societate Jeſu in *Perspectiva practica* Gallice *Parisiis* An. 1642, in 4. publi- cata & a JOHANNE CHRISTOPHORO REMBOLDO Germanice verſa atque *Auguſta Vindelicorum* An. 1710, in 4. edita (1 Alph. 8 plag. cum 150 Tabulis æri inciſis atque textui insertis). Enimvero An. 1663. prodiit editio altera duabus partibus & auctior, & quoad primam emendatior ac locu- pletior. (Tom. I, Alph. 2, plag. 10. Tom. II, Alph. I, plag. 13. Tom. III, Alph. 2, plag. 8). In parte ſe- cunda docetur *Perspectiva corporum inclinatorum*: in tertia agitur de la-

quearibus & anamorphoſibus opti- cis, catoptriciſ & dioptriciſ.

§. 24. Praxin *Perspectivæ* multis exemplis illuſtrat P. ANDREAS PUZZO in *Architectura Pictorum & Sculptorum*. Tomus prior prodiit *Rome* An. 1693, in fol. poſterior ibidem An. 1700, in fol. Uterque totidem continet Ta- bulas æneas, quot folia, nimirum prior 102; poſterior 120, Prior Germanice prodiit *Auguſta Vindelico- rum* An. 1706, in fol. poſterior ibi- dem An. 1709.

§. 25. An. 1711, G. J. GRA- VESANDIUS, Juris Doctör, nunc Mathematicum Profeſſor Lugdunenſis, *Hagæ Comitum* idiomate Gallico evul- gavit Tentamen de *Perspectiva*, in 8. (plag. 12, Tabb. 32). Titulus libelli: *Essai de Perspective*, in quo multipli- ces regulas ſeu methodos demon- ſtrat.

§. 26. Cæterum ſcriptoribus Op- ticis adhuc accenſendus eſt HONO- RATUS FABRI, e Societate Jeſu, qui in *Synopſi Optica* (*Lugd.* An. 1667, in 4. 1 Alph. 8 plag.) illa omnia, quæ ad Opticam, Dioptricam & Catoptri- cam pertinent, breviter quidem, ac- curate tamen demonſtrat. *

* Imprimis commendari meretur ROBERTI SMITH Optices Systema integrum, quod ſub titulo: *A compleat System of Opticks*, prodiit Can-

tabrigie, An. 1738, in 4. reg. (Tom. I: Alph. 1. plag. 15, Tabb. 45. Tom. II, Alph. 2, Tabb. 38).

CAPUT IX.

De Astronomia.

§. 1. **S**cripta astronomica sunt varii generis. Aut enim observationes recensent, aut calculos motuum cœlestium trigonometricos & geometricos exponunt, aut tabulas Astronomicas complectuntur, aut usum globi cœlestis, aut denique corporum mundanorum rationem declarant.

§. 2. Veterum observationes, quas inter eminent observationes HIPPARCHI, conservavit PTOLEMÆUS in *Almagesto*. An. 882, apud Saracenos observationibus operam dedit ALBATEGNIUS. Ab An. 1457, Norimbergæ iisdem incubuit JOHANNES REGIOMONTANUS (vero nomine MÜLLER), cui successere discipuli JOHAN. WERNERUS & BERNHARDUS WALTHERUS, ab An. 1475, usque ad An. 1504, observationes suas continuantes. REGIOMONTARI atque WALTHERI observationes prodire *Norimbergæ* cum quibusdam aliis REGIOMONTANI atque PURBACHII scriptis An. 1544, in 4. (plag. 22). Titulus operis: *Scripta JOHANNIS REGIOMONTANI de Torqueto, Astrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica baculoque Astronomico & observationibus cometarum; item observationes motuum Solis ac stellarum tam fixarum, quam*

erraticarum; item libellus M. GEORGII PURBACHII de Quadrato Geométrico. Ab An. 1509, COPERNICUS, post eum WILHELMUS Hassiæ Landgravius cum Mathematico CHRISTOPHORO ROTHMANNO & Mechanico suo JUSTO BYRGIO Cassellis, & TYCHO DE BRAHE Uraniburgi observarunt. Incepit observationes suas TYCHO An. 1582, easque continuavit usque ad An. 1601, majori & meliori instrumentorum apparatu, quam ante ipsum fecerat nemo. Omnes observationes hactenus recensitæ continentur in *Historia cœlesti*, quæ jussu FERDINANDI III, Imperatoris *Ratisbonæ* 1672, in fol. prodiit (12 Alph. 6 plag. Tabb. 3). Describuntur quoque in eadem instrumenta TYCHONIS; una exhibentur observationes MOESTLINI, SCHICKHARDI aliorumque. Ipse alias Tycho instrumenta sua descripsit An. 1602, in *Astronomiæ illustrata Mechanica*, *Norimbergæ* An. 1602, in fol. edita (Alph. 1, plag. 11). WILHELMI vero Hassiæ Landgravii observationes, una cum observationibus REGIOMONTANI atque WALTHERI edidit WILLEBRORDUS SNELLIUS, *Lugduni Batavorum* An. 1618, in 4. (Alph. 1, plag. 13).

§. 3. Ma-

§. 3. Magis sumtuoso instrumentorum apparatu & majori studio, quam TYCHO, observationibus cœlestibus vacavit JOHANNES HEVELIUS, Consul Dantiscanus. Instrumentorum apparatus descripsit Tomo primo *Machine cœlestis* (*Gedani* An. 1673, in fol. reg. 5 Alph. 4 plag. Tabb. 30): Tomo secundo (*Gedani* An. 1679, in fol. 14 Alph. 6 plag.) observationes 48 annorum comprehendit. Dolendum vero, quod Tomi præsertim posterioris exemplaria pleraque ferali flamma fuerint absumta. Equidem ROBERTUS HOOKE in *Animadversionibus in Tomum primum* Anglico sermone editis *Londini* An. 1674, in 4. (plag. 11, Tabb. æn. 3) instrumenta *Heveliana* reprehendit ceu minus exacta; sed celeberrimus HALLEIUS, consensu Societatis Regiæ Britannicæ, Dantiscum An. 1679, profectus & instrumentorum, & observandi accurationem approbavit. Observationes, quas in gratiam hospitis instituit, una cum aliis reperiuntur in *Anno climacterico* s. *Rerum Uranicarum observationum quadragesimo nono* (*Gedani* 1685, in fol. 2 Alph. 6 plag. Tabb. 8). Jam ante An. 1661, celeberrimus Galliæ Astronomus ISMAEL BULLIALDUS Dantiscum venit Observatorium HEVELII visurus & modum ejus observandi examinaturus. Quid uterque, BULLIALDUS nimirum atque HALLEIUS, de eodem senserint; docent *Excerpta ex literis illustrium*

& clarissimorum virorum ad D. JOH. HEVELIUM perscriptis *Judicia de rebus astronomicis ejusdemque scriptis*, quæ *Dantisci* An. 1683, in 4. (Alph. 1, plag. 5) edidit JOANNES ERICUS OLHOPIUS p. 67, 68, 71, 79, 187.

§. 4. In Anglia seculo superiori observandi studio clarus extitit JEREMIAS HOROCCHIUS ab A. 1636 usque ad An. 1640. Ejus observationes ex epistolis ad GUIL. CRABTRIUM, suum in studiis astronomicis socium, excerptæ leguntur in *Operibus posthumis* (*Londini* An. 1673, in 4. 3 Alph. 12 plag. Tabb. 2). Adjiciuntur excerpta ex schedæsmatis GUIL. CRABTRII de observationibus ab ipso institutis An. 1635, 36, 37 & 38.

§. 5. In Italia JOH. BAPTISTA RICCIOLUS superiori seculo observatorem egit, qui præcipuas observationes suas in *Astronomia Reformatâ* (*Bononia* An. 1665, in fol. 6 Alph. 5 plag.) cum selectis veterum & recentiorum observationibus contulit & de Astronomiæ perfectione inde judicium tulit.

§. 6. Selectæ celeberrimi CASSINI aliorumque observationes extant in præstantissimo opere, cujus titulus: *Recueil d'observations faites en plusieurs voyages par ordre de Sa Majesté, pour perfectionner l'Astronomie & la Géographie, avec divers Traités Astronomiques par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences.* (*Paris.* An. 1693, in fol. 6 Alph. 12 plag. Tabb. 11).
Vide

Vide supra §. 37. c. 1. Ejusdem CASSINI, aliorumque Astronomorum Regiorum, CASSINI junioris, MARALDI atque PHILIPPI DE LA HIRE observationes complures extant in *Commentariis Academia Regiæ Scientiarum*, qui quotannis prodeunt: de quibus supra (§. cit.). Habemus quoque observationes non contemnendas in *Transactionibus Anglicanis*, *Miscellaneis Berolinensibus*, *Commentariis Petropolitans*, *Actis Eruditorum* & *Diario Trevoltensi*. Vide supra (§. 36, 38, 39).

§. 7. In Anglia longa annorum serie observationes cœlestes continuavit observator celeberrimus JOANNES FLAMSTEDIUS. Quænam in historia ejus cœlesti, ab Astronomis dudum desiderata, essent comparitura, in *Miscellaneis Berolinensibus* p. 263 & seqq. docetur. An. 1712, *Historiam cœlestem* FLAMSTEDII edidit HALLEIUS *Londini* in fol. reg. (Alph. 6, plag. 8, Tab. 5) Libris duobus, quorum prior exhibet Catalogum stellarum Fixarum Britannicum novum & locupletissimum, una cum earundem Planetarumque omnium observationibus, sextante, micrometro &c. habitis; posterior transitus siderum per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice complectitur. Nimirum An. 1704, aliquot Societatis Regiæ Sodalibus, FRANCISCO nimirum ROBARTES, CHRISTOPHORO WRENNO, ISAACO Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

NEWTONO, DAVIDI GREGORIO & JOHANNI ARBUTHNOT ex chartis FLAMSTEDII observationes ejus edendas suis sumtibus commiserat serenissimus Daniæ Princeps GEORGIUS, Reginæ ANNÆ conjux: Sed cum moreretur, antequam liber observationum primus absolveretur, tandem Regina, FLAMSTEDII oculis in nascentia indies siderum phœnomena intentis & in ætate provec̃ta minus acutis, hanc curam demandavit EDMUNDO HALLEIO, ut ea quæ adhuc deerant perficeret. Enimvero cum editio non prorsus esset ad mentem FLAMSTEDII, de nova ipse cogitavit: cui tamen immortuus est An. 1719, die ultimæ Decembris, cum magna ejus pars typis jam esset descripta, ita ut tandem denuo HALLEIUS editionem hanc novam ad umbilicum perducere teneretur. Prodiere itaque *Historia cœlestis Britannica* Volumina tria, Autore JOANNE FLAMSTEDIO, Astronomo Regio, *Londini* in fol. maj. An. 1725, (Alph. 13). Volumen I, continet stellarum fixarum & planetarum omnium observationes, sextante & micrometro peractas, subjunctis locis, quæ ex observationibus deducta sunt. Volumen II, complectitur fixarum stellarum & planetarum omnium transitus, per planum arcus meridionalis & distantias eorum a vertice, nec non Solis, Lunæ & Satellitum Jovis observationes arcu meridionali habitas & loca planeta-
L rum

rum inde derivata ab An. 1689, ad An. 1720. Volumen III, comprehendit Historiam Astronomiæ, Catalogos fixarum ante autorem editos una cum ABRAHAMI SHARPII Indice fixarum australium in nostro hemisphærio non conspicuarum & Catalogum Britannicum Autoris ad A. C. 1689, cui subjunguntur longitudes & latitudes stellarum fixarum, quæ a Luna tegi possunt, sigillatim & appendicula Tabularum astronomicarum a SHARPIO constructarum. Optandum quoque foret, ut selectæ observationes Hafnienſes ROEMERI, Berolinenses KIRCHII ac viduæ ipsius, Norimbergenses EIMARTI atque WURTZELBAUERI lucem publicam adſpicerent.

§. 8. FRANCISCI BLANCHINI *Observationes astronomicas & geographicas per Italiam passim habitas* nuperime Veronæ in fol. edi curavit EUSTACHIUS MANFREDI, Astronomus Bononiensis.

§. 9. Observationes physicæ, mathematicæ, atque botanicæ jussu Regis Christianissimi in America Meridionali & India occidentali ab An. 1701, usque ad annum 1712, a LUDOVICO FEUILLE'E, Minimo, factæ sub titulo: *Journal des Observations physiques, mathématiques, & botaniques* prodire Parisiis duobus Vol. in 4. reg. 1714, & 1725, (Vol. I, Alph. 4, plag. 6, Tabb. æn. 68. Vol. II, Alph. 3, plag. 5, Tabb. æn. 57,

& An. 1729. ST. SOUCIET, e Societate Jesu, idiomate Gallico *Parif.* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 18, Tabb. 8) publicæ luci exposuit *Observationes mathematicas, astronomicas, geographicas, chronologicas & physicas, ex antiquissimis Sinarum libris excerptas, & recentius a Patribus Societatis in India & China factas.* Addit An. 1732, Tomum secundum, qui continet *Historiam Astronomiæ Sinarum* a R. P. GAUBILE Societate Jesu conscriptam, cum dissertationibus (Alph. 2, plag. 5, Tabb. 3). Huc etiam referendæ sunt FRANCISCI NOEL, Societatis Jesu, *Observationes mathematicæ & physica in India & China facta* ab An. 1684, usque ad An. 1708, quæ *Pragæ* 1710, in 4. (plag. 14, Tab. 1) prodierunt.

§. 10. Astronomiam Geometricam inter veteres justo volumine exposuit CLAUDIUS PTOLEMÆUS anno Christi 147 mortuus. Opus ejus, quod *μυστὴρ σύνταξις* inscribitur, A. C. 827, jussu MAIMONIS Regis Saracenorum in Arabicum translatum & An. 1528 ex Arabico in Latinum versum a GEORGIO TRAPEZUNTIO & a LUCA GAURICO Mathematicum Professore Neapolitano revisum, illoque anno primum editum. An. 1551, idem cum ejusdem PTOLEMÆI scriptis Astrologicis, libris nempe quatuor *de judiciis, Centiloquio & significationibus stellarum inerrantium* sub titulo: Cl. PTOLEMÆI *omnia, quæ extant, Opera præter Geographiam,*

graphiam, Basilea in fol. (6 Alph.) opera ERASMI OSWALDI recutum.

§. 11. Cum ipsum Astronomiam integram complectatur, sed ad caput tyronum minime sit accommodatum; GEORGIUS PURBACHIVS in commodiorem formam id redigere coepit. Sed cum vix coepto labore rebus humanis valedicere cogeretur; REGIOMONTANUS discipulus, suasu Praeceptoris, telam per textam absolvit. Recusi sunt ejus Libri tredecim in PTOLEMÆI magnam compositionem, quam *Almagestum* vocant, Norimbergæ 1550, in fol. (2 Alph. 11 plag.) & in iis universa doctrina de cœlestibus motibus, magnitudinibus, eclipsibus &c. in epitomen redacta proponitur. Commendantur merito Astronomiæ studiosis, praesertim si qui Astronomiam veterem cognoscere in animum induxerint.

§. 12. Juxta formam *Almagesti* inter Arabes ALBATEGNIUS opus de *Scientia stellarum* composuit, Norimbergæ An. 1537, & Bononiæ An. 1545, in 4. editum, in quo ex propriis observationibus Astronomiam perficere studet.

§. 13. Seculo decimo sexto NICOLAUS COPERNICUS in libris 6 *Revolutionum cœlestium* aliquoties recusi, resuscitato PHILOLAI de motu Telluris dogmate, primus ad theoriæ cœlo consonam fundamenta posuit. Prostat inter alias editiones *Basileensis* An. 1566, in fol. (Alph.

4. plag. 14). COPERNICUM secutus PHILIPPUS LANSBERGIUS theorias motuum cœlestium faciles dedit (§. 26, cap. 1).

§. 14. Ex adverso autem CHRISTIANUS SEVERINUS LONGOMONTANUS in *Astronomia Danica*, in qua integram Astronomiam pertractat & regulas exemplis veris illustrat, theorias intricatiores proposuit, cum motum Telluris annum circa Solem in Astronomiam cum TYCHONE admittere nolle. (*Amstelod.* An. 1640, in fol. 6 Alph.) Etenim extra omnem controversiam positum est, motus Planetarum per hypothesein Terræ motæ non modo facilius, quam in hypothesei Terræ quiescentis explicari posse; verum etiam loca planetarum in ista computata cum cœlo demum consentire. Unde etiam Inquisitores in Italia permittunt, ut eadem utantur Astronomi, etsi eam pro veritate demonstrata venditari non ferant.

§. 15. Omnes omnino Astronomi usque ad KEPLERUM motum planetarum circularem statuerunt: unde theoriæ ipsorum cœlo non satis responderunt. Hanc Astronomiam circularem omnium optime exposuit ANDREAS TACQUET in octo de *Astronomia* libris (§. 28, cap. 1). Dolendum vero, quod præcepta nullis exemplis illustraverit, ut magis inservirent studiis tyronum.

§. 16. Enimvero vir acerrimi judicii ingeniique sagacissimi JOHANNES

NES KEPLERUS observationibus TYCHONIS (quas etiam adhibuerunt LONGOMONTANUS atque LANSBERGIUS) felicissime usus in *Commentariis de motibus stellæ Martis* seu *Astronomia nova* αἰτιολογικῇ An. 1609, in fol. (4 Alph.) theoriam planetarum ellipticam proposuit & in *Epitome Astronomiæ Copernicana* (Franc. 1635, in 8. 2 Alph. 15 plag.) ad omnium planetarum motus supputandos adhibuit, ac primus in causas physicas motuum cœlestium inquirere cœpit. Hanc theoriam causis physicis convenientem demonstravit NEWTONUS lib. 3 Princ. Mathem. Philos. Nat. itemque LEIBNITIUS in Tentamine de causis motuum cœlestium physicis, quod legitur in *Actis Eruditorum* An. 1689, p. 82, quod idem suo modo ostendere conatus PHILIPPUS VILLEMOT in *Novo systemate motus Planetarum*, Lugduni An. 1707, in 12. (plag. 12, Tabb. 12) edito. Phænomenis rectius, quam cæteras hypotheser, satisficientem deprehenderunt Astronomi.

§. 17. Equidem KEPLERI inventa sprevit LANSBERGIUS suæque iisdem anteposuit: sed optime illum contra hujus insultus defendit HOROCCIUS in posthumis (§. 4), qui in extollendis laudibus KEPLERI, a quo, sub initium studii astronomici, LANSBERGII magnificis promissis & nimium acerbis in KEPLERUM stricturis factus fuerat alienior, veluti extra seipsum rapitur.

§. 18. ISMAEL BULLIALDUS in *Astronomia Philolaica* (Parisiis An. 1645, in fol. 7 Alph. 20 plag.) KEPLERI theoriam emendare conabatur, ut scilicet calculus magis geometricus fieret, cum KEPLERUS regula positionum interdum uti cogatur (§. 691, *Astron.*): ostendit vero SETHUS WARDUS, Astronomiæ in Academia Oxoniensi Professor, in *Inquisitione in Astronomiam Philolaicam* BULLIALDI, quæ Tractatui de Cometis subiecta prodiit Oxonii An. 1653, in 4. (plag. 14), errores quosdam ab ipso fuisse commissos: quos agnoscens BULLIALDUS in *Fundamentis Astronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & assertis, adversus WARDI impugnationem* (Parisiis An. 1657, in 4. plag. 7) emendavit. Cæterum WARDUS *Idea quoque Trigonometria demonstrata*, quæ cum prælectione de Cometis, Oxonii An. 1654, in 4. (plag. 3) prodiit, inquisitionem aliquam in BULLIALDI Astronomiæ Philolaicæ fundamenta adjecit.

§. 19. SETHUS WARDUS in *Astronomia Geometrica* (Londini 1656, in 8. reg. 14½ plag.) methodum geometricam proposuit motus siderum computandi; sed a veris motuum regulis per KEPLERUM stabilitis recedit. Eandem anno sequenti proposuit Comes DE PAGAN in *Theoria Planetarum*, Parisiis An. 1657, in 4. idiomate patrio edita. Non ignoravit eam KEPLERUS; sed ex *Epitome Astronomiæ Copernicana* haud obscure

scire colligitur, quod ideo rejecerit, quia veris naturæ legibus adversam reperit.

§. 20. BULLIALDI hypothesin excoluit VINCENTIUS WING in *Astronomia Britannica* (Londini An. 1669, in fol. 7 Alph. 5 plag.) ubi præcepta singula Astronomiæ practicæ veris exemplis illustrantur ad caput tyronum studii Astronomici. Præmittit *Trigonometriam* planam & sphaericam, in qua exemplis illustrantur problemata, & in sphaerica exhibet regulam catholicam NEPERI.

§. 21. *Wardianam* ad numeros revocavit JOHANNES NEWTON in *Astronomia Britannica* patrio sermone conscripta (Lond. 1657, in 4. 1 Alph. 20 plag.). Eandem excoluit THOMAS STREETE in *Astronomia Carolina*, Londini An. 1661, in 4. (plag. 29) primum edita & non sine augmento ibidem 1710. in 4. (2. Alph. plag. 3,) recusa. Id peculiare habet, quod motum Apheliorum & Nodorum sustulerit. Astronomiam hanc Carolinam ex idiomate Anglico in Latinum transtulit GABRIEL DOPPELMAYER & Norimbergæ An. 1705, in 4. (Alph. 1, plag. 13, Tabb. 5) edidit.

§. 22. Omnia Astronomorum tam veterum, quam recentiorum, hypotheses atque inventa, quæ tunc temporis prostabant, in unum volumen coniecit JOHANNES BAPTISTA RICCIOLUS e Societate Jesu in *Almagesto Novo* (Bonon. An. 1651, in fol.

16½ Alph.). Contra DAVID GREGORIUS in *Elementis Astronomiæ Physicæ & Geometricæ* (Oxonia 1702, in fol. 5 Alph. 12 plag.) recentiorem Astronomiam exposuit, COPERNICI, KEPLERI atque NEWTONI inventis superstructam, quorum ille verum systema mundi, iste veras planetarum orbitas ac motuum leges, hic tandem omnium causas physicas detexit. Multum præstantiæ operis accederet, si numeris ex recentioribus observationibus illustraretur. In Anglia in linguam Anglicam versa sunt hæc Astronomiæ Elementa: Latina vero recusa sunt *Geneva* An. 1726, in 4. (Alph. 5, Tabb. 46) cum nonnullis additamentis.

§. 23. Nucleum Astronomiæ recentioris exhibuit GUILIELMUS WHISTON in *Prælectionibus Astronomicis* (Cantabrigiæ An. 1707, in 8. reg. 1 Alph. 6 plag.) solam tamen partem theoricam pertingit. Idem fuit institutum JOHANNIS KEILL in *Introductione ad veram Astronomiam* (Oxonia An. 1718, in 8. Alph. 1, plag. 9½, Tabb. 2), in qua recentissima continentur Astronomorum inventa. Alias Tyronibus imprimis commendandi sunt NICOLAI MERCATORIS *Institutionum Astronomicarum* Libri duo (Londini An. 1676, in 8. 1 Alph.), in quo & Sphaerica, & theorica, juxta hypotheses tam veteres, quam recentiores, breviter explicatur & exemplis illustratur, calculus quoque astronomicus perspicue docetur.

§. 24. Quodsi cui volupe fuerit, theoricæ Veterum animi gratia cognoscere; ei satisfaciēt PURBACHIUS in *Theoricis Planetarum* sæpius editis. Recusæ sunt *Basilea* An. 1569, in 8. cum REGIOMONTANI *disputationibus contra Cremonensia in planetarum theoricis deliramenta* & JOHANNIS ESSLERI *speculo Astrologico* (plag. 18). Accessere huic editioni CHRISTIANI WURSTISII, Mathematicum Professoris Basileensis, *questiones novæ in illas theoricæ* (1 Alph. 5 plag.). Explicat autem PURBACHIUS in tyronum gratiam solas theoricæ planetarum, forma calculi geometrici neglecta, quæ ex REGIOMONTANI *Epitome Almagesti* PTOLEMÆI hauriri debet. Hæc Theoricæ prolixo ac perspicuo Commentario illustravit ERASMUS OSWALDUS SCHRECKENFUCHSIUS, qui *Basilea* An. 1556, in fol. (Alph. 5, plag. 5) prodiit, ita ut Astronomiam veterem, qualem tradidit PTOLEMÆUS, omnium optime ex hoc opere haurire possint tyrones. Theoricam Astronomiam tantummodo explicavit in gratiam tyronum PURBACHIUS, quia isto tempore in Scholis doctrina sphaerica tradebatur ex JOANNIS DE SACRO BOSCO libello *de Sphæra*, sæpiissime recusæ, quem prolixo Commentario illustravit CLAVIUS Tomo tertio Operum (§. 24). MICHAEL MOESTLINUS, Matheseos Professor Tubingensis, KEPLERI Præceptor, in *Epitome Astronomiæ* (Tubinge An.

1610, in 8. 1 Alph. 12 plag.) non modo theoricæ Planetarum, sed & partem Astronomiæ sphaericam explicat.

§. 25. Tabulæ Astronomiæ antiquissimæ sunt *Ptolemaica*, in PTOLEMÆI *Almagesto*; sed hodie cum cœlo non amplius consentiunt. Eas An. 1252, corrigi curavit ALPHONSUS XI Rex Castiliæ, usus inprimis operæ ISAACI HAZAN Judæi, impensis 400000 aureorum factis. Hinc enatæ sunt *Tabulæ Alphonsina*, quibus ipse Rex præfationem præmisit. Sed mox harum etiam defectum agnoverunt Astronomi periti PURBACHIUS & REGIOMONTANUS: unde REGIOMONTANUS & post ipsum WALTHERUS atque WERNERUS observationibus cœlestibus incubuerunt; non tamen fata permisere, ut iis emendandis manum admoverent. Sane *Tabulæ resolutæ*, quas dedit REGIOMONTANUS, ex Alphonsinis derivatæ. Hæc correctas & locupletatas edidit SCHONERUS An. 1536. Ea reperire licet in Operibus ejus mathematicis, de quibus postea dicemus. Neque ab his abludunt *Tabulæ resolutæ de supputandis siderum motibus* JOANNIS VIRDUNGI HAFFURDII, quas An. 1542, *Norimbergæ* edidit JACOBUS CURIO, nunquam antea typis excusas, in 4. (plag. 15), nisi quod sint breviores.

§. 26. NICOLAUS COPERNICUS in libris *Revolutionum cœlestium* tabulis Alphonsinis alias substituit ex recentioribus & partim propriis observationibus

tionibus a se supputatas; sed ex COPERNICI observationibus & theoriis mox ERASMUS REINHOLDUS *Tabulas Prutenicas* procudit, aliquoties recusas. Utor ego editione *Tubingensi* An. 1571, in 4. 2 Alph. 15 plag.

§. 27. Tabularum Prutenicarum imperfectionem juvenis agnovit TYCHO DE BRAHE: qua agnita permotus, ut tanto cum fervore observationes coelestes venaretur. Ipse tamen nonnisi Solis ac Lunæ motus inde restituit *Progymnasmatum* Tomo primo. Sed mox iisdem utebantur LONGOMONTANUS, qui in *Astronomia Danica* exemplo PTOLEMÆI & COPERNICI theoricis singulorum Planetarum *Tabulas* motuum subjunxit, *Danicarum* nomine hodie celebratas, & KEPLERUS, cujus opera prodire *Tabula Rudolphina* (*Ulmæ* An. 1627, in fol. 2 Alph. 20 plag.), quæ hodiernum magno in pretio habentur, anterioribus omnibus prælatæ. Has in aliam formam transmutavit MARIA CUNITIA, cujus *Urania protia* sive *Tabula Astronomica mire faciles* vim hypotheseum physicarum a KEPLERO proditarum complexæ, facillimo calculandi compendio, sine ulla Logarithmorum mentione phænomenis satisficientes Latine & Germanice *Olsnæ* in Silesia An. 1650, in fol. (6 Alph. 4 plag.) prodire, ut scilicet calculus *Rudolphinus* difficilis facilius redderetur. Idem institutum fuit MERCATORIS in *Astronomicis Institutionibus* (§. 23)

& JOH. BAPTISTÆ MORINI, cujus *Tabula Rudolphina* in compendium redactæ versioni Latinæ Astronomiæ Carolinæ STREETII subjunctæ (§. 21).

§. 28. Equidem LANSBERGIUS Tabularum Rudolphinarum fidem subleſtam reddere tentavit & *Tabulas motuum coelestium perpetuas*, quas vocat, condidit (§. 26, cap. 1) sed non solum HOROCCIUS hominis arrogantiam retudit in *Astronomia Kepleriana defenſa*, quæ maximam poſthumorum partem absolvit (§. 4); verum etiam reliqui Astronomi parum eidem tribuerunt. Similiter *Rudolphinarum* autoritatem non imminuere *Tabule Britannicæ* WINGII (§. 20), quæ in ipsius *Astronomia Britannica* leguntur, & NEWTONI, quas in sua *Astronomia Britannica* proposuit (§. 21), nec Gallicæ Comitissæ DE PARGAN (*Parif.* An. 1658, in 4. 1 Alph. 11 plag.), *Novalmageſtica* RICCIOLI, quæ extant in ejusdem *Astronomia Reformata* (§. 22), *Philolaica* BULLIALDI, quæ leguntur in *Astronomia Philolaica* (§. 18) & *Carolinæ* STREETII in *Astronomia Carolina* (§. 21). Inter meliores tamen censentur *Philolaicæ* & *Carolinæ*, ita ut ob benignum FLAMSTEDII, optimi hac in re arbitri, judicium Carolinas *Prælectionibus* ſuis *Astronomicis* subjunxerit WHISTON (§. 23).

§. 29. Novas quoque Tabulas ex datis *Keplerianis* & *Bullialdinis* juxta propriam hypotheseſin Cono-ellipticam

cam supputavit JOH. JACOBUS ZIMMERMANN Ecclesiæ Württembergæ Bieticanæ Diaconus, in *Prodromo Bicipite Cono-elliptica & a priori demonstrata Planetarum Theorices* (Stuttgartiæ An. 1679, in 4. plag. 15); sed nullam hæcenus in foro Astronomico auctoritatem adeptæ.

§. 30. *Tabula* omnium novissimæ sunt *Ludoviciana*, quas Astronomus præclarus PHILIPPUS DE LA HIRE ex solis observationibus, citra ullius hypotheseos subsidium, deduxit: quod ante inventa micrometra, tubos & horologium oscillatorium impossibile habebatur. Prodiere *Parisiis* An. 1702, in 4. (1 Alph. 4 plag. Tabb. 4) cum ante jam An. 1687, *Tabulæ Solares & Lunares* sub titulo *partis prioris Tabularum Astronomicarum* (in 4. plag. 17) lucem adspexissent. Haberi possunt pro *Tabulis Rudolphinis* correctis. Dudum etiam in manibus Astronomorum versantur JOH. DOMINICI CASSINI *Tabule astronomica* * & in Angliā novas condidit HALLEIUS.

§. 31. JOHANNES HEVELIUS in *Prodromo Astronomiæ* (Gedani An. 1690, in fol. 4 Alph. 7 plag. Tab. 1) cum *Catalogo fixarum ex propriis observationibus deducto* *Tabulas* quoque Solares exhibuit domesticis observationibus superstructas, quæ præstantissimæ habentur. Optandum vero

fuiſſet, ut fata permisissent, quo reliquorum quoque Planetarum *Tabulas* conderet observationum suarum fructum laturus celeberrimus Autor.

§. 32. Primus fixarum *Catalogum* confecit ex domesticis observationibus HIPPARCHUS, quem ad suum tempus reductum PTOLEMAEUS exhibuit in *Almagesto* lib. 7. Novum dedit TYCHO *Progymnasmatum* Tomo primo p. 257, & seqq. quem extendit KEPLERUS in Rudolphinis. Exhibet fixarum *Catalogum*, sed tantummodo correctum, non vero ex propriis observationibus conditum RICCIOLUS in *Astronomia Reformata*. Ast *Tabula Longitudinis ac Latitudinis stellarum fixarum* ex observatione ULUGH BEIGHII, TAMERLANI Magni Nepotis, ex MSC. Persicis Latine vertit, *Commentariis* illustravit & *Oxonii* An. 1665, in 4. (1 Alph. 13 plag.), edidit THOMAS HYDE. Addit MUHAMMEDIS TIXINI *Tabulas declinationum & ascensionum rectorum*. HEVELIUS in *Prodromo* *catalogos* fixarum omnes, qui hæcenus prostant, una exhibet atque inter se comparat.

§. 33. Enimvero locupletissimus *Fixarum* omnium, quæ conspici possunt, ex propriis observationibus conditus a FLAMSTEDIO & sub titulo: *Catalogi Fixarum Britannici*, exhibetur in *Astronomi summi Historia*

* Edidit nuperrime JACOBUS CASSINI Domin. filius, *Tabulas Astronomicas*, una cum *Elementis Astronomiæ* gallice, *Parisiis*, in 4. 2 Vol. An. 1740. Primum volumen, quod Astrono-

miam complectitur, habet Alph. 3, plag. 15, Tabb. 20. Alterum quod *Tabulis* destinatur, constat Alph. 1, plag. 3, Tabb. 5.

storia cœlesti; de qua abunde diximus superius (§. 7).

§. 34. Astra describunt & schematicis illustant JOHANNES BAYERUS in *Uranometria*, Ulmæ An. 1661, quæ prodiit textu in 4. figuris in folio impressis (plag. 13, Tab. 48), quæ in citandis stellis utuntur Astronomi, & JOHANNES HEVELIUS in *Firmamento Sobiesciano* (Gedani An. 1690, in fol. plag. 6, Tab. æn. 54). Optandum vero fuisset, ut literas, quibus ad indigitandas stellas usus fuit BAYERUS, etiam HEVELIUS retinuisset: id quod fecit JOHANNES FLAMSTEDIUS in opere magnifico *Atlantis cœlestis*, quod Londini An. 1729, in fol. reg. (plag. 5, Tab. 29) prodiit. Compendia usibus tyronum servientia sunt ÆGIDII STRAUCHII *Astrognosia* (Witteberge An. 1684, in 12. plag. 9, Tab. 25) & WILHELMI SCHICKARDI *Astrosopium* (Lipsiæ An. 1698, in 12. plag. 6, Tab. 2).

§. 35. Globi cœlestis constructiōnem & usum perspicue explicavit SCHONERUS in Tractatu, qui inter opera ipsius extat. Recentius præter alios usum globi cœlestis docent GUILIELMUS BLEAU in *Institutione Astronomica de usu globorum* (Amstelod. An. 1690, in reg. 8. plag. 16) & BION in libro Gallico ejusdem argumenti, qui sub titulo *Usage des Globes célestes & terrestres, & des sphères*, Parisiis An. 1699, in 12. reg. Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

(16 plag. Tab. 26) prodiit, ac nuper auctior recusatus.

§. 36. Librum BIONIS Germanice vertit & annotationibus nonnullisque additamentis locupletavit D. CHRISTIANUS PHILIPPUS BERGER. Prodiit Lemgovie sub titulo: *Des Herrn BIONS Abhandlung von der Welt-Beschreibung und dem Gebrauch derer Himmels und Erd-Kugeln auch Sphären* An. 1736, in 8. (Alph. 1, plag. 19, Tab. 35). Explicat hic Autor in altera præsertim editione, quæ ex Astronomia & Geographia tanquam cognita supponi debent, siquidem usum utriusque Globi, terrestris scilicet ac cœlestis, intelligere volueris. Adduntur etiam physica de Meteoris & alia, quæ ad Calendarii notitiam faciunt.

§. 37. Cum LOTHARIUS ZUMBACH DE KOESFELD, Med. D. postea Matheseos Professor in illustri Collegio Carolino, quod Cassellis erat, novos Globos, cœlestem juxta Catalogum fixarum HEVELII & terrestrem ex recentissimis observationibus, GERARDO VALK chalcographo construxisset, adornationem quoque & distributionem ac usum Globorum descripsit. Enimvero quia Globus cœlestis tantummodo satisfacit phænomenis primi mobilis, novum excogitavit instrumentum astronomicum, quale adhuc desiderari arbitrabatur, quo loca & motus Planetarum atque stellarum fixarum proprii in longitudinem & latitu-

latitudinem Zodiaci, eclipses Solis & Lunæ, occultationes stellarum, aliaque plurima inde derivata, absque calculo exacte, facile, ac promte exhibentur. Instrumentum hoc *Planetolabium* appellavit & GERARDUS VALK dextre idem præparavit. Descriptioni itaque Globorum adjunxit descriptionem Planetolabii sui, explicans omnem ejus rationem & usum. Utraque descriptio sub titulo: *Praxis Astronomiæ utriusque, ut & Geographiæ exercita per usum Globi cælestis & Terrestris, tum & Planetolabii*, prodiit *Amstelodami* An. 1700, in 4. Descriptio globorum constat plag. 18, Tabb. 4. Planetolabii plag. 9, Tabb. 2. Supponit illa ad manus esse Globos, hæc Planetolabium. Equidem SCHÖNERUS jam invenerat Organum Uranicum, quod vocat, e quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri mediique planetarum motus reperiuntur, & quod sub finem operum describitur; cum tamen ejus constructio nitatur hypothefibus Veterum, ZUMBACHII vero Planetolabium secundum hypothefin recentiore ellipcticam, & *Bullialdi* inprimis Astronomiam Philolaicam fuerit constructum, & multo accuratius exhibeat loca planetarum; quin non inutilem operam sumserit ZUMBACHIIUS dubitandum non est. Ne quid in mechanica Astronomiæ Theoricæ parte desiderari posset, addidit idem *Jovilabium* & *Saturnilabium*, quorum isto loca Satellitum Jovis, hoc au-

tem loca Satellitum Saturni, absque calculo ad datum quodcunque tempus determinantur. *Descriptio Jovilabii* prodiit *Amstelodami* An. 1716, in 4. (plag. 6, Tab. 1); *Saturnilabii* vero ibid. An. 1726, in 4. (plag. 9, Tabb. 2).

§. 38. Construxit ZUMBACHIIUS Planetolabium suum ad imitationem Astrolabii, instrumenti ad explicanda phænomena motus primi dudum adhibiti. Astrolabii constructionem & usum rigidissime demonstravit CLAVIUS in Tractatu *de Astrolabio*, qui in Operibus ejus legitur (§. 24, cap. 1). Etsi autem CLAVIUS tantummodo de polari, quod vocatur, egerit; tanta tamen usus prolixitate & schemata construxit tam implexa ac intricata, ut a nullo mortalium totum fuisse perlectum judicet TACQUETUS. Quamobrem ipse lib. 3 *Opticæ*, qui de projectione astronomica agit, doctrinam hanc magis perspicue proponit, & non minus æquinoctiale, quam polare explanat. Ceterum quoad doctrinam de projectione sphaeræ, tam orthographica, quam stereographica, commendari meretur Tractatus, quem sub titulo: *A Treatise of the sphere* patrio sermone *Londini* An. 1714, edidit JOANNES WITTY (plag. 15, Tabb. 10). Tyronibus autem, qui usum Astrolabii cognoscere student, satisfacies BION in Tractatu, qui *Parisiis* An. 1702, in 12. reg. (plag. 10½, Tabb. 9) sub titulo: *L'Usage des Astrolabes tant universels que particuliers* lucem adspexit.

§. 39. Ad

§. 39. Ad naturam siderum & rationem universi cognoscendam conducunt, præter RICCIOLUM in *Almagesto*, CHRISTOPHORI SCHEINERI *Rosa Ursina* (*Bracciani* An. 1626, usque ad An. 1630, in fol. 11 Alph. cum figuris multis textui insertis) opus de maculis solaribus absolutissimum; ejusdem *Disquisitiones Mathematicæ de controversiis & novitatibus astronomicis* (*Ingolstadii* An. 1614, in 4. plag. 12); opusculum de *refractionibus cælestibus* (*Ingolstadii* An. 1617, in 4.) & ejusdem *Sol ellipticus* (*Augustæ Vindelicorum* in 4. (plag. 5); GALILÆI *Tractatus de maculis solaribus* (*Roma* An. 1613) & *Nuncius sidereus* aliquoties recusus; ejusdem *Dialogi de Systemate mundi* (*Lugd. Bat.* An. 1699, in 4. 3 Alph.), opus lectu dignissimum; JOHANNIS KEPLERI *Tractatus Germanicus de Cometa anni 1607*, (*Hala* 1608, in 4. plag. 5) & *De Cometis libelli tres* (*Augustæ Vindelicorum* An. 1619, in 4. plag. 20, Tab. 1): ejusdem *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium cosmographicum de admirabili proportionem orbium cælestium, deque causis cælorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonstratum per quinque regularia corpora Geometrica*, cum Narratione GEORGII JOACHIMI RHETICI de libris revolutionum NICOLAI COPERNICI (*Tubingæ* An. 1596, in 4. 1 Alph.): ejusdem *Somnium seu opus*

posthumum de Astronomia lunari (*Francos.* An. 1634, in 4. 1 Alph.): ejusdem *Harmonica Mundi* (*Lincii* An. 1619, in fol. 3 Alph. 13 plag.): ejusdem *Hyperaspistes TYCHONIS* (*Franc.* An. 1625, in 4. plag. 28) adversus SCIPIONIS CLARAMONTII *Antitychonem*, in quo contra TYCHONEM BRAHE demonstrare fatagit cometas esse sublunares, non cœlestes (*Venetis* An. 1621, in 4. 2 Alph. 2 plag.); HEVELII *Sele-nographia* (*Gedani* An. 1647, in fol. 6 Alph. 10 plag. Tabb. 111), in quo ejus facies secundum omnes phases accuratissime delineatur: ejusdem *Prodromus Cometicus*, quo historia Cometæ An. 1664 exorti, cursum, faciesque diversas capitis ac caudæ, accurate delineatas complectens, nec non *Dissertatio de Cometarum omnium motu, generatione, variisque phenomenonis* exhibetur (*Gedani* An. 1665, in fol. plag. 17, Tabb. 3): ejusdem *Descriptio Cometa* An. 1664, (*Gedani* An. 1666, in fol. 2 Alph. 5 plag. Tabb. 7): ejusdem *Epistola de Cometa* An. 1672, (*Gedani* An. 1672, in fol. 2 plag. Tab. 1): ejusdem *Cometographia* (*Gedani* An. 1668, in fol. 10 Alph. 19 plag. Tabb. 38), opus de Cometis absolutissimum: ejusdem *Dissertatio de nativa Saturni facie* (*Gedani* An. 1656, fol. 12 plag. Tabb. 9), ubi phases Saturni delineat & ad causas suas revocare studet: ejusdem *Mercurius in Sole visus, cum HOROC-CII Venere in Sole visa, & Historia stelle*

sed ad captum Tyronum minime compositum.

§. 2. Præclarum quoque in Chronologia opus est DIONYSII PETAVII *Doctrina Temporum*, Parisiis An. 1627, in fol. primum edita; sed An. 1703, tribus Tomis in fol. reg. (21 Alph. 7 plag.) Antverpiæ recusa. Accessit editioni novæ integer Tomus tertius, in quo continentur *Uranologium sive systema variorum auctorum*, qui de *Sphæra ac sideribus eorumque motu Græce commentati sunt*, An. 1630, scorsim editum; Libri VIII. variarum Dissertationum Chronologiam illustrantium & Libri tres epistolarum. Nimirum in Uranologio continentur GEMINI Elementa Astronomiæ; PTOLEMÆI de Apparentiis inerrantium & significationibus, cui Tractatui subjungitur Calendarium vetus Romanum, cum ortu occasuque stellarum ex OVIDIO, COLUMELLA, PLINIO; ACHILLIS TATII Isagoge ad ARATI Phænomena; Ejusdem fragmenta a VICTORIO edita, quæ cum anterioribus eadem fere continent; HIPPARCHI BITHYNI ad ARATI & EUDOXI Phænomena Enarrationum libri tres; ARATI Genus & Vita; THEODORI GAZÆ liber de mensibus; S. MAXIMI Martyris Computus ecclesiasticus; ISAACI Monachi Computus; S. ANDRÆ Hierosolymitani methodus investigandi Cycli solaris & lunaris, nec non Paschatis. Ceterum paulo durius tractat SCALIGER

RUM, cui opus suum opposuit.

§. 3. Dogmata SCALIGERI ad faciliorem intelligentiam proposuit SETHUS CALVISIUS, Cantor Lipsiensis, vir longe ultra sortem sui similium eruditus, cujus *Introductio ad Chronologiam* sæpius cum in 4. tum in folio recusa.

§. 4. Triumviris istis jungi meretur JOANNES BAPTISTA RICCIOLO in *Chronologia Reformata*, quæ Bononiæ An. 1669, in fol. prodit (Alph. 11, plag. 18).

§. 5. Tyronibus inserviunt DIONYSII PETAVII *Rationarium temporum* (Moguntia An. 1646, in 8. 2 Alph. 22 plag.), GUILIELMI BEVEREGII *Institutiones Chronologicae*, quæ cum *Arithmetica Chronologica* recusa Londini An. 1705, in 4. (1 Alph. 11 plag.) & ÆGIDII STRAUCHII *Breviarium Chronologicum* (Witteberge An. 1664, in 12. 2 Alph. 10 plag.).

§. 6. Ad Chronologiam Historicam spectat opus ISAACI NEWTONI, quod Londini An. 1728, in 4. sub titulo: *The Chronology of ancient Kingdoms amended* (Alph. 2, plag. 4, Tabb. 3) prodit, in quo agitur de Chronologia Græcorum, Ægyptiorum, Assyriorum, Babyloniorum & Medorum, atque Persarum. Traditur etiam in eodem descriptio templi SALOMONIS. Cum nobis jam sit negotium cum Chronologia mathematica; facile patet, Chronologiam NEWTONI non esse hujus.

huius loci. Ne tamen quis miretur, cur ejus nullam injecerimus mentionem, cum NEWTONUS inter Mathematicos summus emineat; cum silentio præterire noluimus. Singulares vero prorsus sibi que proprias de Chronologia antiquorum imperiorum fovet opiniones NEWTONUS, ita ut enormis detur inter ipsum & ceteros Chronologos dissensus. Quamobrem eodem adhuc anno, ARTHURUS BEDFORD idiomate patrio Animadversiones in Chronologiam NEWTONI edebat *Londini* in 8. (plag. 15) Ostendit autem, NEWTONUM e diametro esse adversum scriptoribus sacris: quæ adeo ratio esse videtur, cur ad eum confutandum adeo properaverit.

§. 7. Ad Calendariographiam spectant, quæ Tomo quinto operum CLAVII habentur (§. 24, cap. 1); SETHI CALVISII *Elenchus Calendarii Gregoriani* (*Frans. ad Mæn.* An. 1612, in 4. plag. 27); FRANCISCI VIETÆ *Relatio Calendarii vere Gregoriani & Calendarium Gregorianum perpetuum* (§. 25, cap. 1); BLONDELLI *Historia Calendarii Romani* Gallice conscripta (*Parisi.* An. 1682, in 4.); ERHARDI WEIGELII *Bürgerlicher Zeit-Spiegel*, seu speculum temporis civile (*Jena* An. 1664, in 4. plag. 15); GUILIELMI BONJOUR *Calendarium Romanum* (*Roma* An. 1701, in fol. 21 plag.) FRANCISCI BLANCHINI *Solutio Problematis paschalis* (*Roma* An. 1703,

in 4. plag. 13, Tabb. 5); DOMINICI QUARTAIRONII *Responsiones ad assertiones DOMINICI CASSINI pro reformatione Calendarii Gregoriani* (*Roma* 1703, in 4. plag. 4); EUSTACHII MANFREDII *epistola ad QUARTAIRONIUM, qua CASSINI assertiones 16, vindicantur* (*Venetis* An. 1705, in 4. reg. plag. 8); THOMÆ PII MAPHÆI *Opus De Cyclorum Soli-Lunarium inconstantia & emendatione* (*Venetis* An. 1706, in 4. 1½ Alph.).

§. 8. *Calendarium Judaicum* ex Hebræorum penetralibus cum versione Latina edidit SEBASTIANUS MÜNSTERUS *Basileæ* An. 1527, in 4. (1 Alph. 5 plag.): in quo computus Judæis usitatus exponitur. Rabbi ORI *Calendarium Palæstinorum & universorum Judæorum* ex Hebræo sermone in Latinum vertit, & *Francosf. ad Mænum* publicavit JACOBUS CHRISTMANNUS, in Academia Heidelbergensi Professor An. 1594, in 4. (plag. 20).

§. 9. Inter veteres Geographos eminet PTOLEMÆUS, cujus *Geographia* libri octo, in quibus non modo traduntur ad Geographiam mathematicam spectantia, sed inprimis etiam quæ ad historicam faciunt, *Basileæ* prodire plus simplici vice, e. gr. An. 1542, in fol. (Alph. 2, plag. 16, Tabb. 48). Inter compendia vero maxime celebre fuit JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus *de sphaera*, sæpius recusus: in quem post

diit (Pars I, plag. 14, Tabb. æn. 8. Pars II, Alph. 1, plag. 16). Parte priori abunde docentur, quæ ad calculum faciunt; posteriori autem Tabulæ astronomicæ continentur.

§. 45. JOANNES LEONHARDUS ROSTIUS An. 1718, *Norimbergæ* in 4. (Alph. 3, Tabb. 14), edidit librum astronomicum sub Titulo: *Astronomisches Hand-Buch*, h. e. Manuale Astronomicum, in quo doctrinam sphaericam exemplis perspicuis illustrat, & modum observandi declarat, ipse nimirum in observando versatissimus. Addidit deinde An. 1727, (*Norimbergæ* in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 14) partem alteram sub Titulo: *Aufrichtiger Astronomus*, h. e. Astronomus ingenuus. In ea plurima tradit, quæ ad doctrinam sphaericam, motus Cometarum, & observationes astronomicas spectant. Inprimis autem plurima tradit, quæ ad calculum Eclipsium facilitandum conducunt. Ad Astronomiam adeo practicam addiscendam utile opus.

§. 46. Quoniam in anterioribus aliquoties mentionem injecimus *Opusculum Mathematicorum* JOANNIS SCHONERI, ut de iis adhuc dicamus res ipsa flagitare videtur. Ea in unum volumen congestit, & correctæ & locupletata *Norimbergæ* An. 1561, in fol. excudi curavit Autoris filius ANDREAS SCHONERUS (Alph. 10). Continentur in hisce 1. Isagoge Astrologiæ judicariæ, 2. de Judiciis Nativitatum libri tres, 3. Tabulæ re-

solutæ astronomicæ, 4. de usu globi cœlestis, 5. de compositione globi cœlestis, 6. de usu globi terrestris, 7. de compositione globi terrestris, 8. Libellus de distantis locorum per numeros & instrumentum investigandis, 9. de constructione Torqueti, 10. In constructionem atque usum Rectanguli sive radii astronomici Annotationes, 11. In Fabricam & usum magnæ Regulæ PTOLEMÆI Annotationes, 12. Horarii Cylindri Canones, 13. Æquatorium astronomicum, ex quo errantium stellarum motus, luminarium configurationes & defectus colliguntur, oppositis ubique planetarum sphaeris & terminorum expositionibus, 14. Planisphaerium seu Meteoroscopium, in quo singula, quæ per motum primi mobilis contingunt, inveniuntur, 15. Organum Uranicum, quo facillime, absque scrupulosa supputatione, veri medique planetarum motus reperiuntur, 16. Instrumentum impedimentorum Lunæ, per quod dies impediti facillime colliguntur his apprimè utile, qui Almanach conscribere gestiunt. Videmus adeo in hisce operibus non contineri alia, nisi quæ ad præsens caput pertinent, quæ siderum nempe scientiam concernunt.

§. 47. Plura nobis recensenda essent scripta astronomica, si omnia promiscue in medium asferre liberet. Sed cum ea, quæ a veteribus & recentioribus usque ad Annum 1660, sæculi superioris literis consignata fue-

re, ex RICCIOLI *Almagesto* facile suppleri queant, cetera ex Diariis Eruditorum, quæ hodie magno numero eduntur, peti queant; potiora a nobis commemorata esse sufficit. De TYCHONIS tantum *Progymnasmatibus Astronomia instaurata*, aliquoties laudatis, observamus, quod pars prima equidem inscribatur *De nova stella anni 1572*, generaliter tamen de restitutione motuum Solis & Lunæ stellarumque inerrantium tractet (*Uraniburgi & Praga* 1610, in 4. 4 Alph. 13 plag.); altera vero de Cometa An. 1577, agat (*Praga* An. 1610, in 4. 2 Alph. 13 plag.). Tomo secundo hujus editionis adjiciuntur TYCHONIS DE BRAHE *Epistole Astronomica* (*Uraniburgi* An. 1610, in 4. 1 Alph. 16 plag.). Sola Progymnasmata sub titulo Operum TYCHONIS DE BRAHE postea *Francofurti ad Menum* in 4. recusa.

§. 48. Dignum quoque est, cujus singularem mentionem injiciamus, Automatum Planetarium HUGENII, motus planetarum motu suo accurate indicans, descriptum sub finem posthumorum (§. 35, cap. 1). Etsi enim ante ipsum, istiusmodi automata construxerint alii, quorum nonnulla recenset SCHOTTUS in *Technica curiosa*: eorum tamen usus hodie nullus amplius est, postquam *Hugenianum* ad Astronomiæ recentioris perfectionem compositum.

§. 49. Præterea nobis adhuc commemoranda sunt scripta quædam

recentiora, quæ silentio præteriri nefas. Nimirum An. 1697, *Norimberga* in fol. (Alph. 1, plag. 4, Tabb. 4) JOH. PHILIPPUS A WURTZELBAU edidit Tractatum de situ Geographico secundum latitudinem & longitudinem civitatis Norimbergenfis sub titulo: *Uranies Norica Basis*; in usum observationum suarum, quæ ibidem multa solertia & instrumentis exquisitis instituebat. Sed cum in longitudine ac refractionibus aliquid immutandum esse posthac deprehenderet, ejus supplementum An. 1713, in fol. (plag. 5½) addidit sub titulo: *Stabilimentum Baseos Uranies Norica Astronomica & Geographica, pro deducta antehac inclytæ urbis latitudine & corrigendis longitudinibus Geographicarum numeris &c.* ubi etiam de obliquitate Eclipticæ & refractione horizontali agit. Tandem An. 1719, accessit opus Motuum solarium, in qua ex Solis observationibus in Meridiano Norimbergenfi per tria secula habitis iidem definiuntur, & eorundem Tabulæ exhibentur, sed intra dimidium seculum variabiles ob eccentricitatis, quam statuit, mutabilitatem. Prodiit *Norimberga* An. 1719, in fol. (plag. 22½, Tab. 1) sub titulo: *Uranies Norica Basis astronomica, sive Rationes motus annui ex observationibus in Solem, hoc nostro & seculo abhinc tertio, Norimberga sub eodem Meridiano habitis quam plurimis deducta & ampliter demonstrata.* Operi huic solari adjicitur tractatus de situ geographico Norim-

cal navigation demonstrated from its first Principles, una cum tabulis omnibus necessariis *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 10, Tab. 1) edidit. Præmittit adeo ea, quæ ex Geometria, Trigonometria plana, Geographia, Astronomia & Chronologia perspecta esse debent ei, qui artem navigandi penitus perspicere voluerit.

§. 18. Eodem anno idiomate itidem Anglico *Londini* An. 1730, in 8. maj. (Alph. 1, plag. 9) a GEORGIO GORDONIO publicata sunt ex MSC. originali *Opera posthuma JOHANNIS WARDI*. In horum parte prima, præmissis principiis Geometriæ & Trigonometriæ planæ, Navigatio explicatur, ubi nova quædam methodus simul proponitur ab Autore inventa; in parte autem secunda Trigonometria spherica traditur, ubi simul spheræ projectio, tam orthographica, quam stereographica explicatur. Ad demonstrationes illius facilius percipiendas schemata ita construxit, ut casus singuli in solido representari possint: quo artificio etiam usus est JOANNES KEILL in *Trigonometria*, quam EUCLIDIS Elementis ex versione COMMANDINI a se editis subjunxit.

§. 19. Apud Batavos de arte navigandi Tractatum conscripsit WILLEBRORDUS SNELLIUS, qui sub titulo: *Tiphys Batavus. sive Hiskia-dromice de navium cursibus & re nautica*, *Lugduni Batavorum* An. 1624,

in 4. (Alph. 1, plag. 7) prodiit. De Loxodromia accuratas affert demonstrationes quæ hætenus desiderabantur. Theoriam tradit libro primo; praxin secundo.

§. 20. Inter problemata vexata refertur problema de inveniendâ longitudine maris, quod hætenus multum exercuit ingenia Mathematicorum, irritò successu solutionem ejus aggressorum. Nimis prolixum foret recensere tentamina, quæ publice descripta prostant. Non tamen possumus, quin mentionem injiciamus Autoris cujusdam personati DOROTHEI ALIMARI, Mathematici (si credimus) Veneti, cujus *Methodus longitudinis aut terra, aut mari investiganda, adjectis demonstrationibus & instrumentorum Iconismis*, *Londini* An. 1715, in 8. (plag. 13, Tabb. 4) prodiit. Etsi enim ea non satisfaciat, continentur tamen in hoc Tractat, quæ legi merentur.

§. 21. Pars nauticæ difficilima est manualia nautica, quia reconditam Geometriæ sublimioris notitiam supponit. Agit autem manualia nautica de dispositione velorum, gubernaculi & navis. Equidem Vir & generis nobilitate, & experientia maritima præstans RENAUV An. 1689, libellum de ea ediderat; sed mox HUGENIUS principium ejus unum, dein ex intervallo celeberrimus BERNOULLIUS alterum impugnavit, & theoriam aliam substituit in Tentamine novæ theoriæ nauticæ, quæ idio-

idiomate Gallico sub titulo : *Essai d'une nouvelle Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, una cum epistolis nonnullis de eadem materia perscriptis, Basilea An. 1714, in 8. reg. (plag. 15, Tabb. 10) prodiit. Theoriam hujus artis ad praxin aptare studuit PITOTUS in libro Gallice conscripto, qui sub titulo: *Théorie de la Manœuvre des Vaisseaux réduite en Pratique*, Parisiis in 4. An. 1731, prodiit.

§. 22. Ad Geographiæ potissimum perfectionem tendunt *Observationes Mathematica & Physica in India & China facta a R. P. FRANCISCO NOEL, e Societate Jesu ab An. 1684, usque ad An. 1708, (Praga 1710, in 4. plag. 17, Tabb. 2) & Observationes argumenti similis a R. P. FRANCISCO FEUILLE e jussu Regis Christianissimi in regionibus potissimum Australibus facta*, de quibus supra (§. 9, cap. 9). Summæ harum observationum leguntur in Actis Eruditorum Lipsiensibus.

§. 23. Commemorandi hic denique sunt Autores, qui in magnitudinem & figuram Telluris inquisiverunt. Laudandus hic nobis WILLEBRORDUS SNELLIUS, cujus *Eratosthenes Batavus de Terra ambitus vera quantitate*, Lugduni Batavorum An. 1617, in 4. (Alph. 1, plag. 11½) prodiit. Sed errores quosdam in metiendis angulis, tum & in calculo admisit, quos ipse agnovit: Unde observationes repetiit & in MSC. correctas reliquit. Emendationes vi-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

dere licet in *Dissertatione de magnitudine Terra* PETRI VAN MUSCHENBROEK, Mathematicum Professor in Academia Ultrajectina, quæ legitur in opere *Dissertationum physicarum experimentalium & geometricarum de magnete, tuborum capillarium vitæorumque speculorum attractione, magnitudine Terra, coherencia corporum firmorum*, Lugduni Batavorum An. 1729, in 4. reg. edito p. 354, & seqq.

§. 24. In Gallia feliciori successu laborem hunc exantlatus est PICARDUS, postea continuatus a CASSINO. Mensurationem PICARDI videre licet in Tractatu, quem ex sermone Gallico in Anglicum transtulit RICHARDUS WALLER & Londini sub titulo: *The Measure of the Earth* 1688, (plag. 6, Tabb. 4), edidit, tum in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum Parisinæ ab An. 1666, usque ad An. 1699, Tom. 7, *Cassinianam* vero in Commentariis An. 1718.

§. 25. Quoniam per mensurationes *Cassinianas* alia prodibat figura Telluris, quam per demonstrationes NEWTONI atque HUGENII; ideo jussu Regis Christianissimi DE MAUPERTUIS cum Sociis, summo cum studio & plusquam Herculeo labore, gradum Meridiani prope circulum polarem dimensus est aliasque observationes huic instituto inservientes instituit. Legatur Tractatus, quem *Parisiis* An. 1738, in 8. edidit (plag. 13, Tabb. 10). Observationibus hisce

O

exactis

exactissimis figura Telluris confirmatur *Newtoniana*, & *Hugeniana*. Constat jussu Regis Christianissimi eodem fine missos esse Mathematicos in regnum Peruvianum, qui ubi redierint, cum publico dubio procul communicabunt absque mora suas quoque observationes.

§. 26. Theoriam atque praxin Gnomonicam more veterum rigidissime, sed adeo intricate demonstravit CHRISTOPHORUS CLAVIUS (§. 24, cap. 1) ut vix credibile sit, ullum unquam ejus demonstrationes omnes perlegisse. Faciliores vero exhibent DECHALES atque OZANAM in cursibus (§. 4, 7, cap. 1).

§. 27. Demonstrationes quoque affert GUARINUS GUARINI in parte posteriore *Mathematica celestis* (*Mediol.* An. 1683, in fol. 1 Alph. 3 plag.). Pars prior, quæ una cum posteriore prodiit (7 Alph. 5 plag.) integram Astronomiam complectitur.

§. 28. Novam methodum horologia solaria magna conficiendi, lineis horariis per calculum determinatis, invenit PICARDUS, quæ in Operibus Mathematicis Academicorum Gallicorum (§. 31, cap. 1) legitur. Et Cel. PHILIPPUS DE LA HIRE in sua *Gnomonica*, quam patrio sermone *Parisiis* 1683, in 12. reg. publici juris fecit, methodum Geometricam exposuit, ex quibusdam punctis per observationem determinatis lineas horarias ducendi.

§. 29. Anno 1625, EBERHAR-

DUS WELPERUS, Artium Magister, *Argentorati* propriis sumibus typis describi curavit suum de *Gnomonica* tractatum vernaculum in 4. (plag. 8), in quo ex facili fundamento horologia in planis primariis describere docet. Idem fundamentum jam antea perspicue exposuit eodemque in describendis horologiis usus est SEBASTIANUS MUNSTERUS in *Rudimentis Mathematicis*, quorum liber prior prima elementa Geometriæ, posterior omnigenum horologiorum genus delineare docet. (*Basilica* An. 1551, in fol. 2 Alph. 20 plag.).

§. 30. WELPERI Gnomonicam An. 1672, *Norimb.* in 4. (plag. 21, Fig. plag. 14½) recudi curavit & integra parte secunda de horologiis inclinatis & declinatis, ac figuris Zodiacalibus, arcubusque diurnis, & horis varii generis inscribendis auxit, notisque partem primam illustravit JOH. CHRISTOPHORUS STURMIUS, Math. Prof. Altorfinus. Addidit An. 1681. (*Norimbergæ* in 4. plag. 19, Fig. plag. 9) partem tertiam de horologiis reflexis & portatilibus. Eadem Gnomonica cum insigni augmento *Sturmiano* denuo recusa *Norimbergæ* An. 1708, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 35). Accessit vero pars quarta, in qua methodi, *Picardiana* & *Lahiriana*, magna horologia describendi exponuntur (§. 28). In hoc adeo opere plura continentur, quam ullibi in unum volumen con-

congesta reperire licet, ita ut instar omnium esse possit, nisi quis demonstrationes exarsciatas praxium desideret, theoriæ magis, quam praxi intentus. Appendicis quoque loco adjicitur Tractatus de horologiis automaticis ex Anglico in Germanicum sermonem translatus, quemadmodum jam supra monuimus (§. 26, cap. 6.).

§. 31. Commendandum hic quoque est opus de horologiis majoribus delineandis, methodo universalis, quod debetur J. G. DOPPELMAYERO, Matheseos Professore Norimbergensi, & sub titulo: *Neue und gründliche Anweisung, wie nach einer Universal-Methode grosse Sonnen-Uhren aus einem arithmetischen und geometrischen Fundament zu zeichnen*, Norimbergæ An. 1719, in fol. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. 20) prodiit. Quodsi idem cum novissima & auctiori Gnomonica *Welperiana* conjungas, vix est ut quicquam in praxi Gnomonica, sive utilitatem, sive curiositatem spectes, amplius desideres. Ceterum ALEXANDER in eximio de horologiis Tractatu egregiam quoque tradit methodum horologia majora solaria accurate in quovis pariete delineandi (§. 26, cap. 6.).

§. 32. Solas praxes tradunt JOHANNES PETERSON STENGEL in *Gnomonica universali*, idiomate vernaculo (Ulme An. 1706, in 8. plag. 18, Tabb. 109) edita, rerum varietate commendanda; GEORGIUS MICHAELIS in *Praxi Gnomonica*

Germanice An. 1701, Jena in 8. edita (12 plag. fig. æn. plag. 1½), qui tamen tantum communiora exponit; JOH. ULRICUS MULLER in *Indice horarum infallibili* Germanice itidem Ulme An. 1702, in 8. edito (1 Alph. plag. 9, Fig. æn. plag. 9) & HENRICUS COETSIUS in *Horologiographia plana* (Lugd. Batav. An. 1689, in 4. plag. 12, Tabb. 20), qui tamen inscriptiones signorum & arcuum diurnorum negligit, nec ad horologia portatilia descendit.

§. 33. Anno 1711, *Augustæ Vindelicorum* in 4. (2½ Alph. Tabb. æn. 2 1½ plag.) prodiit JOHANNIS GAUPPENII *Gnomonica Mechanica universalis*, sermone vernaculo in eorum gratiam conscripta, qui in theoria Mathematica parum versati. Inseruit operi suo Tractatum brevem, quem HENRICUS BIERUM, Architectus militaris, An. 1676, (plag. 4) ediderat, & ejus fundamento mechanice describendi horologia utitur. Rerum varietate commendatur iis, qui variis horologiorum solarium generibus conficiendis delectantur.

§. 34. Eodem fundamento nititur JOHANNES JACOBUS SCHEUBLERUS in libro Germanico, qui sub titulo: *Neue und deutliche Anleitung zur praktischen Sonnen-Uhr-Kunst*, Norimbergæ An. 1726, in 8. reg. (plag. 14, Tabb. 44) prodiit, & ubi inter alia ornamenta, quibus horologia solaria parietibus inscripta circumscribi possunt, delineat. Alias jam

initio seculi præteriti CASPARUS UTTENHOEFER, civis Norimbergensis, Pedem Mechanicum invenit, cujus ope horologia solaria mechanice delineari possunt. Descriptionis editio altera auctior prodiit *Norimbergæ* An. 1620, in 4. (plag. 7).

§. 35. Horologiorum solarium omnis generis, præsertim portatiliū descriptionem etiam tradit NICOLAUS BION in opere Gallico *De constructione & præcipuis usibus instrumentorum mathematicorum* (*Parisiis* An. 1709, in 8. reg. 1 Alph. Tabb. 28), quod unicum fere in hoc genere a J. G. DOPPELMAYERO Prof. Math. Norimbergensi ex Gallico in Germanicum sermonem verti meruit (*Norimbergæ* An. 1712, in 4. Alph. 2, plag. 5, Tabb. 28).

§. 36. Commendari quoque merentur Machinæ duæ, quæ pro describendis horologiis solaribus publicavit aliquoties jam citatus IGNATIUS GASTON PARDIES (*Hagæ Comitum* An. 1691, in 12. 2 plag.). In hac editione tertia subjunguntur Elementis Staticæ.

§. 37. Methodum trigonometricam describendi horologia solaria excoluit BERNARDUS GRUBER, S. Ordinis Cisterciensis in Monasterio B. V. Mariæ de Alto Vado Professor, in Collegio Archiepiscopali Pragæ A. L. L. & Philosophiæ Professor, in *Horographia trigonometrica*, seu *Methodo accuratissima arithmetice per sinus & tangentes horologia quævis*

solaria in plano stabili qualitercunque situato, etiam declinante & simul inclinato, facile negotio describendi, & quædam alia, quæ vialia dicuntur, expositis eorundem fundamentis & rationibus, *Vetero-Pragæ* An. 1718, in 4. (Alph. 1, plag. 14, Tabb. 11) edidit. Idem institutum fuit BENEDICTI MARIÆ CASTRONII, Ordinis Prædicatorum ac Panormi Mathematicos Professoris, qui *Horographiam universalem, seu Sciaticorum omnium planorum, gnomonice nova methodo describendorum, pro quovis horologio sive astronomico, sive Italico, sive Babylico, sive Judaico doctrinam uniformem atque universalem; sola triangulorum analysi breviter expositam, cum Isagogicis nonnullis Mathematicum & triplici Appendice de nautica scientia, de militari Architectura, ac de temporum Janua*, *Panormi* An. 1728, in fol. (Alph. 4, plag. 10, Tabb. 19) edidit. Temporum Januam vocat Calendarium quoddam perpetuum, Januæ formam præ se ferens, quod a se inventum. Tenendum hic est methodum trigonometricam, quæ & arithmetica dici solet, in Gnomonica præferendam esse geometricæ, cum hæc facilius errori obnoxia fiat, qui per illam evitari potest.

§. 38. Quoniam non cujusvis est per calculum trigonometricum erucere numeros, quibus in describendis horologiis solaribus opus est; ideo JOANNES LUDOVICUS QUADRI, Academiæ Instituti scientiarum Bononiensis,

nienſis adſcriptus idiomate Italico *Bonia* An. 1733, in 4. (Alph. 1, plag. 5, Tabb. 6) edidit *Tabulas Gnomonicas delineationi Horologiorum ſciaticorum inſervientes*; quæ conſentiunt cum horologiis Italicis, ſonitu campanæ pulſæ horas indicantibus: ut adeo Itatorum tantummodo uſui deſtinentur. Dederat jam ante iſtiusmodi Tabulas in Italia P. ANGELUS MARIA COLOMBONUS & apud Noſtros JO. GAUPPIUS in *Gnomonica mechanica* (§. 33) & BERNARDUS GRUBER in *Horographia trigonometrica* modo laudata (§. 37). Edidit quoque Tabulas Gnomonicas, ſed pro horarum quovis genere, ſub titulo *Deliciarum mathematicarum*, ſermone patrio, una cum brevi deſcriptione praxeos univerſæ Geometriæ & Trigonometriæ tam ſphæricæ, quam planæ, quæſtionibusque & problematibus aſtronomicis chronologicisque ad Calendarium eccleſiaſticum pertinentibus, ope tabularum logarithmicarum facili modo ſolvendis, *Roma* An. 1730, in 4. reg. (Alph. 4. plag. 2, Tabb. 14).

§. 39. Hic denique commemorare lubet ADRIANI METII, Med. D. & Matheſeos Profeſſoris in Academia Friſiorum, *Primum mobile aſtronomice, ſciographice, geometricæ & hydrographice nova methodo explicatum*. Prodiit editio nova ab innumeris mendis vendicata & inſtrumentis mathematicis aucta a GUILIELMO BLAEU *Amſtelodami* An. 1633, in 4. (Tomus I, Alph. 2. Tom. II, Alph. 1, plag. 12. Tom. III, Alph. 1, plag. 10. Tom. IV, plag. 20). Primo exponitur doctrina Sphærica, Gnomonica & Geographica; ſecundo continetur accurata deſcriptio Aſtrolabii utriuſque & ejus uſus, una cum Trigonometria ſphærica; tertio ſolvuntur problemata primi mobilis per aſtrolabium, Trigonometriam ſphæricam & Tabulas Aſtronicas; quarto denique problemata primi mobilis geometricæ delineantur & arithmetice ſolvuntur, atque Tabulæ geographicæ & hydrographicæ deſcribuntur, & per eaſdem, tumque per Canones ex ſecantibus conſtatos, Ars navigandi abſolvitur.

C A P U T XI.

De Architectura Civili.

§. I. **I**Ntegram Architecturam civilem tradidit VITRUVIUS, qui ſub AUGUSTO floruit, cui de-

tem *De Architectura* libros dedicavit. Optima editio Latina prodiit *Amſtelodami* An. 1649, in fol. (6 Alph.).

Accessere huic editioni novæ castigationes & observationes GUIL. PHILANDRI integræ, DANIELIS BARBARI & CLAUDII SALMASII excerptæ & passim insertæ. Præmittuntur *Elementa Architectura* HENRICI WOTTONI, Equitis Angli: subjiciuntur *Lexicon Vitruvianum* BERNHARDI BALDI, ejusdem *Scamilli impares Vitruviani*, *De pictura* libri tres LEONIS BAPTISTÆ DE ALBERTIS, *De sculptura* excerpta ex Dialogo POMPONII GAURICI & Commentarius *De sculptura & pictura* LUDOVICI DEMONTIOSII.

§. 2. Reprehendunt in egregio alias opere *Vitruviano*, quod nullum ordinem tenuerit; quod obscure scripserit, nempe judice LEONE BAPTISTA DE ALBERTIS (a) Græcis Latine & Latinis Græce; quod denique multa superflua ac aliena immiscuerit. Hinc PERRAULT, quemadmodum olim suaserat PHILIBERTUS DE L'ORME, regulas Architectonicas Vitruvianas ex opere prolixo excerpsit & in ordinem redactas sub titulo: *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* publici juris fecit (*Amstelodami* An. 1681, in 8. 16½ plag. & fig. æn. plag. 1½). Textum obscurum VITRUVII in versione Germanica, & adjecta singulis capitibus paraphrasi clariorem reddidit D. GUALT. H. RIVIVS. Recusa est hæc versio *Basilæ* An. 1614, in fol. (7 Alph. 2

plag.). In paraphrasi seu Commentario, si mavis, more *Vitruviano*, multa aliena admiscuit. Magis commendanda est versio Gallica, quam primum An. 1673, typis describi, sed An. 1684, auctiorem & emendatiorem recudi curavit PERRAULT adjectis notis selectis & figuris æri nitidissime incisis (*Parisiis* in fol. reg. 4 Alph. 5 plag.). Idem PERRAULT opus præclarum de Ordinibus An. 1684, in fol. addidit sub titulo: *Ordonnance des cinq espèces de Colonnes selon la methode des anciens*, in quo præjudicia Architectorum refellit & quod instar supplementi Architecturæ VITRUVII haberi potest, qui doctrinam de Ordinibus imperfectam tradidit.

§. 3. Post VITRUVIUM libros decem *De re ædificatoria* edidit LEO BAPTISTA DE ALBERTIS aliquoties recusos & ex idiomate Latino in varias Linguas translatos. Prodiit Latine *Parisiis* An. 1512, in 4. (2 Alph.) & *Florentia* An. 1585. Italice lucem adspexit *Venetiis* An. 1546, in 8. (1 Alph. 9½ plag.); Gallice An. 1553. Multa habet utilia; sed VITRUVIO, quemadmodum intenderrat, palmam præripere non potuit. Doctrinam de Ordinibus non satis perfectam tradidit.

§. 4. Mox secuti sunt SEBASTIANUS SERLIUS & ANDREAS PALLADIUS coætanei, quorum ille septem, hic quatuor *De Architectura* libros

(a) Lib. 6, cap. 1, de re ædificatoria pag. 80, & seq.

bro composuit. Architecturæ *Serlianae* libri quinque Italice *Venetiis* An. 1602, in fol. Germanice, *Basilee* An. 1609, in fol. (4 Alph. 13 plag.) prodire. Quinque tantum ordines cum variis ædificiorum generibus describit; regulas ex VITRUVIO supponit, a quibus recedere religioni duxit. Vid. lib. 3, f. 46, edit. Venetæ. Liber sextus de ædificiis privatis in publicum nondum prodiit: Septimum de ædificiis publicis JACOBUS STRADA Latine & Gallice *Francofurti* An. 1575, in fol. imprimi curavit.

§. 5. PALLADIUS hanc laudem meruit, quod splendorem ordinibus ac operibus suis conciliaverit. Libro primo regulas fundamentales Architecturæ tradidit; reliquis varia ædificiorum & operum architectonicorum genera delineavit. Commendatur Architecturæ purioris studiosis. Prodiere libri omnes Italice An. 1575, in fol. recusanno superiore An. 1714, *Venetiis* in fol. adjecto ipsius de Antiquitatibus Romanis tractatu. Libros duos priores GEORGIUS ANDREAS BOECKLER, Germanice vertit & multis annotationibus auxit (*Norimbergæ* 1689, in fol. I Alph. 3 plag. Tabb. 88). Idem PALLADIUS scripsit de *Templis Romanis* (An. 1554, in 8).

§. 6. PHILIBERTUS DE L'ORME, Caroli IX. Consiliarius, Elemosinarius & Architectus An. 1567, *Parisiis* in fol. edidit novem *De Architectura* libros idiomate vernaculo.

Architecturæ peritiā adeo celebris erat, ut ad excitanda palatia Principum ex Gallia in exteras regiones evocaretur.

§. 7. JACOBUS BAROZZIUS VIGNOLA An. 1631, Italice de quinque ordinibus scripsit, cujus liber in varias linguas translatus. Utor editione Gallica, quæ sub titulo: *Règles des cinq Ordres d'Architecture de J. B. DE VIGNOLE, avec plusieurs augmentations de MICHEL ANGE BUONAROTI*, cura DURÆI DE CHAMPDORÉ, *Lugduni Batavorum* An. 1712, in 8. prodiit (plag. 9½). Eundem prolixis additamentis locupletavit DAVILER & idiomate Gallico *Parisiis* in 4. edidit cum Lexico Architectonico. Mox recusum est opus sub titulo: *Cours d'Architecture, qui comprend les Ordres de VIGNOLE avec des Commentaires, les figures & descriptions des plus beaux bâtimens & de ceux de MICHEL ANGE &c.* *Amstelodami* An. 1694, in 4. (3 Alph. 20 plag. Tabb. 103, magnam partem textui inserta). LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS Germanice vertit & notis quibusdam auctum, omisso Lexico, *Amstelodami* An. 1699, in 4. (2 Alph.) edidit, figuram plagulis 3½, adjectis ultra eas, quæ in editione Gallica habentur. Prodiit nuper nova editio Gallica *Parisiis* in 4. auctior. Laudatur ob facilitatem & perspicuitatem. Unde omnibus fere sese probavit, qui praxi operam dant.

§. 8. VIN-

§. 8. VINCENTIUS SCAMOZZI An. 1615, Venetiis sermone patrio edidit librum primum, secundum, tertium, sextum & septimum *Idea Architectura universalis* in fol. Præstantissima editio est, quæ idiomate Gallico *Lugd. Batav.* An. 1713, in fol. reg. (3 Alph. 5 plag. Tabb. 105, quarum 84 textui insertæ) sub titulo: *Oeuvres d'Architecture de VINCENT SCAMOZZI* prodiit. Liber sextus & tertius Germanice versus sub titulo: *Klärliche Beschreibung der fünf Säulen-Ordnungen und der gantzen Bau-Kunst.* *Norimbergæ* An. 1697, in fol. (2 Alph. 6 plag. Tabb. 85) lucem adspexit. Laudatur, quod Symmetriam unus omnium optime excoluerit, sed intricate scribit.

§. 9. CAROLUS PHILIPPUS DIEUSSART in *Theatro Architectura civilis*, quod vernaculo sermone *Bambergæ* An. 1697, in fol. reg. (1 Alph. 3 plag. Tabb. 95) prodiit, non modo regulas Architectonicas explicavit, verum etiam Ordines juxta institutum PALLADII, VIGNOLÆ, SCAMOZZI, PETRI CATANEI, SEBASTIANI SERLII & BRANCÆ inter se comparavit: quod idem executus est ante ipsum ROL. FREARD DE CHAMBRAY in *Parallelismo Architectonico* Gallice *Parisiis* An. 1650, in fol. publicato. Et postea idem fecit LE BLOND in Libro sub titulo: *Parallele des V. Ordres d'Architecture,* *Parisiis* An. 1710, in 4. edito. Plurimum quoque Architectorum Ordines

inter se confert JOHANNES CHRISTIANUS SEYLER, in *Parallelismo Architectonico* Germanice *Lipsiæ* in fol. edito.

§. 10. FRANCISCUS BLONDEL in *Cursu Architectura* Gallico (*Parisiis* An. 1698, in fol. reg. 8 Alph. 14 plag. Tabb. 24, cum figuris plurimis textui insertis) parte prima Ordines VITRUVII, VIGNOLÆ, PALLADII & SCAMOZZI explicat; in ceteris quatuor ex omnium Architectorum celebrium scriptis concessit, quicquid circa ordinum usum notatu dignum occurrit. Habentur etiam in eodem alia nonnulla ad Architecturam spectantia, v. gr. de fenestris & scalis. Cursus hujus aliquid jam 1675 prodierat. Ea potissimum explicare intendit, quæ ad ornatum ædificiorum faciunt.

§. 11. NICOLAUS GOLDMANNUS, Vratislaviensis, in *Tractatu de Stylogometris* (*Lugd. Batav.* An. 1661, fol. Lat. & Germ. 9 plag. Tabb. 40) ostendit, quomodo Ordines Architectonici ab ipso ad majorem perfectionis gradum deducti ope peculiarium quorundam instrumentorum facile delincari possint: quorum & constructionem, & usum docet, textui Latino ad latus adjecta versione Germanica. In opere vero Architectonico, quod LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS sub titulo: *Vollständige Anweisung zu der Civil-Bau-Kunst* (*Guelpherbyi* An. 1696, in fol. reg. 2 Alph. 4 plag. Tabb.

Tabb. 74) publici juris fecit, præter Ordinum doctrinam, magna dexteritate tradidit quicquid in VITRUVII, & Architectorum Italorum scriptis atque VILALPANDI Commentario in Prophetam Ezechielem, ex quo se plura didicisse ait, quam ex Architectorum ceterorum omnium scriptis, boni continetur: ita ut hoc opus ceteris omnibus præferatur. Cl. Editor An. 1699, Appendicem sub titulo: *Ausübung der Civil-Bau Kunst des Goldmanns*, in fol. (1 Alph. 14 plag. Tabb. 19) adjecit, in quibus ex aliis supplet, quæ in eo scitu necessaria desiderantur. Ordinem quoque sextum, quem Germanicum appellat, proponit; sed hæcenus in usum non receptum. Fallitur autem plurimum editor, dum sibi aliisque persuadere vult, GOLDMANNUM regulas Architecturæ demonstrasse & eam in formam scientiæ rede gisse. Plura ad operis hujus illustrationem posthac edidit STURMIUS, qui Architecturæ totus erat deditus. Sed de his dicemus mox apertius.

§. 12. DOMINICUS DE ROSSI in *Studio Architecturæ civilis in ornamentis portarum & fenestrarum, delineatis ex insignioribus Romæ ædificiis* An. 1702, seu potius 1712, Romæ in fol. reg. edito figuris æneis 143, celeberrimorum Architectorum monumenta circa ornatum portarum & fenestrarum representat. *Augustæ Vindelicorum* figuris ad minorem modulum reductis recusum est hoc opus, *Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.*

ut facilius & minori sumtu comparari possit. Plurima tamen habet, quæ imitari non licet, nisi a puritate Architecturæ Græcorum recedere velis.

§. 13. Ad eam perspicendam inservit opus, quod ANTONIUS DESGODETZ, qui ædificia antiqua Romæ ex ruderibus nitidissime delineavit, sub Titulo: *Edifices antiques de Rome* (Paris An. 1697, in fol. (3 Alph. 17 plag.) edidit.

§. 14. JOHANNES BALTHASAR LAUTERBACH in *Compendio Architecturæ* (Amstelodami An. 1699, in 8. Gall. 2 plag. Tabb. 18) ordines Architectonicos delineandi methodum facillimam proponit.

§. 15. In *Gallia* An. 1728, in 4. reg. (Alph. 1, plag. 19½, Tabb. 150) prodit opus architectonicum sub titulo: *Architecture moderne, ou l'Art de bien bair pour toutes sortes de Personnes, tant pour les Maisons des particuliers, que pour les Palais*. Explicantur satis perspicue omnia, quæ ad extructionem ædificiorum omnis generis scitu necessaria, excepta doctrina de Ordinibus, quæ aliunde nota supponitur. Maximam operis partem complent omnis generis ædificiorum delineationes, quibus doctrina de distributione ædificiorum illustratur, vulgo vel neglecta, vel saltem non nisi levi brachio pertractata. Commendatur etiam Tractatus de Architectura, quem LE MUET in 4 edidit, inventiones quasdam novas continens; sed nobis non visus.

§. 16. *Ædificia* magnifica, cura PETRI POST Architecti insignis, passim per Bataviam exstructa accurate describuntur tum quoad ichnographiam, tum quoad orthographiam cum externam, tum internam in opere splendido, quod sub titulo: *Les Oeuvres d'Architecture de PIERRE POST*, Lugd. Batav. An. 1715, in fol. reg. (plag. 22, Tabb. 75) prodiit. Orthographiæ externæ & ichnographiæ ædificiorum, quæ in Batavia extruxit PHILIPPUS VINGBOON, Architectus Amstelodamensis, exhibentur in alio opere, quod sub titulo: *Les nouvelles Oeuvres d'Architecture de PHILIPPE VINGBOONS* Lugduni Batav. An. 1715, in fol. reg. (plag. 11, Tabb. 80) lucem adspexit.

§. 17. *Villas Veterum*, in quibus describendis admodum parvus est VITRUVIUS, idiomate Anglico plenius descripsit ROBERTUS CASTELLUS & sub titulo: *The Villa's of the Ancients illustrated*, Londini suis sumtibus in fol. (Alph. 1, plag. 12, Tabb. 11) edidit. *De Amphitheatris* vero & præcipue Veronensi libros duos idiomate Italico Veronæ 1718, in 12, (plag. 15, Fig. æn. 15) edidit. SCIPIO MAFFEIUS, in quo non minus ea, quæ ad historiam, quam architecturam eorundem pertinent, exponuntur. Formam minorem elegit autor ob commodiorem usum in ruderibus eorundem perlustrandis.

§. 18. Anno 1721, *Vienne Austriae* in fol. reg. (Alph. 1, plag. 21,

Tabb. 93) prodiit opus splendidissimum JOHANNIS BERNHARDI FISCHERI AB ERLACHEN, S. Cæsareæ Majestatis Architecti primarii, sub titulo: *Entwurff einer historischen Architectur*, hoc est, Speciminis Architecturæ historicæ, sumtibus Autoris, in quo varia exhibentur ædificia, quæ ab antiquis historicis celebrantur, vel hodiernum apud exterarum gentes conspiciuntur, ari nitidissime insculpta. Textui Germanico adjicitur versio. Gallica, ut exterorum quoque usui inserviat.

§. 19. In *Opere architectonico* FRANCISCI BORROMINI, Patrum Congregationis Oratorii, quod Romæ est, Architecti, describuntur Oratorium & ædesque Romanæ P. P. Congregationis Oratorii S. *Philippi Neri*. Prodiit Roma An. 1725, in fol. (plag. 8, Tabb. 67).

§. 20. In *Schola vero civili Architectura*, quam FERDINANDUS RUGGERI, Architectus Italus, idiomate patrio *Florentia* An. 1722, in fol. reg. (Tabb. 80) edidit, præmissa præfatione & dedicatione cum indice contentorum, exhibentur ornamenta januarum & fenestrarum cum mensuris, ichnographia, orthographia & sectionibus verticalibus e potioribus Florentiæ ædificiis desumpta, quæ a celeberrimis Italiæ Architectis exstructa esse constat, ita ut nulla per totam Italiam occurrat urbs, quæ ædificiis se magis commendat Florentia.

§. 21. Non

§. 21. Non exiguus est numerus illorum scriptorum, quæ illustrandæ Architecturæ Goldmanniæ causa reliquit LEONHARDUS CHRISTOPHORUS STURMIUS & quæ post fata ipsius Augustæ Vindelicorum impensis Chalcographi Augustani JEREMIÆ WOLFFII lucem adspexerunt. Eorum argumentum ex ipso titulo comparet, quos hic ex Germanico in Latinum versos exhibere lubet. *Nimirum* An. 1718, in fol. (plag. 8, Tabb. 11) lucem adspexerunt *Idea & compendium Architecturæ Civilis*, explicationem terminorum technicorum & præcipuarum regularum exhibens; An. 1717, (plag. 17, Tabb. 17) *Officina ornatus architectonici perfecta*, in qua ordines architectonici juxta GOLDMANNUM, cujus insignia in hoc genere merita, describuntur; An. 1730, (plag. 4½, Tabb. 10) *Regula symmetriæ*, eaque in Architectura templi Salomonæi conspicuæ & ab eodem mutuo in nostrâ opera transumptæ; An. 1718, (plag. 4½, Tabb. 9) *Tractatio de arcuationibus architectonicis triumphalibusque arcubus rite designandis*; An. 1720, (plag. 3, Tabb. 17) *Institutio de interioribus ædificiorum rite ordinandis & disponendis*, ubi etiam de aperturis fenestrarum & januarum, & de caminis, scalis, coelis conclavium, aulis subdialibus præcepta reperiuntur. Anno eodem (plag. 4½, Tabb. 5) *Institutio Goldmanniana de ornatu architectonico extraordinario*, veluti picturis, quibus ædificia exor-

nantur, statuis & sculpturis, obeliscis, encarpis, cornibus Amalthææ &c. An. 1715, (plag. 4, Tabb. 15) *Institutio de commoda dispositione ædium privatarum & civilium*; An. eodem (plag. 5, Tabb. 8) *De suburbanis & nobilium ædibus in agris*; An. 1718, (plag. 21, Tabb. 35) *De construendis palatiis Principum* ad Architecturæ regulas & genium seculi nostri; An. eodem (plag. 6, Tabb. 13) *De ædificiis ad conventus publicos Provincia rectorum, magistratuum, mercatorum &c. instituendos aptis*; An. eodem (plag. 8, Tabb. 22) *De templis varii generis bene construendis*; An. 1720, (plag. 6½, Tabb. 15) *De ædificiis publicis, quæ cura orphanorum, liberalibus studiis erudiendorum, ob flagitia castigandorum, senum, ægrotorum, peregrinorum & vinctorum custodia destinantur, rite parandis*; An. eodem (plag. 2, Tabb. 5) *De monumentis defunctorum, cenotaphiis, castris doloris &c.* An. eodem (plag. 4½, Tabb. 10) *De machinis hydraulicis, aqua ductibus, fontibus & cisternis publicis, & tandem* An. 1721, (plag. 2½, Tabb. 4) *De Navium armamentariis & stationibus, itemque partibus rite parandis.* Ceterum huc etiam pertinet Prodomus Architecturæ Goldmannianæ editioni novæ & auctiori præmissus, qui sub titulo: *Vorbereitung zu einer neuen und vermehrten Edition der vollständigen Anweisung zur Civil-Bau-Kunst, Augustæ Vindelicorum* An. 1714, in fol. reg. (plag. 10, Tabb. 29) prodit.

diit. In eo de cognitione Architecto necessaria agit, consilium impertitur, quomodo Princeps efficere possit, ut omnis materia sufficienti copia in promptu habeatur, ædificium publicum describit, in quo materiæ cum machinis & instrumentis asserventur, & denique specimina quædam Architecturæ exhibet, veluti ideam palatii principalis, domus suburbanæ Ducis Megapolitani & turris alicujus prægrandis.

§. 22. In Anglia GUILLIELMUS HALFPENNY Londini An. 1728, in 4. (plag. 3, Tabb. 15) edidit libellum sub titulo: *Magnum in parvo*, seu *The Marrow of Architecture*, hoc est, Medulla Architecturæ. In eo ordines architectonicos juxta PALLADIUM una cum arcubus delineare docet.

§. 23. Artem tignariam illustrent DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1) JOHANNES WILHELM in *Architectura civili* idiomate Germanico edita Norimbergæ in fol. (5 plag. Tabb. 74) & JOHANNES VOGEL in *Architectura moderna* Germanico itidem idiomate conscripta (*Hamburgi* An. 1707, in fol. 3 plag. Tabb. 36). In Anglia JACOBUS SMITH edidit Tractatum de Arte tignaria Londini An. 1733, in 8. maj. (plag. 2, Tabb. 41) sub titulo: *The Carpenters Companion*, h. e. Fabrorum lignariorum Comes. Sed non alia habet quam WILHELMUS, nisi quod appendicem de ordinibus delineandis adjecerit.

§. 24. Artem secandi lapides in usum architectonicum, quam primus dedisse creditur PHILIBERTUS DE L'ORME in Architectura (§. 6), docent DECHALES in cursu (§. 4, cap. 1), qui sua ex opere, quod P. DERAN An. 1643 publicavit, præstantissimum in hoc genere, descripsit & DES ARGUES, cujus liber ex Gallico in Germanicum versus sub titulo: *Kunstrichtige und probmässige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau Kunst*, Norimbergæ An. 1699, in 8. (15 plag. Tabb. 154) prodiit.

§. 25. Quoniam vero Autores isti, si P. DECHALES excipias, omisissis demonstrationibus tantummodo praxin inculcant, neque etiam hic perfectam dedit Theoriam; ideo hunc defectum supplere conatus est FREZIER in *Theoria & Praxi de Sectione Lapidum*, seu *Tractatu de Stereotomia*, sermone Gallico duobus Tomis Argentorati 1737, & 1738, in 4. maj. edito (Tomus I, Alph. 2, plag. 14, Tabb. 27. Tom. II, Alph. 2, plag. 19½, Tabb. 69). In usum eorum, qui praxi operam navant, ex Tomo secundo excerpti poterant, quæ huc faciunt, aut opus insigne P. DERAN in Linguam Germanicam verti mereretur.

§. 26. Ad Architecturam aquarum spectant libri Italici sequentes: 1. JO. BAPTISTÆ BARATTERI *Architettura d'Acque* (Piacenza An. 1656, in fol. 3 Alph. 6 plag.) 2. CORNELII MEYERI, Batavi, *L'Arte di restituire*.

tuire a Roma la tralasciata navigazione del suo Tevere (Roma 1675, in fol. 2 Alph. 3 plag. cum multis figuris textui insertis) & ejusdem *Nuovi ritrovamenti* (Roma An. 1689, in fol. plag. 8, & 1696, in fol. plag. 12, cum figuris plurimis) 3. DOMINICI GUELMINI *della natura de' fiumi Trattato* (Bononia An. 1697, in 4. 2 Alph. 2 plag. 15 Tabb.). Ex *Meyeri* libro insigni plagio sua omnia descripsit Anonymus Gallus in libello *Amstelodami* An. 1696, in reg. 8. edito (6 plag. Tabb. 12) sub titulo: *Traité des moyens de rendre les Rivières navigables*. Quoniam vero Theoria loco est, quod ab Italis præsertim de motu aquarum traditum; ideo non alienum a scopo præsentis est injicere mentionem sylloges scriptorum de motu aquarum, quæ sub titulo: *Raccolta d'Autori, che trattano del moto dell' Aque*, Tomis tribus in 4. maj. Florentia An. 1723, (Alph. 9, plag. 6, Tabb. 44, cum multis figuris textui insertis) prodiit.

§. 27. Ad Architecturam aquarum referri quoque potest Tractatus de pontibus & aggeribus & dissertatio de crismatis, fornicibus, pilis & anteridibus pontium HENRICI GAUTIER, Architecti & Inspectoris viarum regiarum, pontium & aggerum in Gallia. Prodiit ille sub titulo: *Traité des ponts & chaussées*, Parisiis An. 1716, in 8. (plag. 14, Tabb. 26); hæc vero sub titulo: *Dissertation sur les Culées, vaufoirs, piles &*

poussées des Ponts. Habemus ab eodem autore Tractatum de viis muniendis sub titulo: *Traité de la Construction des Chemins*, (Parisiis An. 1716, in 8. (plag. 8, Tabb. 5) editum.

§. 28. De Architectura navali sermone Anglico commentatus est WILHELMUS SUTHERLAND, cujus quinque tentamina huc spectantia sub titulo: *The Shipbuilders Assistant, or Some Essays towards compleating the Art of Marine Architecture*, Londini An. 1711, in 4. (Alph. 1, Tabb. 13) lucem adspexerunt. Inprimis autem hanc Architecturæ partem tradidit Anonymus in Arte extruendi naves & earum constructionem perficiendi, quæ *Amstelodami* sub titulo: *L'Art de bâtir les Vaisseaux*, in 4. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 147, quarum 35 textui inseruntur) edita.

§. 29. Geometriam practicam ad Architecturam civilem applicatam addiscere licet ex opere Anglico, quod sub titulo: *Practical Geometry applied to the usefull Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration*, Londini 1726, in fol. (Alph. 1, plag. 11, Tabb. 40) edidit BATTY LANGLEY. Eodem instituto inservit *Architectura practica*, quam BULLET, Architectus Regius, An. 1691, in 8. maj. (Alph. 4, plag. 4) Parisi. publici juris fecit.

§. 30. In Dictionario Architectonico, quod *Londini* 1734, in 8. reg. (Alph. 2, plag. 18, Tabb. 33) sub titulo: *The Builder's Dictionary* pro-

diit, non modo termini explicantur, verum etiam ex Architectorum celeberrimorum scriptis excerpuntur, quæ res ipsas vocabulis denotatas concernunt. Unde non modo usui est Anglis, verum etiam exteris usui esse potest.

Ceterum nullam hic mentionem facimus scientiæ Architectorum militarium de BELIDOR, in qua multa habentur ad Architecturam spectantia singularia, quæ alibi frustra quæsieris, quia de hoc libro dicemus capite 13.

C A P U T XII.

De Pyrotechnia.

§. 1. **I**nter nostros, qui Pyrotechniæ operam dant, maximi fiunt CASIMIRUS SIMIENOWITZ, Polonus, JOHANNES SIGISMUNDUS BUCHNERUS & ERNESTUS BRAUNIUS. Illius opus a THOMA LEONHARDO BEBREN ex Latino idiomate in Germanicum translatum & a DANIELE ELRICH integra parte secunda auctum prodiit *Francofurti ad Manum* An. 1676, in fol. sub titulo: *Vollkommene Büchsen-Meistererey-Kunst*. Ex eo sua plerumque descripsit DECHALES in Cursu (§. 4, cap. 1). Istius *Theoria & praxis Artilleria* Germanico idiomate *Norimbergæ* An. 1685, in fol. (2 Alph. 18 plag. Tabb. 53) Hujus denique *Novissimum Fundamentum & praxis Artilleria* eodem sermone conscriptum *Dantisci* An. 1687, in fol. (2 Alph. 16 plag. Tabb. 60) lucem adspexit. Ceterum Autores isti non tantum de iis agunt, quæ in bello usui sunt, sed ignium quoque festivorum rationem exponunt.

§. 2. MICHAEL MIETH in *Artilleria recentiori praxi* lingua nobis vernacula conscripta (*Francof. An.* 1684, in fol. 3 Alph. 10 plag. Tabb. 60) tormentorum & mortariorum descriptionem omnium exactissimam dedit & ignium nocivorum rationem declaravit, festivis omissis. Atque hi Autores abunde satisfaciunt iis ipsis, qui Pyrotechniæ data opera incumbunt.

§. 3. Inter Gallos eminet SURIÆUS DE S. REMIGIO, cujus Commentarii Pyrotechnici (*Mémoires d'Artillerie*) accuratam descriptionem continent omnium machinarum & instrumentorum bellicorum hodie usitatorum, una cum rebus aliis eo pertinentibus. Optima editio est *Parisiensis* An. 1707, in 4. reg. (4. Alph. 17 plag. Tabb. 196), quæ ceteris quoque longe auctior.

§. 4. Ob peritiam bellicam celeberrimus COEHORNIUS sermone Batavo de Artilleria libellum brevem, sed

sed autore suo dignum, conscripsit, qui suppresso ejus nomine in Germanicum translatus sub titulo : *Der gründliche Unterricht von der Artillerie*, Hamburgi An. 1699, in 8. (10 plag. Tabb. 23) prodiit.

§. 5. Tyronum usui servit Fabrica *Vulcani*, quam *Eques de S. Juliano* (*Chevalier de SAINT JULIEN*) *Haga* An. 1706, in reg. 8. (10 plag.) edidit. Titulus libri : *La Forge de Vulcain, ou l'Appareil des Machines de Guerre*.

§. 6. An. 1713, idiomate vernaculo prodiit Compendium pyrotechnicum, Pyrotechniæ studiosis commendandum, sub titulo : *Gründlicher Unterricht von der Theoria und Praxi der heutigen Büchsenmeisterei*, *Frankofurti* An. 1713, in 8. (2 Alph. 4 plag. 29 Tabb.). Si titulo fidem habemus, lingua Gallica ipsum conscripsit *Eques de S. Juliano* modo laudatus, & inde in Germanicam transtulit *AUGUSTINUS BRAND*. Sed diversum non modo est a Fabrica *Vulcani* paulo antelaudata; verum etiam partem primam integram verbotenus ex *MIETHII* Artilleria descriptam reperio, quod quomodo in versione libri a Gallo Gallice conscripti accidere potuerit, non satis apparet.

§. 7. Aliud compendium, sed minoris pretii, ante dedit *GEORGIUS ANDREAS BOECKLER* Tom. III, & IV, *Manualis Architectura militaris* (*Francof. & Lipsf.* An. 1689, in 16, Tom. III, 4 plag. Tabb. 11, & Tom. IV, 10 plag. Tabb. 34). Cum tamen *COEHORNIUS*, *Eques de S. Juliano* & *BRANDIUS* tantum tradant, quæ usui bellico inserviunt; *BOECKLERUS* quoque de ignibus festivis tractat.

§. 8. Ceterum huc etiam referri debet *BLONDELLI* Tractatus de bombis jaciendis, qui sub titulo : *L'Art de jeter les Bombes*, *Parisiis* An. 1683, in 4. prodiit & in Germanicam linguam translatus *Sulzbachi* An. 1686, in 8. recusum. Scriptum Mathematico dignum. Huic affine est scriptum, quod sub titulo : *Le Bombardier François*, *DE BELIDOR*, *Parisiis* editum, *Amstelodami* recusum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 11, Tabb. 8), in quo simul praxis Pyrotechniæ concinna perspicuitate exponitur. Pertinet huc etiam *F. E. Comitæ de HERBERSTEIN* *Cyclodiatomia*, qua pro rei tormentariæ incremento motum ac tempus projectorum mensurat & demonstrat. (*Praga* An. 1716, in 8. Alph. 1, Tabb. 20).

CAPUT XIII.

De Architectura Militari.

§. 1. **Q**ui de Architectura militari commentati sunt, vel formas muniendi proprias, vel alienas exponunt.

§. 2. Primum forma muniendi Belgica admodum celeberrima extitit, de qua scripsit ADAMUS FREYTAG, Polonus, cujus *Architectura militaris* Germanice prodiit *Amstelodami* An. 1665, in fol. (2 Alph. 9 plag. Tabb. $1\frac{1}{2}$ Alph.). Eandem in numeris tantum immutavit GERHARDUS MELDER, cujus *Praxis fortificatoria*, *Frankfurti* An. 1666, in fol. lucem adspexit (plag. 36, Tabb. 8).

§. 3. Minori autem in pretio statim haberi coepit, cum An. 1645, Comes DE PAGAN suam muniendi formam publicaret *Parisiis* in fol. (1 Alph. 6 plag. Tabb. II) sub titulo: *Les Fortifications du Comte DE PAGAN*, postea in sermonem Germanicum translata. Cum eo in multis convenit HENRICUS RUSTIUS *Baro de RUSENSTEIN*, cujus muniendi forma cum *Melderiana* prodiit (§. 2).

§. 4. Eidem quoque agnata est, magis tamen quam *Rusiana* ab eadem distinet, quam BLONDELLUS sub titulo: *Nouvelle manière de fortifier les places*, *Parisiis* An. 1686, in 12. reg. (5 plag. Tabb. 12) in lucem

emisit, recusam *Hage Comitum* (An. 1686, in 8) bonam quidem, sed sumtuosam nimis.

§. 5. Comes DE VAUBAN duas muniendi formas invenit & secundum eas celeberrima munimenta exstruxit; sed neutram ipsemet descripsit. Priorem optime delineavit Abbas DU FAY, qui eam sub titulo: *La véritable manière de bien fortifier de M. VAUBAN* in lucem publicam emisit. (*Amstelod.* An. 1692, in 12. plag. 9). Posteriores primus descripsit Autor Anonymus in libro Gallico, cujus titulus: *L'Ingénieur François* (*Paris.* An. 1691, in 8. reg. $13\frac{1}{2}$ plag. Tabb. 33). Utramque STURMIUS, aliquoties jam laudatus, in libro Gallico sub titulo: *Le Véritable VAUBAN* explanavit (*Hage Comitum* 1709, in reg. 8. plag. 14, Tabb. 31). Recenset idem regulas Architecturae militaris fundamentales & principia Arithmeticae ac Geometriae practicae more communi praemittit, ut adeo tyronum instituto inserviat hic liber.

§. 6. COEHORNIUS suam muniendi methodum primum sermone Batavo edidit *Leeuwardie* An. 1685, in fol. (45 plag. Tabb. 14). Postea in sermonem Gallicum translatus prodiit *Hage Comitum* An. 1706, in reg. 8. (19 plag.

(19 plag. Tabb. 14) sub titulo: *Nouvelle Fortification, tant pour un terrain bas & humide, que sec & élevé.*

§. 7. Singulares muniendi formas, a reliquis prorsus dissidentes, apud Italos dedere ALEXANDER DE GROTTI & DONATUS ROSETTI. Prior prodiit Italice *Venetiis* An. 1617, (3 Alph. in fol.) anno sequente Monachii Germanice recusa: posterior itidem Italice *Augusta Taurinorum* An. 1678, in fol. (Alph. 2, plag. 5).

§. 8. Similiter apud nostros inusitatam reliquis formam dedit BERNHARDUS SCHEITER in libro Germanico, cui titulus: *Neu vermehrte und verstärkte Vestungs-Bau- und Kriegs-Schule* (Brunswiga An. 1672, in fol. 11 Alph. 7 plag. Tabb. 24). Eam cum anno sequente oppugnaret CHRISTIANUS NEUBAUER eademque aliam suam opponeret in libro Germanico, cui titulus: *Wohlmeinende Gedancken, oder Discurs über ausgegangne Fortification des Tit. Herrn JOH. BERNHARD SCHEITERS* (Colonia ad Spream in 8.); SCHEITERUS An. 1677, *Argentorati* in fol. (1 Alph. 2 plag. Tabb. 8) *Examen fortificationum* in lucem publicam emisit, in quo *Neubauerianam* oppugnat, suam defendit, aliamque novam superaddit. NEUBAUERUS autem An. 1679, suam in *vera praxi Architectura militaris* (Stargardia An. 1679, in fol. plag. 19, Tabb. 8) uberior exposuit.

§. 9. ERNESTUS FRIDERICUS *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. V.

DE BORGS DORF novas muniendi methodos publicavit cum in Munimento inexpugnabili, cui titulus: *Unüberwindliche Festung* (Ulma An. 1682, in 8. plag. 7, Tabb. 8), tum in scripto altero, cui titulus: *Die befestigte Stütze eines Fürstenthums, oder neu erfundene Defension wider das sonst Welt bezwingende Canoniren, Bombardiren und Miniren.* (Norimberge An. 1687, in 8. cum aliquot figuris).

§. 10. GEORGIUS RIMPLERUS in libello Germanico, cui titulus: *Die bevestigte Festung* (Francofurti An. 1674, in 12. plag. 16) haecenus usitatas muniendi formas omnes rejicit, tanquam principiis spuris nitentes, & axiomata prorsus nova substituit: quibus tamen convenientem muniendi formam ipse non delineat. Nemo autem magis in ea delineanda desudavit, quam Cl. STURMIUS in libello, cui titulus: *Entdeckung der unstreitig allerbesten Manier zu bevestigen* (Francof. ad Oderam An. 1704, in 8. plag. 12, Tabb. 9). Alias quoque eandem operam sumsit DANIEL SUTTINGER in scripto Germanico *Dresdae* in fol. edito (plag. 14, & 9½ plag. fig.).

§. 11. Scripta RIMPLERI admodum rara annotationibus & schematicis, quæ desiderabantur, illustrata, additis nonnullis aliis, *Dresdae* in 4. An. 1724, (Alph. 3, plag. 9, Tabb. 10) recudi curavit LUDOVICUS ANDREAS HERLIN, qui

Q

STUR.

STURMII de RIMPLERI inventis
judicium parum probat.

§. 12. RIMPLERI principia probat J. H. LANDSBERGIUS, Germanus, Staruum Belgii fœderati Architectus militaris primarius, & iisdem consonam muniendi formam delineat: cum tamen non ex assè ipsi satisfaciat, novam quandam aliam substituit, in libro Gallico, cui titulus: *Nouvelle manière de fortifier les places* (Hagæ Comitum, An. 1712, in 4. plag. 11, Tabb. 8).

§. 13. Idem laudatus LANDSBERGIUS, una cum aliis Architectis militaribus peritis, valde probat *Architecturam militarem*, quam DANIEL SPECKLE, Architectus Argentoratensis, jam An. 1589, in fol. (2 Alph. 10 plag. Tabb. 36) publici juris fecit. Hinc etiam factum est, ut præclarum in hoc genere opus *Dresdæ* An. 1705, in fol. fuerit recusum (2 Alph. 12 plag. Tabb. 24).

§. 14. Sunt vero adhuc plures inter nostros, qui singulares muniendi formas dedere, attentione Architectorum militarium non indignas. Huc refero JOHANNEM FRANCISCUM GRIENDEL AB AACH, qui septem muniendi formis, utut eidem fundamento superstructis, inclaruit (*Norimbergæ* An. 1683, in fol. plag. 14, Fig. plag. 15), CHRISTOPHORUM HEER, qui in *Theoria & praxi Artis muniendi* (*Francof.* An. 1689, in 4. plag. 16, Tabb. 39) elegantes dedit sibi que proprias constructio-

nes; in *Speculo vero Artis muniendi* (*Lipsiæ* An. 1694, in 4. plag. 17, Tabb. 31) præterea varia munimenta celebria Europæ describit, & CHRISTOPHORUM HEIDENMANN, cujus *Architectura militaris* una prodiit *Monachii* An. 1664, in fol. (1 Alph. 22 plag. 27, & fig. plag.) altera ibidem An. 1673, in fol. (plag. 10, & Fig. plag. 14).

§. 15. Nec forte e re esset WILHELMI DILICHII *Perikologiam* (*Francofurti* An. 1640, in fol. 2 Alph. 2 plag. Tabb. 409, seu 9 Alph. 11 plag.) in scenam adducere, quoniam Architecturæ militaris periti multa ad praxin proficua in ea reperient. Immo si verum fateri fas est, in hoc autore occurrunt, quæ dudum posthac in Gallia tanquam nova inventa prodita fuerunt. Unde melius de eo judicium ferendum, quam tulit DECHALES in Tractatu de illustribus Mathematicis Tomo I, Mundi Mathematici (§. 4, cap. 1). Idem quoque edidit *Scholam militarem* (*Francof. ad Mœn.* An. 1689, in fol. 10 Alph. 13 plag. cum ingenti numero figurarum partim æri, partim ligno incisarum), in qua omnia ad bellum tam veterum, quam nostris moribus necessaria describuntur & illustrantur.

§. 16. In eadem scena mimi vices adimplebit WENDELINUS SCHILDKNECHT, qui muniendi formam Batavam stylo histrionico describit (*Stettini* An. 1652, in fol. plag. 129, & fig. plag. 20½).

§. 17. Eclecticam quandam muniendi formam ex ANTONII DE VILLE, Comitum DE PAGAN & VAUBAN methodis deductam proposuit Autor Anonymus in libro, cui titulus: *Nouvelle manière de fortifier les places, tirée des méthodes du Chevalier DE VILLE &c.* (Amstelodami An. 1689, in reg. 12 plag. 10 Tabb. 15), qui regulas Architecturæ militaris bene explicat, simulque ideam exhibet, quomodo diversorum Architectorum muniendi formas una ad praxin transferre liceat. ANTONII DE VILLE *Ars muniendi* prodiit Amstelodami An. 1675, recula juxta editionem Parisinam An. 1672, in 8. (1 Alph. 3 plag. cum figuris multis partim textui insertis, partim seorsim excusis). Multa hic distincte exponuntur, quæ alibi vel omittuntur, vel strictim proponuntur.

§. 18. MATTHIAS DOEGEN in *Architectura militari moderna*, quæ An. 1647, in fol. (Alph. 5, plag. 13, Tabb. 78), Latina lingua prodiit, formam equidem muniendi Batavam nonnisi describit, quæ illo tempore usitatissima erat; multa tamen lectu digna habet iis præsertim, qui in extructione munimentorum scitu necessaria nosse desiderant. Regulas, quas tradit, exemplis veris celebrium tunc temporis per Europam munimentorum illustrat, calculos, ubi iis opus est, perspicue explicat, de figurarum irregularium fortificatione experientia confirmata tradit,

modumque munimenta oppugnandi & defendendi declarat. Singula variis historiis tam veteribus, quam novis confirmat. Partem Architecturæ militaris, quæ de locis muniendis agit, *Hercotectonicen*; alteram vero, quæ de munimentis oppugnandis & defendendis tractat, *Arcotectonicen* vocat. Et hujus partem oppugnatoriam *Poliorceticen*; repugnatoriam vero *Antipoliorceticen* appellat.

§. 19. BONAJUTUS LORINUS, Nobilis Florentinus, cujus *De Architectura militari* Libri quinque a DAVIDE WORMBSER ex Italico in Germanicum versi *Francosurii ad Mœnum* An. 1607, in fol. prodierunt, multa habet, quæ etiam in Architectura civili usui sunt, & libro quinto Mechanicam practicam tradit, variaque instrumenta & machinas varias describit.

§. 20. DONATUM ROSETTI singularem quandam muniendi methodum invenisse, quæ a ceteris prorsus dissidet, eandemque sub titulo: *Fortificazione à rovescio* sermone patrio edidisse, supra jam meminimus (§. 7). Ejus ideo mentionem injicere lubet, quia peritis viam ad ulteriora sternit. Unde eidem multum tribuit ALEXANDER CHRISTIANUS LE MAITRE in *Troja vetere & nova* An. 1684, in 8. (Alph. 1, plag. 7, Tabb. 14), ob principia utilia lectu dignissimus.

§. 21. Nec minus singularis ea est, quam pro inexpugnabili vendi-

tat JACOBUS DE LA VERGNE, Architectus militaris Cæsareus primarius, cujus *Nouvelle Fortification imprenable par force d'Armes*, lucem adspexit *Vienna Austria* An. 1700, in 4. (plag. 17, Tab. 1). Ostendit idem, quomodo munimenta ordinaria ad novam istam formam reduci queant. Edidit idem ibidem An. 1698, duos Tractatus alios in 4. quorum unus inscribitur. *De l'utilité d'avoir un bon Ingénieur ou Directeur général des Fortifications dans un Etat &c.* alter vero: *Nouveau exercice du Gabion & de la Fascine*. Constat ille plag. 11, hic itidem plag. 11, & Tabb. 3. Quemadmodum vero illi jungit Tractatum de officiis Architectorum militarium, qui subsunt Directori generali; ita in altero quoque agit de modo oppugnandi munimenti satis perspicue.

§. 22. Hactenus recensitas muniendi formas omnes, sola Landsbergiana excepta, una cum aliis a nobis brevitatis studio pratermissis atque propriis, breviter describit & ad examen revocat, vir in hoc studiorum genere probe versatus sæpiusque jam nobis laudatus STURMIUS in *Architectura militari hypothetica & eclectica* (*Norimbergæ* An. 1702, in 8. plag. 10, & fig. plag. 6), ex quo adeo libro brevi temporis spatio cognoscere licet, quæ alias ex vastis voluminibus cum multo sumtum & temporis dispendio forent conquirenda. In prima editione consideratur orthographia munimento-

rum. Hic vero defectus suppletur in altera, quæ multo auctior *Norimbergæ* An. 1719, in 4. (Alph. 1, Tabb. 41) prodiit.

§. 23. Novam quoque muniendi methodum dedit ROZARD, Architectus militaris Electoris Bavariæ, quam in libro sub titulo: *Nouvelle Fortification Française, Norimbergæ* in 4. reg. An. 1731, Alph. 1, Tabb. 42) editio describit. In parte altera desiderio aliorum satisfacturus adjecit explicationem trium systematum Comitum DE VAUBAN, qualem ex ipsis munimentis ab eodem extructis hausit, una cum omni praxi offensiva & defensiva, ubi etiam præliorum rationem habet, addens ubivis observationes, quas experientia domestica suggerebat.

§. 24. Restat ut de iis Autoribus dicamus, qui in gratiam Architecturæ militaris studiosorum libros ediderunt. Commendandi hic nobis sunt DON SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO in *Architectura militari*, quæ sub titulo *Ingénieur pratique, Bruxellis* An. 1696, in 8. (1 Alph. Tabb. 35) lucem adspexit; CL. OZANAM, cujus Tractatus de *Architectura militari* (*Traité de Fortification*) *Parisis* An. 1694, in 8. reg. (17 plag. Tabb. 44) prodiit; *Eques de S. JULIANO* supra laudatus, cujus *Architectura militaris* publicata est sermone Gallico, *Hagæ Comitum* An. 1705, in 8. (plag. 11, Tabb. 25). In eundem censum venit

ANO.

Anonymi Architectus militaris Gallicus supra laudatus (§. 5).

§. 25. In vernacula nostra notissimi sunt libri sequentes: 1. GEORGE CONRAD MARTII *Europäischer Ingenieur* (Norimbergæ An. 1696, in 8. 2 Alph. 16 plag. Tabb. 60), qui præter Architecturam militarem etiam Arithmeticam & Geometriam practicam prolixè tradit: 2. JOH. HEINRICI BEHRS *aufs neu verschanzter Turenne oder gründlich-alt und neue Kriegs-Bau-Kunst* (Francofurti An. 1690, in 8. 1 Alph. 16 plag. Tabb. 32): 3. JOHANN SEBASTIAN GRUBERS *Friedens- und Krieges-Schule* (Norimbergæ An. 1697, in 8. 2 Alph. 11½ plag.): 4. Ejusdem *Examen Fortificationum* (Lipsiæ An. 1703, in 8. 1 Alph. 22 plag. Tabb. 19): 5. ejusdem *neuer und gründlicher Unterricht von der heutigen Fortification und Artillerie* (Norimb. 1700, in 8. 1 Alph. 17 plag. 16 Tabb.) aliique.

§. 26. Anno 1722, *Bruxellis* prodire Principia Architecturæ militaris modernæ (*Les Principes de la Fortification moderne*) Directoris Academiæ militaris Cæsareæ, quæ *Bruxellis* est, HARTMANNI in reg. (plag. 19, Tabb. 9). Explicat principia Comitæ de VAUBAN & COEHORNII, ac multus inprimis est in uberius explicanda munimentorum oppugnatione & defensione, quam ab aliis factum: ut hinc addiscere liceat, quomodo munimentorum forma ad examen re-

vocanda, ubi quidem rectum de iis judicium ferre velis.

§. 27. Inprimis autem commendari meretur Anonymi * Institutio Architecturæ militaris, quam sub titulo: *Le parfait Ingénieur François*, *Amstelodami* An. 1734, in 4. (Alph. 1, plag. 22, Tabb. 42) edidit. Omnem enim artem muniendi secundum triplicem non modo methodum Comitæ de VAUBAN, verum etiam ER-RARDI, SARDII, Equitis de VILLE, Equitis de S. JULIANO, MAROLOISII, BOMBELLI, BLONDELLI, Comitæ de PAGAN, COEHORNII, SCHEITERI, STURMII aliorumque anonymorum explicat, artem muniendi irregularem reformat, & praxin offensivam ac defensivam consummatam tradit. De STURMII cogitatis parum honorifice sentit, quantuscumque sibi visus fuerit Apollo.

§. 28. Antea celebrabatur liber Gallicus, quem secunda vice multo auctiorem sub titulo: *Les Travaux de Mars ou l'Art de la Guerre*, seu Artis militaris, *Parisiis* An. 1685, in 8. reg. ediderat ALLAIN MANESSON MALLET tribus tomis. Tomus I, constat Alph. 1, plag. 2, Tabb. 152; Tomus II, plag. 22, Tabb. 111; Tomus III, Alph. 1, plag. 3. Figuræ ipsi textui insertæ sunt & ornatus gratia multa adjiciuntur, quæ ad rem non faciunt, quemadmodum fecit in Geometria practica supra laudata (§. 30, cap. 3). Etsi

Q3

autem

* Abbatis DEIDIER.

autem ab eo tempore Architectura militaris multum subierit mutationis; in primo tamen præsertim ac tertio tomo habentur, quæ non sine fructu leguntur. Editionis primæ versionem Germanicam dedit An. 1672, *Amstelodami* in 8. reg. excusam sub titulo: MANESSON MALLET *Kriegs-Arbeit*, qui puritatem linguæ Germanicæ ridicule affectabat PHILIPPUS A ZESEN, sed ob insuetum dicendi genus nullius momenti.

§. 29. Regulas fundamentales Architecturæ militaris qui cognoscere avent, iis abunde satisfaciet JOHAN. JACOBUS WERTMULLER in Theatro regularum fundamentalium Architecturæ militaris tam veterum, quam recentiorum, *Schauplatz der alten und neuen Fortifications-Maximen, Francof. ad Mæn.* An. 1691, in 8. 1 Alph. 20 plag. Tabb. 12) & in Lapide Lydio Architectorum militarium, *Probiere-Stein der Ingenieur* An. 1685, in 8. 16 plag. Tabb. 4), tum etiam in *Apologia fortificatoria*, in qua Belgicam muniendi formam defendit, quamvis eam aliqua emendatione indigere fateatur (*Francof.* An. 1691, in fol. 1 Alph. 15 plag. & Fig. plag. 16).

§. 30. Quæ in excitatione muniementorum observari merentur, docent JOHANNES FAULHABER in *Schola Architectorum militarium* (*Norimbergæ* An. 1637; in 4.) & HEER in *Praxi Artis muniendi* (§. 14) præter alios, quos antea laudavimus.

Inprimis hic commemorari meretur LAMBERTUS LAMBION in *Praxi Architectonica* (*der Bau-Practica*) (*Viennæ* An. 1696, in 8. plag. 16, & Fig. plag. 1½), ubi multa singularia occurrunt præsertim de cuniculis subterraneis, nisi quod linguæ Germanicæ non satis peritus male scripserit, ut adeo libellus Germanice scriptus in idioma Germanicum verti meretur.

§. 31. De praxi militari tam offensiva, quam defensiva data opera scripsit GOULON in libello Gallico, cui titulus: *Mémoires pour l'attaque & pour la défense d'une Place* (*Hagæ Comitum* An. 1706, in 8. plag. 13, Tabb. 4) & qui eodem adhuc anno recusus *Wesélii* in 8. reg. (plag. 5, Tabb. 4) postea in Germanicum idioma translatus (*Norimb.* An. 1709, in 8. plag. 5½, Tabb. 4).

§. 32. Etsi autem multa utilia dederit, quæ domestica experientia ipsum docuit, non tamen dedit, quæ sufficiunt. Anno autem superiori 1737, *Hagæ Comitum* in 4. reg. (Alph. 1, plag. 5½, Tabb. 33) prodiiit *Comitis* DE VAUBAN de praxi offensiva & defensiva opus posthumum, sub titulo: *De l'attaque & de la défense des places*, quod observationibus ultra dimidium seculum a se continuatis superstruitur. Composuerat idem in usum Ducis Burgundiæ, cui MSC. dederat, non ea intentione, ut publici juris fieret; sed ut arcani instar asservaretur. Neque adeo facile

facile erat MSC. istud describi, propter Tabulas majores, in quibus Schemata nitidissime delineata erant. Cum in eo candide de singulis mentem suam aperuerit; nullum superesse potest dubium, quin insigni cum fructu legatur ab iis, qui castra sequuntur, vel de praxi offensiva & defensiva judicium sibi sumunt.

§. 33. JOHANNES TEYLER in *Architectura militari* (Rot. 1697, in 4. plag. 8, Tabb. 41) ad Architecturam militarem Algebram applicare coepit, quoad calculum inprimis probabili-um, spem ferendi planum sclopeto vel tormento ad mensuram revocaturus. Aliud vero Specimen Algebrae ad Artem Fortificatoriam applicatae, diversum prorsus a *Teyleriano*, etiam dedit JOH. MATTHIAS HASSIUS, nunc Mathematicum Professor Wittebergensis, *Lipsiae* An. 1707, in 4. (plag. 3½, Tab. 1).

§. 34. Tandem hic commemorandum est opus, quod in usum Architectorum militarium conscripsit BELIDOR, Commissarius ordinarius Artilleriae, Professor Mathematicum Regius in Scholis eidem destinatis, editum *Parisiis*, mox vero *Hagae Comitum* recusum An. 1734, in 4. reg. (Alph. 2, plag. 10, Tabb. maj. 53) sub titulo: *La Science des Ingénieurs dans la conduite des Travaux de Fortification & d'Architecture civile*. In eo Autor, qui omni studio id agit, ut ad solidam scientiam Architectos militares perducatur, eoque fine in eorum

gratiam Cursum mathematicum jam ante edidit, recusum *Parisiis* An. 1725, in 4. reg. cum 24 Tabulis figuras nitidissime aeri incisas exhibentibus, in quo ea inprimis docentur, quae iisdem scitu necessaria sunt ad finem istum consequendum, non modo ea tradit, quae ex Architectura militari, verum etiam quae ex civili iisdem perspecta esse debent. Traditur hic theoria multorum, quae haecenus in utraque Architectura nudae experientiae fuere superstructa. Videre hoc est ex libro primo atque secundo, quorum isto quae ad muros, hoc autem quae ad fornices pertinent, ex principiis geometricis & mechanicis demonstrat, usus hinc inde demonstrationibus algebraicis. Usui esse potest hoc opus iis, qui ad formam scientiae vere mathematicae utramque Architecturam reducere voluerint ea demonstraturi, quae haecenus experientiae fide sumuntur nondum satis limata. Opus hoc etiam in censum scriptorum de Architectura civili referendum, inter quae eminet, quatenus viam ad ulteriora sternit.

§. 35. Non silentio praetereundus est libellus Germanicus, quem JOHANNES CHRISTOPHORUS GLASERUS *Hale Saxonum* An. 1728, in 4. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 6) sub titulo: *Vernünfftige Gedancken von der Kriegs-Bau-Kunst erste Probe* edidit, in quo ostendit in omnibus muniendi formis, quae haecenus prostant, deficere defensionem fossae sufficientem, novamque

vamque proponit, qua huic defectui succurritur. Addit adhuc aliam per Algebram erutam. Plura dare constituerat Specimina Architecturæ militaris perficiendæ: sed nescio qui factum, ut a proposito suo destiterit.

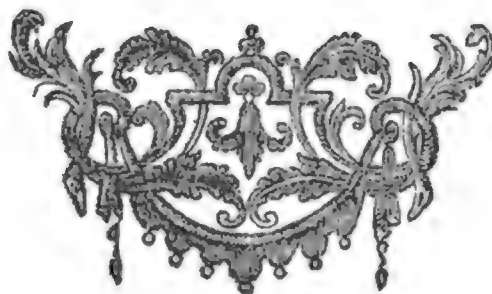
§. 36. Artem militarem universam describit GEORGIUS ANDREAS BOECKLER in Schola militari moderna: *Neu vermehrte Kriegs-Schule*, quæ *Francofurti ad Mœnum* An. 1635, in 8. (Alph. 2, plag. 8, cum figuris multis æri incisis) prodiit. Tradit autor ea omnia, quæ in bello usui esse possunt, ita ut etiam jus militare Cæsareum, Suecicum & Batavum libro suo inseruerit, & sub finem in Appendice varia arcana doceat, quæ militibus scitu necessaria.

§. 37. Huc etiam pertinet JOANNIS FRIDERICI A FLEMMING, Regis Poloniarum & Electoris Saxonix Tribuni militum pedestrium, Miles Germanus perfectus, *der vollkom-*

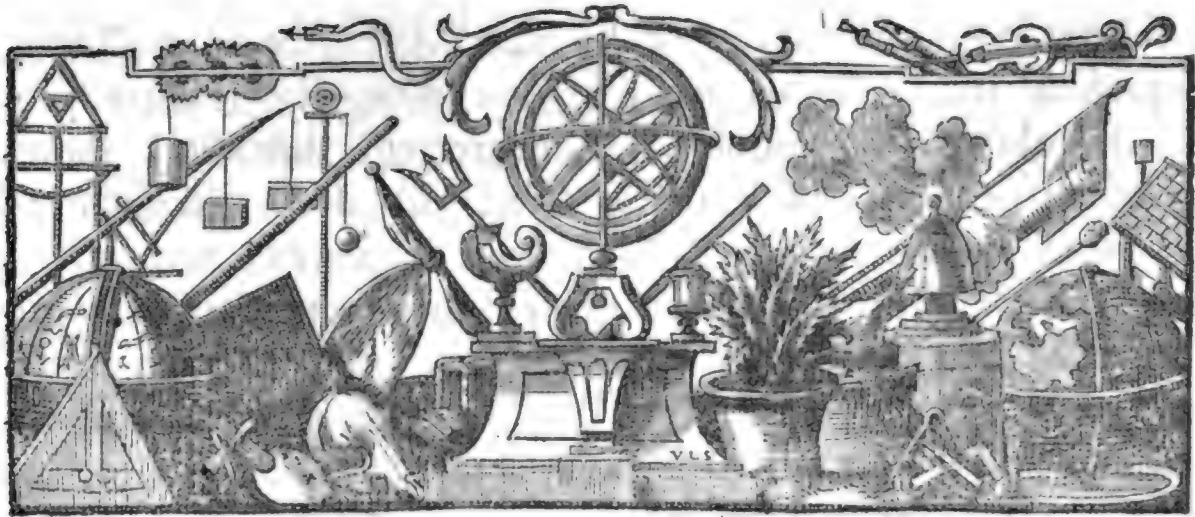
mene Deutsche Soldat, qui *Lipsiæ* An. 1726, in fol. (Alph. 9, plag. 8, Tabb. 64) prodiit, in quo autor omnem scientiam militarem, imprimis quæ ad militem pedestrem spectant, dilucide exponit. In eundem quoque censum referri potest liber Gallice conscriptus, quem sub titulo: *Les Fonctions du Capitaine de Cavalerie & les principales de ses Officiers subalternes*, multo auctiorem *Parisiis* edidit DE BIRAC, recensum *Hagæ* An. 1693, in 8. (Alph. 1, plag. 2, Tabb. 14). Optandum vero foret, ut quis rei militaris peritus, in Mathesi versatus & methodi gnarus Artem militarem in eam formam redigeret, qua nos Pyrotechniam, Architecturam militarem & civilem representavimus, iis simul perlustratis, quæ Autores modo laudati tradiderunt, & ex Autoribus superioribus aliisque peti possunt.

FINIS

Commentationis de præcipuis scriptis mathematicis.



PRÆFATIO



COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESIOS
RECTE INSTITUENDO.



PRÆFATIO.



UI Mathesi addiscendæ operam navant, non eundem sibi scopum præfigunt. Elementa nostra Matheseos universæ ita conscripsimus, ut pro multiplici discentium scopo satisfaciant omnibus. Quoniam vero non omnes eadem industria eidem incumbere tenentur, nec omnia addiscenda omnibus; igitur nobis propositum est docere, quid unicuique conveniat.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

R

Mul-

Multum omnino interest, ut studium Matheseos rite tractetur, siquidem sine molestia ac temporis dispendio feliciter progredi volueris. Quamobrem nostrum esse duximus, monstrare viam, qua sit eundum, ne ad devia declinemus: id quod facillime accidit. Eam igitur, quam in nos suscepimus, de studio mathematico rite instituendo tractationem utilitate sua non destitutam iri confidimus. Quamobrem suademus, ut omni attentione eandem legat & relegat, qui Matheseos addiscendæ animo ad Elementa nostra legenda accedit. Quodsi quis studiose observet, quæ præcipimus, eum participem futurum fructus, quem eidem pollicemur, nulli dubitamus. Insignem vero percipiet voluptatem, ubi fenserit voto, respondere eventum: quem ubi prævidet, eo ipso accendetur ardor majore industria Matheseos studium continuandi, quam qua idem inchoavit. Nostrum inprimis est amplificare Matheseos studium, nunquam satis commendandum, nunquam prodignitate deprædicandum. Nihil igitur omittendum, quod huc quomodocunque facit. Alienam felicitatem qui nostram existimamus, id unice intendimus, ut dicamus, ut scribamus, quæ prosunt aliis. Quamobrem nec quicquam magis in votis habemus, quam ut omnes, qui ad Mathesin addiscendam animum appellant, participes fiant ejus fructus, qui ex studio mathematico percipi potest.

COMMENTATIO
DE
STUDIO MATHESEOS
RECTE INSTITUENDO.

CAPUT PRIMUM.

De diversis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur.

§. 1. **T**res dantur gradus cognitionis humanæ in omni veritatis genere, quos recto facultatum cognoscendi usu acquirere licet. Aut enim in eo acquiescimus, quod veritatem ab aliis propositam intelligamus; aut ulterius progressi id agimus, ut ejusdem etiam convincamur; aut denique operam damus, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus.

§. 2. Primus gradus acquisitu omnium facillimus & a ceteris præsupponitur: neque enim veritatis, nisi intellectæ, convincitur animus; sive eum a priori, sive a posteriori convincere volueris; multo minus autem ex iis, quæ cognovisti, alia in-

cognita deducere potueris, nisi ea, quæ cognovisti, satis intellexeris. Gradus secundus difficilius comparatur primo, cum multo ampliorem requirat facultatum usum; nec ad tertium adspirandum, nisi ubi ad secundum ascenderis. Tertium denique omnium difficillime consequi licet, cum amplissimum omnium exigat facultatum usum. Qui in Logica & Psychologia satis fuerint versati veritatem dictorum abunde perspicient: ceteris satisfaciet experientia domestica, ubi diversis hisce gradibus acquirendis non sine successu operam dederint. Elucescet quoque quodammodo veritas ex iis, quæ mox de illis uberius dicentur.

§. 3. Cognitionem gradus primi
R 2 acqui-

acquisturus, definitiones, theoremata & problematum resolutiones sibi perspecta reddere tenetur, omittis demonstrationibus. Cognitionis secundi gradus compos futurus addere debet demonstrationes. Ad cognitionem tandem tertii gradus perventurus, in rem presentem veniat necesse est, & ex iis, quæ ipsi cognita & perspecta sunt, acquisito cum secundo gradu facultatum usu, eruerestudeat opus est sibi nondum nota: quod quomodo fiat, posthac indigitabimus, quantum presentis instituti ratio permittit. Neque enim nobis jam propositum est explicare Artem inveniendi, quæ legitimum facultatum usum in eliciendis incognitis ex cognitis distincte docet.

§. 4. Theoremata & problemata eorumque resolutiones non intelliguntur nisi per definitiones terminorum, qui in iisdem occurrunt. Incipiendum igitur est a definitionibus, quæ ideo propositionibus præmittuntur; vel omnes simul, quemadmodum in Arithmetica & Geometria fecimus; vel eo saltem loco, ubi occurrunt propositiones, quæ per eas intelligendæ, quemadmodum in reliquis Matheseos partibus non sine ratione factum esse apparet.

§. 5. Ad definitiones intelligendas afferenda est attentio, sub initium præsertim molesta, adeoque omni modo excitanda & fovenda. Conducit huc, si definitiones exemplis, veluti in Arithmetica numeris, illus-

trentur, & in Geometria, ad figuram oculis presentem applicentur. Ita enim facilius intelliguntur; ut molestia vanescat, quæ attentionis conservandæ difficultatem parit. Ita definitio similitudinis illustratur exemplis duorum horologiorum, & duorum ædificiorum, quæ in scholio definitioni adjecto in medium attulimus (§. 27. *Arith.*). Definitionem partis aliquotæ illustramus exemplo lineæ in quatuor partes æquales divisæ, cum enim pars una quater sumta lineam integram adæquet, erit ea pars aliquota (§. 30. *Arithm.*). Ita, in ipsa Arithmetica, definitionem numeri quadrati & radices quadratæ numeris adjectis illustravimus, ut tali exemplo non sit opus. Cum definitiones in Geometria retulerimus ad figuras; me tacente apparet, quomodo ad eas applicari possint, veluti dicendo in definitione trianguli æquilateri (§. 88. *Geom.*), quod sit $AB=BC=CA$ (*Tab. I. Fig. 16*); perinde ac si ratio cinio ostendi deberet, figuram, quæ oculis subjicitur, esse triangulum æquicrurum. Sensus nimirum, aut imaginatio, quæ sensu antea percepta denuo præsentia sistit, attentionem in objectum trahit, cujus idea exhibet, quæ in definitione continentur; quo ipso & attentio excitatur & conservatur: cumque definitionem a nobis intelligi nobis jam conscii simus, molestia evanescit, quam termini non satis intellecti primum nobis objiciebant, immo in voluptatem abit, quæ ardorem

ardorem dicendi accendit & inflammat, prout casus tulerit.

§. 6. Definitiones eo ordine collocantur, ut termini in anterioribus jam fuerint definiti, qui datam ingrediuntur. Ex. gr. Commensurabilia definiuntur, quod partem aliquotam communem habent, vel eorum unum sit pars aliquota alterius (§. 31. *Arithm.*). Pars vero aliquota jam fuit definita (§. 30. *Arithm.*), immo pars in genere (§. 9. *Arithm.*). Similiter Quadratum definitur per figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam (§. 98. *Geom.*). Sed figura jam ante (§. 34. *Geom.*), figura quadrilatera (§. 97. *Geom.*), figura æquilatera (§. 88. *Geom.*), figura rectangula (§. 97. *Geom.*) fuit definita. Unde consequitur, definitiones legendas esse eo ordine, quo in singulis disciplinis numerantur, & definitiones terminorum esse repetendas, qui datam ingrediuntur. Ita nimirum obtinetur, ut quælibet earum penitus intelligatur, & animo ingenerentur notiones adæquatæ, in quibus nihil latet obscuri, ut intellectus plena luce perfruatur. Ex. gr. ubi definitionem commensurabilium expendere volueris, illustranda primum est exemplis (§. 5), utrumque ejus casum repræsentando in numeris atque lineis. Ad exempla tam arithmetica, quam geometrica applicanda est definitio; ita ut primum contentus sis notionibus confusis, quas conspectus numerorum & figurarum

suggerit. Deinde applicandæ ad eadem exempla sunt definitiones partis & partis aliquotæ; ita enim futurum, ut definitionem commensurabilium in utroque quantitarum genere penitus intelligas, nec quicquam relinquatur obscuri, ubi eadem industria in definitionibus anterioribus fueris versatus. Sint ex. gr. duo numeri 3 & 12. Quoniam 3, sive ternarius, quater sumtus, numerum 12, sive duodenarium adæquat, erit ille hujus pars aliquota (§. 30. *Arithm.*); adeoque numerus unus est pars aliquota alterius. Numeri igitur hi 3 & 12 commensurabiles sunt. Et quoniam 3, 3, 3 & 3 simul conficiunt unum numerum, nempe 12 sive duodenarium, adeoque idem sunt cum duodenario; 12 est totum, 3, 3, 3 & 3 sunt ejus partes, consequenter 3 pars una (§. 9. *Arithm.*). Similiter sint duo numeri alii 6 & 8, quorum primus componitur ex 2, 2, & 2, seu binario ter sumto, alter ex 2, 2, 2 & 2, seu binario quater sumto. Habent igitur partem aliquotam communem (§. 30. *Arithm.*), adeoque commensurabiles sunt. Et quia 2, 2 & 2 simul sumti idem sunt cum 6, & 2, 2, 2 & 2 simul sumti idem cum 8; in genere etiam patet, esse 2 sive binarium partem ipsorum 6 & 8 (§. 9. *Arithm.*), adeoque communem. Idem etiam in lineis repræsentatur, si linea AB ter transferatur in CD, ita ut sit $CE=EF=FD=AB$.

Erit enim AB pars aliquota ipsius CD

R 3

(§. 30.

Tab. I.
Fig. 1.

Tab. I.
Fig. 2.

(§. 30 *Arithm.*). Unde lineæ AB & CD commensurabiles sunt, & CE = AB intelligitur pars ipsius CD (§. 9. *Arithm.*). Eodem modo patet casus alter, si recta AB concipitur divisa in tres partes æquales, ut sit AC = CD = DB, & EF in quatuor partes æquales EG, GH, HI & IF, ut sit EG = GH = HI = IF ac præterea EG = AC. Erit enim AC pars aliquota communis (§. 30 *Arithm.*), & eadem AC pars utriusque lineæ AB & EF intelligitur, quia AC + CD + DB & recta AB, itemque EG + GH + HI + IF & recta EF sunt una eademque linea (§. 9. *Arithm.*). Unde lineas AB & EF commensurabiles esse liquet.

§. 7. Ne evidentiae quid desit, probe observandum est, intellectum lucem foenerari debere a sensu, quatenus huic obvia sunt, quæ ille concipere debet; ut, dum sensus suo munere fungitur, intellectus sua veluti sponte fungatur itidem suo, atque ad cooperandum leniter trahatur; quatenus fieri nequit, ut operationes intellectus cessent, dum sensus facit quod suum est, & attentione in hunc conversa, illarum ne quidem conscius esse videaris, operationibus intellectus cum sensuum actionibus perceptione confusa in unum confusis. Eo ipso obtinetur, ut ad rectum intellectus seu facultatis cognoscendi superioris usum adducaris; dum sensu tantummodo, concurrentibus ceteris sua veluti sponte facultatibus cognoscendi inferioribus, imagina-

tione scilicet atque memoria, tibi uni videris: id quod mirifice conducit tyronibus, ut usui intellectus recto absque ulla molestia adsuefiant. Tyrones enim non adsueti sunt nisi sensuum, imaginationis atque memoriae usui, quatenus is hæc indivulsas comites habet. Eum vero, qui requiritur, intellectus usum hætenus non fecerunt. Quamobrem molestum accidit, si a sensu ad operationes intellectus per saltum adducantur.

§. 8. Quamvis adeo levia ac puerilia videantur, quæ de definitionibus rite expendendis inculcavimus (§. 6), ut eadem penitus intelligantur & notiones adæquatæ ab omni obscuritate liberatæ animo insinuentur; principiorum tamen psychologicorum gnarus, quæ in Psychologia præsertim empirica explicavimus, ex indubia experientia derivata, profunditatem in obviis, non sine voluptate, deprehendet. Et ubi attentam mentem perlegerit, quæ de usu facultatum, in parte altera Philosophiæ practicæ universalis, ad recte vivendum requisito demonstravimus, fructum inde sperandum facile prævidebit: qui quod quantivis pretii sit, in dubium minime revocabit. Qui vero Logicam nostram perlustravit & inprimis sibi cognitum atque perspectum reddidit, quod de praxi ejus docetur; is abunde intelliget quam necessarius sit hic intellectus usus, de quo in præsentem nobis sermo est. Quodsi ergo in Philosophia veriori hospites contem-

contemnant, quæ nos maximi facimus, & ambages inutiles pronuncient, per quas incedere volumus animum ad Mathemata discenda appellentes; ii haud ægre ferant contradictionem, cum nos æquo animo, non indignabundo, feramus contemptum.

§. 9. Quamobrem non piget exemplo etiam geometrico docere, quomodo in perpendendis definitionibus sit procedendum. Sumamus v. gr. definitionem rhombi, quem definimus (§. 99 *Geom.*), quod sit figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Ut cum idea rhombi notio distincta animo insinuetur, nec quicquam in ea relinquatur obscuri; oculos convertamus necesse est in figuram LMNO. Numerentur latera LM, MN, NO & LO, quæ numero quatuor deprehenduntur; unde liquet figuram hanc esse quadrilateram (§. 97 *Geom.*). Circino capiatur intervallum LM, idemque successive transferatur ex M in N, ex N in O atque ex O in L; quo ipso patet, latera omnia esse inter se æqualia; atque hinc colligitur, figuram hanc esse æquilateram (§. 88 *Geom.*). Contemplemur jam angulos L, M, N & O, quos obliquos esse patet (§. 66 *Geom.*); unde infertur, figuram eandem esse obliquangulam (§. 97 *Geom.*). Sola attentio ad ea, quæ oculis usurpamus, omnem ex idea rhombi arcet obscuritatem, nec quicquam in notione distincta relinquit obscuri, quo minus penitus intelligatur. Quodsi de-

finitiones anteriores in quas definitio rhombi resolvitur, rite applices; iis suppositis familiaribus, notio evadit adequata.

§. 10. Non ignoro in figuris non requiri veritatem, sed sufficere ea sumi, quæ per definitionem inesse debent, ut definitio intelligatur: neque enim demonstrandum esse, quod, in nostro exemplo, figura LMNO sit rhombus; sed docendum potius, qualis esse debeat, ut rhombus dici possit, ubi non intenditur, nisi ut definitio intelligatur. Ita, in casu nostro, sufficit dicere, si figura esse debeat rhombus, requiri ut latera LM, MN, NO & LO, quibus terminatur, sint numero quatuor; ut sit $LM=MN=NO=LO$, seu ut latera hæc singula sint inter se æqualia; ut denique anguli L, M, N & O sint obliqui. Hoc pacto enim constat, quænam figuræ cuidam datæ inesse debeant, ut rhombi nomen eidem tribui possit: id quod sufficit ad definitionem intelligendam. Et ubi hæc noveris atque memoriæ mandaveris, verendum non est, ne rhombum appelles figuram tibi obviam, quæ hoc nomen non meretur: quofane sine definitio præmittitur. Immo patet, quænam de rhombo sumenda sint, aut sumere liceat, ubi alia de eodem demonstranda, quando ex definitione rhombi deducere volueris, quæ eidem conveniunt: quem alterum esse definitionum finem, non minus ex Logica, quam Geometrarum

rum & recta methodo philosophantium praxi constat. Ipsa etiam definitionum nominalium natura aliud non requirere videtur, quam ut intelligatur, quænam in ea sumantur de definito; cum nondum quæatur, utrum definitio sit possibilis, nec ne, seu utrum detur istiusmodi ens, cui ea insint, quæ in definitione sumuntur; sed de eo tantum quæstio sit, qualia requiramus, ut insint, siquidem id nominis convenire debeat, seu quidnam hoc nomine insignire velimus. Enimvero cum in Mathesi non proponantur definitiones, nisi quæ veræ sunt; ubi, sensuum ope, operationes intellectus elicere &, eorundem beneficio, eidem lucem affundere, atque ad rectam definitionum applicationem tyronem manuducere volueris, nil obstat, quo minus tacite supponas, quod deinceps demonstrandum, definitionibus inesse veritatem, hoc est, dari istiusmodi entia, quibus insunt, quæ in definitione nominali sumuntur. Absit itaque, ut tibi persuadeas, nos eorum, quæ in Logica docemus & in philosophando, non tantummodo in universa Mathesi, sancte observamus, oblitos tradere, quæ iisdem contraria sunt. Ecquis vero adeo vesanus erit, qui reprehendat, quod utilitatis insignis gratia, absque ullo præiudicio veritatis, tacite sumatur quod verum est, immo quod sumi necesse est, ubi in primo gradu cognitionis humanæ pedem sistere, nec

ulterius progredi volueris (§. 1).

§. 11. Etsi itaque præcepta verioris Logicæ, quæ nos tradidisse certissimum, inviolabilia existimemus, & methodi adeo simus tenaces, ut ab iis recedere nefas reputemus; tanta tamen religio minime obstat, quo minus in favorem ejus faciamus, quod eidem promovendæ conducit. Quamobrem, ut finem tam præclarum ex asse consequamur, quem integridimus (§. 7), & sensus omnes ferant suppetias intellectui, quæ ab eodem expectari possunt; id adhuc monendum esse duximus, in exemplis Arithmeticis non arbitrarium esse, quocunque modo numeri scribantur, quibus definitionem illustrare volueris, sed eos potius ita scribendos esse, ut sensui subjiciantur, quæ intellectus concipere tenetur, ut omnis arceatur obscuritas, & notio evadat tam adæquata, quantum per anteriores definitiones permittitur. Dedimus in superioribus exempla, quibus definitionem commensurabilium illustravimus (§. 6). Duo sunt commensurabilium casus. Aut enim numerus minor est pars aliquota majoris, aut uterque numerus partem aliquotam communem habet (§. 31 *Arithm.*). Exemplum casus primi præbent numeri 3 & 12, quorum prior quater sumtus posteriori sit æqualis. Representandus igitur est ternarius tanquam pars duodenarii, definitioni partis convenienter (§. 9 *Arithm.*); & tanquam pars aliquota ejusdem, defi-

definitioni partis aliquotæ conformiter (§. 30 *Arithm.*). Quamobrem non sufficit, duodenarium, sive 12, resolvere in 3, 3, & 3, sed ipsis etiam oculis quasi spectandum exhiberi debet, quod ternarius sit pars duodenarii, & hic consideretur tanquam pars aliquota ejusdem, quatenus ea oculis usurpare licet, quæ definitiones partis, atque partis aliquotæ, tamquam notas continent. Exhibetur autem 3 tanquam pars ternarii, si scribatur $3 + 3 + 3 + 3 = 12$: etenim signum + ostendit quatuor istos ternarios simul sumtos constituere duodenarium, seu numerum, qui idem est cum duodenario. Unde unus intelligitur pars duodenarii (§. 9 *Arithm.*). Et dum apparet, eundem numerum 3 aliquoties, nimirum quater repetitum, numerum 12 adæquare; illum hujus partem aliquotam esse perspicitur (§. 30 *Arith.*). Nimirum, hoc modo, ipsis oculis exhibetur, quod plura, scilicet 3, 3, 3 & 3 sint idem cum uno, scilicet 12, & pars una 3 aliquoties, scilicet hic quater sumta, adæquet totum; quemadmodum volunt definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ. Sola igitur hac scriptione in conspectum adducuntur, quæ in oculos per se minime incurunt, & definitiones partis, atque totius, & partis aliquotæ, instar rei visibilis exhibentur. Dum vero ternarius, sive 3, etiam solitarie scribitur, juxta duodenarium in partes

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

suas aliquotas resolutum, quemadmodum hic factum esse apparet,

$$3 \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$
 tum ipsis oculis exhibentur 3 & 12 tanquam duo numeri, qui ad se invicem referuntur, & primus 3 repræsentatur tanquam pars aliquota alterius 12; ut nihil insit in definitione commensurabilium, quoad casum primum, quod non pateat conspectui. Immo, hac ipsa scriptione, non minus manifestum est, quomodo, dato quocunque numero, prodeat alius ipsi commensurabilis; nimirum, si numerus quidam, semel positus, deinceps ponatur aliquoties, quoties nempe visum fuerit, & iterato positi sumantur simul tanquam unum: id quod clarius perspicitur, si duo vel tria exempla sibi invicem subscribantur, quemadmodum hic factum vides.

$$\begin{array}{l}
 3 \quad 3 + 3 = 6 \\
 3 \quad 3 + 3 + 3 = 9 \\
 3 \quad 3 + 3 + 3 + 3 = 12 \\
 \text{\&c.} \quad \text{\&c. in infinitum.}
 \end{array}$$

Ad illustrandum casum alterum, qui in definitione commensurabilium continetur, adduximus exemplum numerorum 6 & 8, qui partem aliquotam communem 2 habent. Quod si ergo singula ut ante repræsentare volueris, numeri ita scribendi sunt

$$\begin{array}{l}
 2 + 2 + 2 = 6 \quad 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \\
 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 \quad 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14 \\
 \text{\&c.} \quad \text{\&c.} \\
 \text{in infinitum} \quad \text{in infinitum.}
 \end{array}$$

Ita nimirum etiam conspiciatur, quomo-

do numeri commensurabiles in altero casu procreentur, nimirum, si idem quicumque numerus, veluti hic 2, ponitur toties, quoties libuerit, veluti hic ter, quinquies &c. & deinceps adhuc pluries, veluti hic quater, septies &c. ac iterato positi sumantur simul tanquam unum. Hoc pacto, definitio commensurabilium nominalis reducitur ad geneticam, adeoque realem: id quod multiplicem habet usum. Quodsi numeris subjiciantur lineæ in tot partes æquales divisæ, quoties idem numerus repetitur ad constituendum numerum eundem; in continuo jam magis claret, quamnam sit vis signi +, quo indigitatur plura coalescere in unum, ut unum sit idem cum multis, quemadmodum vult definitio partium, atque totius. (§. 9 *Arit.*)

§. 12. Quoniam in definitionibus partis, atque totius, relativis, quarum una absque altera intelligi nequit, diversa utique sunt pluralitas eorum quæ ad totum constituendum concurrunt, plurium concretio qua fit unum seu totum constituitur, & inde resultans identitas plurium cum uno; adeoque ubi definitionem penitus intelligere volueris, notionem distinctam formaturus, opus habes totidem actibus intellectus, quibus pars & totum concipitur, quot definitioni diversa insunt, tanquam totidem notæ. Siquidem sensus suppetias ferre debet intellectui; singulis intellectus operationibus respondere de-

bent singuli actus externi; qui insensus incurrunt & illas individuas comites habent: id quod in dato casu obtinetur, si numeri, quibus simul sumtis efficitur totum, primum scribantur juxta se invicem absque ullo signo interposito, deinde autem signum + interponatur, tandemque iisdem, hoc signo inter se connexis, adjiciatur signum æqualitatis =, cum nota numerica, qua indigitatur numerus ex iisdem coalescens, veluti in exemplo primo 12, qui ex 3, 3, 3 & 3 in unum coalescentibus resultat. Hac enim successiva scriptione, eo, quem diximus, ordine facta; actu scriptionis primo determinatur intellectus ad concipiendam pluralitatem ad totum constituendum concurrentium; actu secundo exhibetur concretio in unum, quam cogitare tenemur; & tertio denique repræsentatur plurium cum uno identitas, in quam aciem mentis intendi necesse est. Hoc pacto efficitur, ut nihil sit in intellectu, quod non etiam sit in sensu, & sensus intellectum blanditrahit ad cooperandum, dum operationes intellectus per actus in sensum incurrentes determinantur, adeoque, cum actibus sensus, una ponuntur; modo animo præsensis, attentione allata ad singula, quæ fiunt. Quodsi ergo in illustrandis definitionibus eam, quam monstramus, viam ingredi volueris; sensus suppetias omnes ferent intellectui, quas ab eo expectare licet.

§. 13. Simile quid obtinet in exemplis geometricis; si singulas determinationes, quæ definitionem ingrediuntur, ita scribere volueris, ut ad figuram oculis subjectam referantur signa, quibus repræsentatur. Dedimus in superioribus exemplum rhombi, qui per definitionem est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Quamobrem si scribas, quemadmodum hic factum esse vides,

Tab. I.
Fig. 3.

$$LM + MN + NO + LO = 4$$

$$LM = MN = NO = LO$$

$\left. \begin{array}{c} L \\ M \\ N \\ O \end{array} \right\}$ angulus obliquus

LMNO rhombus; ipsi sensui obvium est, quomodo ex determinationibus definitionem ingredientibus, seu notis in eadem contentis, colligatur figuram datam esse rhombum. Etenim $LM + MN + NO + LO = 4$ indigitat, figuram datam LMNO quatuor habere latera; adeoque æquilateram esse: $LM = MN = NO = LO$ significat, latera omnia esse inter se æqualia; consequenter figuram datam LMNO esse æquilateram: denique

$\left. \begin{array}{c} L \\ M \\ N \\ O \end{array} \right\}$ angulus obliquus,

indigitat singulos figuræ datæ LMNO angulos esse obliquos; consequenter figuram ipsam obliquangulam. Linea

his subducta signum est quo indigitatur, id quod eidem subscribitur, inde inferri, seu per supra scripta determinari; nimirum quod figura oculis subjecta LMNO sit rhombus. Evidens adeo est, ad quamam successive promovenda sit attentio, ubi rhombum agnoscere, atque ab aliis figuris distinguere volueris. Hoc pacto sensus distinguit, quæ intellectus distinguere tenetur, dum distincte rhombum concipit.

§. 14. Repræsentatio definitionum symbolica, qua oculis conspicienda exhibentur, quæ ab intellectu concipiuntur, eo quidem ordine, quo operationes intellectus eliciuntur, convenit regulis Artis characteristicæ; cujus theoria, hætenus desiderata, partem quandam Artis inveniendi absolvit, propterea quod in inveniendo usum multiplicem habet, quemadmodum suo tempore ostendemus, ubi, philosophia ad umbilicum perducta, Artem inveniendi ad eam formam redigemus, qua Logicam exhibuimus. Major enim est Artis characteristicæ usus, quam vulgo creditur; ut adeo consultum sit, quasi aliud agendo mature eidem adsuescere. Non loquimur nisi experta, & quæ ex ipsa animæ humanæ natura a priori demonstrare valemus; etsi a præsentī loco alienum sit ipsas demonstrationes afferri, ex principiis nostris psychologicis haud difficulter contexendas, sed Arti inveniendi reservandas.

§. 15. Unicum est, quod hic monuisse sufficiat, silentio minime prætereundum; scilicet, quod ista definitionum symbolica repræsentatio mirifice conducat ad facilitandam repetitionem, qua eadem memoriæ, absque ulla molestia & mora, insunt, & memoria retinentur. Distincte nimirum oculis exhibentur, quæ intellectus distinguere tenetur in definito sibi repræsentando, & eo ordine, quo actus intellectus sese invicem excipere debent. Cognitio non modo symbolica ad intuitivam reducitur, sed ipsa etiam symbolica intuitivæ assimilatur. Nemo autem est qui nesciat, sensu percepta facilius & tenacius memoria retineri, quam quæ sola vi intellectus concipiuntur. Et convenit omnino omnem facere facultatum usum, qui natura nobis concessus est; ac mature adfuesieri juvat, ut eundem ubivis constanter faciamus. Quamobrem & nos per studium mathematicum plura intendimus, quam ut Mathesis sibi sola discatur; quemadmodum faciunt illi, qui contenti sunt ea, quæ docentur in Mathesi, cognita atque perspecta sibi habere.

§. 16. Erit forsan acutior, qui reprehendet, quod, in illustrandis definitionibus, in methodi leges injurissimus, quod in illustrandis definitionibus anterioribus præsupponamus, quæ demum per sequentes patent. Objiciet v. gr. nos, in symbolica partis aliquotæ repræsentatione (veluti

quod $3+3+3+3=12$), supponere, quod perspectæ sint notæ numericæ, quod notum sit signum additionis, quod ipsam additionis notionem habeamus, cum tamen definitio partis aliquotæ præcedat (§. 30 *Arithm.*), definitio additionis demum sequatur (§. 61 *Arithm.*) & notæ numericæ in sequentibus demum (§. 49 *Arithm.*), cum signo additionis (§. 63 *Arithm.*) explicentur. Immo forsan arguet ipsam additionem præsupponi, quæ demum docetur multo post (§. 96 *Arithm.*). Enimvero quicquid est hujus difficultatis, id protinus omne evanescit, modo attentionem nostram desiderari non patiamur. Etenim nemo ad studium Matheseos, præsertim ad legenda Arithmeticæ nostræ Elementa Latina, accedit adeo rudis, ut notæ numericæ nondum ipsi sint perspectæ, & numerare nesciat. Neque lex numerandi & notæ numericæ explicantur eo fine, ut numerare discamus & notas numericas cognoscamus; sed ut appareat, cur ea numerandi lex sanciat, & cur notis istis utamur, tum etiam quia hypothesebus istis opus habemus, tanquam principiis ad demonstrandum ea, quæ sequuntur. Signum additionis quodnam sit, anticipando doceri potest, ubi ejus usus requiritur. Neque hic opus est, ut notio additionis una explicetur: sufficit enim moneri, hoc signo indigitari, numeros simul sumi debere, ut constitutur per eos unus. Multo minus

nus autem præsupponenda est additio, cum nemo numerandi peritus nesciat, quomodo numeros exiguos, sive digitos in unitates, siquidem opus est, resolutos connumerare debeat. Accedit, quod nemo facile ad Matheseos studium, præsertim ad Elementa nostra Latina legenda sese conferat, qui Algorithmum numerorum integrorum, saltem additionem & subtractionem, non didicerit. Abunde igitur patet, non præsupponi quæ nondum cognita sunt, sed ex inferius traditis demum haurienda, in definitionibus illustrandis.

§. 17. Propositiones, sive theorematum fuerint, sive problemata, primum exponuntur, dum in Arithmetica ad numeros, in Geometria ad figuras delineatas applicantur: id quod *ἐκθεσις*, sive expositionem, appellarunt veteres, quam propositionibus subjecerunt. Sit ex. gr. Theorema 21 Arithmeticæ (§. 181) exponendum, quod ita sese habet. *Si quantitates quascunque per eandem tertiam divides; quoti sunt inter se ut quantitates, quæ dividuntur.* Theorematis hujus expositio hæc est: Sint duo numeri 24 & 12, qui dividuntur per eundem tertium 3; erunt quoti 8, & 4. Dico esse 8 ad 4, ut 24 ad 12. Continet enim 8 bis 4, & 24 itidem bis 12, adeoque numeri proportionales sunt (§. 155 *Arithm.*). Similiter sit pars prima theorematis 37, in Geometria (§. 233) exponenda, quæ ita se habet:

Si duas lineas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni æquales. Expositio talis est: Sint AB & CD duæ lineæ rectæ, sitque AB parallela ipsi CD; erunt anguli y & u alterni (§. 68 *Geom.*). Dico angulum y esse æqualem angulo u . Eodem modo exponuntur problemata. Sit ex gr. problema 20 Geometriæ (§. 258) cujus hic est tenor: *Per datum punctum parallelam rectæ data ducere.* Expositio hæc erit: Sit data linea recta RS; sitque datum punctum V ubicunque extra eandem lineam. Ducenda est recta quædam alia, quæ transit per punctum V, sitque rectæ alteri RS parallela. Tab. I. Fig. 4.

§. 18. Nos, brevitatis gratia, in Arithmetica theorematum ita enunciamus, ut expositionem una contineant; dum quantitates designavimus literis majoribus, tanquam numeros indeterminatos (§. 13 *Arith.*), in quorum locum facile surrogantur numeri determinati notis numericis expressi, quales etiam hinc inde exhibemus ad latus demonstrationis. Ita theorema 21, de quo modo diximus (§. 17), hoc modo proponitur (§. 181 *Arith.*). *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C divides; quoti F & G sunt inter se ut A & B.* Constat ex paragrapho præcedente theorema hoc pure sic enunciari: *Si duas quantitates quascunque per eandem tertiam divides, quoti per divisionem prodeuntes erunt inter se, ut quantitates, quæ dividuntur.* Atque adeo liquet, literas majores

A, B, C, F, G nonnisi expositionis gratia esse adjectas, quæ ita sese habet: *Sint duæ quantitates quæcunque, A & B; dividatur quantitas A per quantitatem C, & prodeat quotus F. Dividatur etiam quantitas B per eandem quantitatem C, & prodeat quotus G. Dico esse quotum F ad quotum G, ut quantitatem A ad quantitatem B.* Quodsi jam pro literis substituantur numeri; nimirum 24 pro A, 12 pro B, 3 pro C, 8 pro F, & denique 4 pro G; habebis expositionem in numeris, quam ante dedimus (§. 17).

§. 19. Similiter in Geometria propositiones retulimus ad figuras æri incisas, ut expositionem una contineant. Ita theorematis 37 pars prima, quam exempli loco adduximus (§. 17), hoc modo proponitur in Geometria (§. 233). *Si duas parallelas AB & CD secet transversa EF, in G & H, erunt anguli alterni y & u æquales.* Quodsi literas omitas, habebis theoremata pure enunciata. Ubi vero oculos in figuram iisdem subjectam convertens, idem ad eandem applies, adhibitis literis, quibus lineæ & anguli in schemate designantur, quemadmodum paulo ante factum est (§. 17); habebis expositionem. Similiter problema 20 (§. 258 *Geom.*) ita enunciat: *Per datum punctum V parallelam rectam RS ducere.* Omissis literis V & RS prodit propositio pure enunciata; quæ ad schema applicata, ut ante fecimus (§. 17), dat expositionem.

Tab. I.
Fig. 1.

§. 20. Veteres Geometræ propositionem ab expositione, tanquam duo diversa, a se invicem distinxerunt; atque adeo illam pure enunciarunt, hanc eidem subjecerunt. Hunc morem secutus est CLAVIUS in Elementis EUCLIDIS. Nos expositionem cum propositione conjunximus, non tam quod in unum confundi velimus, quæ diversa sunt; quam ut, brevitatis gratia, quemadmodum jam monuimus (§. 18, 19), una exhiberemus, quæ a lectore separanda sunt; ne in nimiam molem excresceret opus, ac præter necessitatem evaderet sumtuosius.

§. 21. Necesse autem est propositionem pure enunciari, remotis iis, quæ ad expositionem spectant; cum pure enunciata in usum futurum memoriæ sit mandanda; expositio autem adhibenda, ut claritas affundatur notioni complexæ, quæ propositioni respondet, sine qua intelligi nequit, aut saltem non satis intelligitur; quemadmodum nil videmus absque lumine, aut absque lumine sufficiente non satis clare videmus visibile. Non tamen opus est expositionem una memoriæ mandari, cum in applicatione, ratiocinando facta, ejus nullam habeamus rationem; sed sufficiat propositioni per expositionem satis intellectæ adhærere, per naturam animæ, sensum claritatis, quatenus fieri potest, ut expositionem addamus, quando exigitur, vel e re esse videtur; qua actu affunditur claritas, cujus, dum nunc obscu-

obscurè percipitur, antea clare perceptæ memoriâ habemus.

§. 22. Resolutiones problematum arithmeticæ ad exempla, geometricæ ad figurarum constructiones statim sunt transferendæ. Singula, quæ fieri præcipiuntur, suis numeris distinximus. Numerantur autem eo ordine singula, quo fieri debent. Quamobrem, cum quælibet resolutio tot contineat regulas, quot sunt numeri; lecta prima statim faciendum, quod eadem præcipitur, & progressus ordine fieri debet ad sequentes. Ita nimirum absque ullo negotio facies, quod fuerat faciendum; & dum hoc facis, regulis affundetur claritas, quæ ad totam resolutionem intelligendam sufficit. Quoniam vero in resolutionibus problematum sequentium præcipiuntur, quæ quomodo fieri debeant, docetur in anterioribus; igitur necesse est, ut eo ordine problematum resolutiones tibi familiares reddas, quo numerantur; ne facturus ea, quæ præcipiuntur, incidas in talia, quæ quomodo fieri debeant nondum nosti, nec unquam antea fecisti. Non est, quod excipias, citari in resolutionibus ea, quæ ex anterioribus præsupponuntur; veluti in resolutione problematis, de linea alteri parallela per datum punctum ducenda prima, quod paulo ante exempli loco adduximus (§. 19.), problema 17 (§. 216 *Geom.*), de linea perpendiculari ex dato puncto in eam demittenda, & problema 16 (§. 212 *Geom.*)

de linea perpendiculari ex dato in linea data puncto ad eandem erigenda: ita enim labor multiplicatus difficilis redditur, & molestiam parit; quæ, sublata difficultate, prorsus nulla est, ubi jam noveris, quomodo ex puncto dato ad lineam datam perpendicularis sit demittenda, & ex puncto in eadem dato perpendicularis excitanda, ac utrumque facere valeas.

§. 23. Quoniam vero non sufficit problematum resolutiones intelligere, verum etiam habitus comparandus est ea faciendi, quæ fieri debent; habitus autem omnis, nonnisi exercitio, adeoque idem iterato agendo, comparatur; a problemate uno non progrediendum ad alterum, nisi ubi ea, quæ in resolutione præcipiuntur, prompte facere potueris. Hoc enim pacto, nullam senties in difficilioribus difficultatem; nec verendum est, ne molestia fastidium creet; nec progressus destituetur voluptate individua comite, quæ ardorem continuo progrediendi ulterius accendit, alit, & auget. Merentur ea, quæ hic dicuntur, attentionem; hoc enim modo acquiruntur singulares animi doctes, ad præclara nitenti mirifice profuturæ. Sed de his dicemus nonnulla in sequentibus.

§. 24. Enimvero, si quis omnem usum Matheseos facere velit, quem potest, eumque magis præclarum, quam qui in cognitione veritatum mathematicarum consistit; in iis persistere non debet, quæ hæc-

AUS

nus docuimus. Superfunt alia adhuc observanda, de quibus ut dicamus, instituti nostri ratio postulat. Nimirum primum, in symbolica representatione theorematis, sicuti in representatione definitionum (§. 11), non perinde est, quocunque modo id fiat; sed id omnino agendum est, ut sensui tanquam diversa exhibeantur, quæ intellectus a se invicem distinguere tenetur, & ut singula ipsa scriptione a se invicem distinguantur, quæ in notione propositioni respondente distinguenda veniunt. Omne theorema in duas resolvitur partes, hypothesein atque thesin; quarum ista exhibentur, quæ de subjectione sumuntur, hac vero exhibetur prædicatum quod, vi illorum quæ sumuntur, de eodem enunciandum, seu, propter ea quæ sumuntur, ponendum. In symbolica igitur representatione theorematis, hypothesis scribenda est a sinistra, thesis vero a dextra. Quodsi hypothesis plura continet; singula quæ sumuntur, sigillatim scribi, & eo, quo sequuntur, ordine sibi invicem subscribi debent; ita ut ipsa scriptione exprimentur eorum ad se invicem relationes, quæ supponuntur. Et idem observandum est in thesi, siquidem plura continet. Exemplis manifestum reddetur, quod obscurius dictum videri poterat, deficiente idea, a qua claritatem suam haurit notio. Sit exempli loco theorema, ad quod ante provocavimus (§. 18). *Si due*

quantitates quæcunque per eandem tertiam dividas; quoti sunt inter se ut quantitates divise. Hypothesis theorematis est, quod duæ dentur quantitates; quod eadem dividantur per eandem tertiam; quo facto prodeunt duo quoti: thesis vero, quod hi ipsi quoti eam inter se habeant rationem, quam habent quantitates divise. Quodsi (quemadmodum supra fecimus) quantitates dividendæ exponantur per A & B, dividendens per C, quoti vero per F & G, theorema ita representabitur.

*Hypothesis**Thesis*

A & B quantitates
dividendæ

F: G = A: B.

C dividendens communis.

F & G quoti ex divisione
prodeuntes

Idem observandum est in numeris, per quos theorema exponitur.

24 & 12 Numeri 8:4 = 24:12
dividendi

3 Divisor commun.

8 & 4 Quoti ex divis.
prodeuntes.

Immo, si ab expressione generali obscuritatem arcere volueris, quæ per naturam suam eidem inhæret, non tollendam nisi claritate, quam affundunt singularia; numeros literis, quibus quantitates, numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), designantur, subscribi oportet, eo, quo hic factum esse vides, modo.

A &

A & B Quantitat. F:G=A:B
24 12 dividendæ. 8:4=24:12

C Dividens
3 communis.

F & G Quoti ex
8 4 divis. prod.

Quodsi meris signis repræsentatio symbolica theorematis constare debeat; hoc modo quod intendis assequeris.

A (F 24 (8 F:G=A:B
C 3
B (G 12 (4 8:4=24:12
C 3

Idem fiet hoc modo :

$\frac{A}{c} = F, \frac{24}{3} = 8$ F:G=A:B
 $\frac{B}{c} = G, \frac{12}{3} = 4$ 8:4=24:12

§. 25. Demus etiam exemplum unum alterumve geometricum. Theorema 37 (§. 233 Geom.) hoc est : Si duas parallelas secet transversa , qui prodeunt 1°. anguli alterni æquales sunt, 2°. angulus externus æquatur interno opposito 3°. duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis. Hypothesis hæc est, quod duæ lineæ sint parallelæ, & quod eadem secentur linea alia transversa : Thesis autem, quod anguli alterni sint æquales; quod angulus oppositus externus æquetur interno opposito; quod denique duo oppositi interni sint æquales duobus rectis. Illa adeo duas habet partes, quæ junctim sumtæ eandem constituunt; hæc autem tria membra, quæ

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

singula ex eadem hypothese sequuntur; ita ut propositio sit composita ex tribus, eandem hypothesin habentibus, & ad tres hæc categoricas revocetur: 1°. Anguli alterni intra lineas parallelas sunt æquales; 2°. Angulus externus, ex lineis parallelis per transversam sectis ortus, æqualis est opposito interno; 3°. Duo anguli intra lineas parallelas transversa sectas orti sunt æquales duobus rectis. Quodsi hoc theorema eo, quem supra diximus (§. 19), modo explices; symbolice distincte ita repræsentatur:

Hypothesis.	Thesis.
AB parall. CD	1. $y = u$
EF secat AB & CD	2. $x = u$
in G & H	3. $o + u = 2 R.$

Tab. I.
Fig. 4.

Theorema 18 (§. 179) pure ita enunciat: Si in duobus triangulis fuerit angulus unus unius æqualis angulo uni alterius, & duo latera comprehendentia angulum in uno triangulo fuerint sigillatim æqualia duobus lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, & duo ad idem anguli reliqui in uno erunt sigillatim æquales duobus ad idem angulis reliquis in altero triangulo, & tota triangula æqualia & similia erunt.

Tab. I.
Fig. 6.

Hypothesis hæc est, accedente expositione, quod in duobus triangulis A C B & a c b, angulus unus unius A sit æqualis angulo uni alterius a, quod duo latera A C & A B comprehendentia angulum A in uno triangulo, sint

T

sigil-

figillatim æqualia duobus lateribus ac & ab comprehendentibus angulum a in altero triangulo: thesis vero, quod 1^o. latus tertium BC unius sit æquale lateri tertio bc alterius, 2^o. quod angulus C in uno sit æqualis angulo c in altero, 3^o. quod angulus B in uno sit æqualis angulo b in altero, 4^o. quod triangulum ACB sit æquale & simile triangulo acb . Propositio adeo denuo composita est, in qua eidem subjecto sub eadem conditione tribuitur multiplex prædicatum. Quodsi theorema hoc symbolice repræsentare volueris, ita distincte exhibetur scriptum:

<i>Hypothesis</i>	<i>Thesis.</i>
ang. $A = a$	1. $BC = bc$
$AB = ab$	2. ang. $A = a$
$AC = ac$	3. $B = b$
	4. $\triangle ACB = \triangle acb$

Hoc nimirum pacto distincte exhibentur singula, quæ in hypothese sumuntur, ut sensus præsto sit in formanda notione distincta intellectui, quæ eidem responderet, nec minus distincte in sensum incurrunt singula, quæ istis positis una ponuntur: id quod egregium habet usum, siue in primo gradu cognitionis subsistere, siue ad secundum progredi volueris, quemadmodum ex deinceps dicendis plenius constabit. Quodsi Ars characteristica foret satis exulta; ab omnibus vocabulis in symbolica representatione theorematum abstinere poteramus. Quoniam tamen signorum

numerus multiplicaretur, quorum usus tyronibus molestior; consultius est ut paucis simus contenti, & subinde vocabulis nonnullis abbreviata scriptione locum concedamus.

§. 26. In problematis quædam ^{Tab. I.} dantur; quædam fieri, vel inveniri ^{Fig. 5.} jubentur. Ita in problemate 20 (§. 258 *Geom.*), ad quod supra provocavimus (§. 19), datur recta RS , & punctum extra eam V ; jubemur autem per punctum V ducere lineam rectam, quæ sit ipsi RS parallela. Quodsi ergo problema distincte concipere volueris; quæ dantur, ab eo quod quæritur, hoc est, quod vel fieri, vel inveniri jubetur, distinguenda, consequenter ubi problema sensui distincte repræsentare volueris, versus sinistram scribenda sunt data, eo modo quo singulæ determinationes in hypothese theorematibus exprimiuntur; versus dextram vero quæsitum, quemadmodum hic factum esse apparet:

<i>Data</i>	<i>Quæsitum</i>
Recta AB ,	Recta transiens
punctum V extra	per V
eam	&
	paral. ipsi AB .

Ita nimirum non modo quæsitum a datis separatur; verum etiam data singula distincte exhibentur, non minus quam singulæ determinationes quæsitæ; consequenter si hæc figuræ subseribantur, idea singula a se invicem separata exhibet, quæ in notione problemati respondente totidem operationibus

tionibus intellectus discernenda sunt, ut notio evadat distincta.

§. 27. Simile quid imitari licet in ipsa resolutione: id. quod in primis usui est, ubi ad gradum secundum cognitionis progredi, nec in primo acquiescere volueris. Exempli loco sit resolutio prima problematis 20 Geometriæ, cum quo nobis jam negotium est (§. 26). Ea nimirum ita representatur:

VK perpendicularis ad RS.
T punctum pro arbitrio assumptum.
TA perpendicularis ad RS.
TA = VK
MN per V & A transiens.

MN parallela RS.

Notandum vero, in denominandis rectis, præponi literam quæ designat terminum a quo, unde ducenda est recta, quam ducere jubet resolutio; & singula fieri debere eo ordine, quo sibi invicem subscribuntur. Ita VK indigitat, perpendicularem VK ad RS duci ex puncto V, consequenter ad rectam RS ex puncto V demitti; TA vero indicat, perpendicularem TA ad RS ducendam esse ex puncto T, tanquam termino a quo: TA=VK significat, perpendicularem TA æqualem fieri debere antea ductæ VK: Denique MN per VA indicat, rectam MN ducendam esse per puncta V & A, quibus datis determinatur situs rectæ MN per superius in Geometria ostensa. Linea recta separat

ea, quæ fieri præcipiuntur, ab iis determinationibus, quas quæsitum habere debet, & quæ infra lineam exhibentur; scilicet quod hic linea MN sit datæ RS parallela. Quod enim transeat per punctum V, per se manifestum est, aut si mavis per ea, quæ vi resolutionis facta sunt, attenta mente considerata. Ubi nimirum ad secundum cognitionis gradum progredi libuerit, ea, quæ ex resolutione problematis per se manifesta sunt quoad quæsitum, probe distinguenda ab iis, quæ esse dicuntur.

§. 28. Non nego, si quis idem facere velit in aliis problematis, quod hic præstitimus in uno eorum, eoque haud difficili, ut facilius intelligeretur; eidem plura notanda esse, quam quæ hic docemus: sed instituti nostri ratio non fert, ut simus prolixiores. Sufficit generalem quandam ideam eorum, quæ facienda sunt, insinuas- se animo lectoris. Quod si enim hæc probe perpenderit, quæ hic inculcantur; plura suo Marte assequetur, quæ hinc inde præterea requiruntur. Et sic ubi subinde cespitat; in progressu, ipsemet errores a se admissos, & quæ melius fieri poterant, animadvertet. Quamobrem diutius hisce non immoramur.

§. 29. In resolutionibus numericis problematum, typus calculi ad figuram relatus exhibendus est, qui problema cum resolutione distincte representat, & idam operatri- cem animo insinuat, quæ firmior ei-

dem inhæret, quam resolutio memoriarum mandata, ita ut hæc non tam facile te fallat. Immo si hæc eidem nondum fuerit infixa; ubi ad librum recurrendum, quando resolutione ista in præxi opus habes, in typum solum exempli oculos convertere sufficit, quod vi idæ operatricis, quam repræsentat, totam operationem docet ac dirigit. Quoniam in ipsis Elementis nostris exempla hoc modo exhibuimus, non opus est, nisi ut unum lucis affundendæ gratia huc transcribamus. Sistimus adeo illud, quod ad illustrandum problema 13 Trigonometriæ planæ (§. 36 *Trigon.*) in medium adduximus. Problema hoc est: *Datis duobus angulis una cum latere uni eorum opposito invenire latus alteri oppositum.* Typus vero exempli problema cum resolutione repræsentans talis est:

Tab. I.
Fig. 6.

<i>Data</i>	<i>Quæsitum.</i>
$C = 48^{\circ} 35'$	BC
$A = 57^{\circ} 28'$	
$AB = 74'$	
<i>Calculus.</i>	
Log. Sin. C	9. 8750142
Log. AB	1. 8692317
Log. Sin. A	9. 9258681
<hr/>	
Log. AB + Log. sin. A	11. 7950998
Log. BC	1. 9200856
$= \text{Log. AB} + \text{Log. Sin. A} - \text{Log. Sin. C.}$	

Quodsi enim oculos in exemplum hoc modo repræsentatum convertas; statim liquet dari duos angulos A & C, una cum latere AB uni eorum C opposito; & quæri latus BC, quod opponitur alteri A. Typus calculi ostendit, ex tabulis excerpandos esse logarithmos sinus anguli C, lateris AB & sinus anguli A. Logarithmos lateris AB & sinus anguli A addendos, & a summa subtrahendum esse logarithmum sinus anguli C, ut relinquatur logarithmus lateris quæsitum BC, in Canone Logarithmorum evolvendus, ut pateat numerus lateri quæsitum respondens.

§. 30. Abunde hætenus docuimus, quomodo ad gradum primum cognitionis perveniat, ut nihil super sit in notionibus obscuri, sed omnia penitus intelligantur. Agendum itaque! progrediamur ad secundum, cui acquirendo inserviunt demonstrationes. Quoniam ad demonstrationem accedere non licet, nisi propositione rite intellecta; gradus secundus primum supponit; consequenter, quæ in antecedentibus præcepimus, ea ante fieri debent, quam ad demonstrationem distincte percipiendam animum appellas. Quamobrem, qui utrumque gradum una eademque opera acquirere studet; & ea observare tenetur, quæ de primo inculcavimus, & facere ea, quæ de secundo jam addemus.

§. 31. De-

§. 31. Demonstrationes ex rationibus contextæ sunt eo modo inter se concatenatis, quem in Logica (§. 551 & seqq.) satis perspicue explicavimus, & mox uberius dicenda reddent manifestum. Ratiocinatio, tertia mentis seu intellectus operatio, involvit duas priores, primam atque secundam, notionem scilicet atque iudicium, una cum usu facultatum inferiorum, sensus scilicet, imaginationis atque memoriæ, & iis animæ actibus, per quos fit transitus ab usu facultatum inferiorum ad usum superiorum, attentione nimirum atque reflexione: quæ denuo parumper attentis ad sequentia manifesta evadent, modo facultatum animæ notiones ex Psychologia habuerint perspectas. Quodsi ergo a primo cognitionis gradu ad secundum per saltum ascendere nolueris; demonstrationibus ante utendum est mechanicis, quam ad eas progrediaris, quæ vi intellectus concipiuntur, seu ejus operationibus absolvuntur.

§. 32. Quid sit demonstratio mechanica, in Lexico Mathematico docuimus. Nimirum, juxta hypothesin theorematis construuntur figuræ; quo facto, ea una determinantur, quæ in thesi continentur, seu vi illorum, quæ in hypothesi sumuntur de subiecto, eidem attribuuntur. Quamobrem, num ea, quæ una determinantur, talia sint, ope instrumentorum examinanda. Sit exempli loco theo-

rema 18 Geometriæ (§. 179 Geom.), ad quod supra provocavimus (§. 25), scilicet, *Si angulus unus trianguli unius sit æqualis angulo uni trianguli alterius, & latera comprehendentia angulum istum in uno triangulo sint sigillatim æqualia lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; quod etiam latus tertium unius trianguli sit æquale lateri tertio alterius, quod duo anguli reliqui unius sint sigillatim æquales duobus angulis alterius, quod tota triangula æqualia & denique similia sint.* Construe triangulum ABC, Tab. I. prout visum fuerit; deinde ducatur *Fig. 6.* recta *ab*, & ex *a* in *b* transferatur intervallum AB; in *a* excitetur angulus ipsi A æqualis; & in crus *ac* transferatur intervallum AC. Quodsi jam puncta *c* & *b* connectantur recta *bc*, prodit triangulum alterum *abc*. Jam ubi circino capis intervallum BC, & circini crus unum colloques in *b*, crus alterum attinget punctum *c*. Vides itaque latus trianguli *abc* tertium *bc* esse æquale lateri tertio BC alterius trianguli ABC. Ex punctis C, B, *c* & *b*, arbitraria circini apertura, sed eadem, describantur arcus, angulorum istorum mensuræ (§. 57 Geom.). Quodsi ope circini examines arcus ex centris C & *c*, itemque ex centris B & *b* descriptos; bini singuli deprehenduntur æquales (§. 289 Geom.), atque hinc angulorum C & *c*, itemque B & *b* æqualitas colligitur (§. 141 Geom.). Excindantur ex charta, in qua delineata

sunt, triangu^{la} ACB & acb ; & triangulum acb ponatur super altero ACB , ea quidem lege, ut punctum a in A , & recta ab super AB cadat; videbis triangulum acb coincidere cum triangulo ACB , seu illud huic congruere (§. 3 *Geom.*). Atque, ex congruentia, triangu^{la} ACB & acb aequalia esse intelliguntur (§. 161 *Geom.*), vi notionis etiam communis: communiter enim ex congruentia aequalitatem aestimant omnes. Immo quia non minus laterum bc & BC , itemque angulorum b & B , c & C congruentia oculis obvia est; vi notionis etiam communis, colligitur eorundem aequalitas, nempe quod fit $bc=BC$, $b=B$ & $c=C$; ita ut examinibus anterioribus ope circini factis non sit opus. Denique ubi ad animum revocas, esse $a=A$, $ab=AB$ & $ac=AC$ per hypothesin, aut $b=B$, $c=C$ & $bc=BC$ per examen, quod instituisti; cum praeter angulos & latera nihil reperias in triangulis istis, per quae a se invicem discerni possint; eadem quoque triangu^{la} acb & ACB similia deprehendis (§. 24 *Arithm.*). Similiter ubi theorema 37 (§. 233 *Geom.*) demonstrare volueris: *Si duas parallelas secet transversa, erunt anguli alterni aequales, angulus externus aequatur interno opposito & duo interni oppositi sunt aequales duobus rectis*; ducenda est 1°. linea CD ; deinde 2°. altera AB eidem parallela, ad quamcunque distantiam, cum ea non determi-

netur in hypothesi; & 3°. pro arbitrio recta EF , quae oblique secat parallelam utramque in G & H . 4°. Ex puncto intersectionis G ducatur arcus intra crura ipsius anguli γ , & eodem radio ex puncto intersectionis altero arcus intra crura anguli μ ; quo facto, ut ante, ex aequalitate mensurarum colligis aequalitatem angulorum. Quodli 5°. ex centro G eodem radio ducas arcum intra crura anguli x ; ex aequalitate mensurarum anguli x & μ colligis aequalitatem horum angulorum. Denique 6°. duc etiam ex centro G eodem adhuc radio anguli θ mensuram; videbisque mensuras angulorum θ & μ , quarum haec eadem deprehenditur cum mensura anguli x , semicirculum complere: unde colligis eos esse duobus rectis aequales.

§. 33. Absit autem, ut tibi persuadeas, demonstrationes hasce mechanicas in locum ceterarum surrogari posse, quas scientificas appellare libet in oppositione ad mechanicas. Etenim quod per mechanicas patet, nonnisi verum esse intelligitur de figura, quam descripsisti & praemanibus habes; adeoque theorematis veritas perspicitur nonnisi in casu singulari. Enimvero demonstratio, ex hypothesi theorematis ratiocinando, veritatem theorematis manifestat universaliter. Demonstratio tamen mechanica universalitatem loquitur, quatenus patet, ea, quae ex assumtis inferuntur in theorematis

tc,

Tab. I.
Fig. 8.

te, per constructionem semper talia determinari debere. Nolo tamen de his dicere disertius, propterea quod vix conveniunt illorum captui, quibus demonstrationes mechanicae satisfaciunt. Consultum etiam est, ut demonstrationes mechanicae ad formam scientificarum reducantur, quantum datur, ut ad hasce quasi manuducant. Sed talia relinquenda sunt circumspeditioni illorum, qui erudiendis aliis praeficiuntur. Ceterum exemplum praebet demonstratio theorematis geometrici mechanica de congruentia triangulorum, quam modo dedimus (§. 31), ubi ex congruentia laterum $b\ c$ & BC , angulorum b & B , itemque c & C , atque triangulorum $a\ c\ b$ & ACB colligitur eorundem aequalitas, quemadmodum in demonstratione scientifica.

§. 34. Demonstrationes mechanicae aequipollent exemplis numericis, quae veritatem theorematum & problematum in casu singulari perspicendam praebent. Atque adeo facile patet, quid fieri debeat, si simile quid circa theoremata arithmetica tentes. Quod vero etiam hic formae demonstrationis scientificae ratio haberi possit, manifestis speciminibus docuimus in Arithmetica de genesi numerorum quadratorum (§. 262 *Arithm.*), de genesi numerorum cubicorum (§. 277, 280 *Arithm.*), de numeris aequidifferentibus (§. 327, 329 *Arithm.*). Quoniam vero hisce speciminibus profundiora

insunt, quae ad tertium cognitionis gradum viam sternunt; de iis plura nobis dicenda sunt in sequentibus. Diximus istiusmodi demonstrationes in Arithmetica oculares; quia oculis conspicienda sistunt, quae in scientifica intellectus concipere debet. Et loquuntur universalitatem ex eadem ratione, quam modo dedimus de mechanicis theorematum geometricorum demonstrationibus (§. 32). Vix tamen ratio satis manifesta erit iis, qui, in Ontologia nondum versati, non capiunt quomodo, positis determinantibus, ponatur determinatum. Sane memini, Mathematicos primi ordinis haesitasse in talibus, quae principio isti superstruuntur. Nec mirum: ignoratis enim, vel saltem non distincte expensis principiis, a quibus principia pendent, horum veritas non perspicitur.

§. 35. Exempla, quibus veritas propositionis perspicitur in numeris, qualia sunt, quae in Arithmetica subinde adduximus, & quibus propositiones illustrari debere supra praecipimus (§. 17), si coacerventur, pluribus in medium allatis, parere inductionem, quam dicunt Logici (§. 478 *Logarith.*), nemo est qui nesciat. Quoniam figurae in charta delineatae non minus singularia repraesentant, quam notae numericae; quilibet concedere tenetur, si demonstratio mechanica in pluribus figuris instituatur, similiter prodire inductionem. In utroque igitur casu certitudo major non est, quam

quam quæ ab inductione expectari potest. Non est quod excipias, hoc pacto, etiam in demonstrationibus scientificis, a singulari ad universale argumentari, cum eadem ad figuras in charta delineatas referantur. Etenim quod demonstratur, non de figura in charta delineata demonstratur; sed ex assumtis, universaliter ratiocinando, colligitur quod erat demonstrandum: demonstratio autem refertur ad figuram in charta delineatam, ut notionibus affundatur claritas, ne in demonstratione intelligenda hæsitemus. Inde est, quod schematismorum in Geometria non requiratur veritas, quæ in usum demonstrationum delineantur: sufficit enim talia supponi, qualia in hypothesis sumuntur, neque enim ex iis, quæ figuræ delineatæ revera insunt, sed potius ex illis, quæ in hypothesis sumuntur & figuræ inesse supponuntur, procedit ratiocinatio.

§. 36. Demonstrationes istæ mechanicæ satisfaciunt iis, qui in primo cognitionis gradu acquiescunt. Faciunt enim ad perspiciendum veritatem in singulari. Eo autem contenti sunt, qui ulterius progredi nolunt; utpote nullum habentes sensum ejus convictionis, qui per demonstrationes genuinas, quas scientificas dicere libuit, demum producit. Non tamen nullius prorsus usus sunt ceteris. Quoniam enim veritatem in singulari perspiciendam præbent; ad nexum prædicati cum subjecto, seu ejus,

quod ex assumptis in hypothesis colligendum, cum iisdem, pervidendum conducunt; ut clarius intelligatur, quid demonstrari debeat, seu quomodo thesis ab hypothesis pendeat. Immo cum veritas, quamprimum perspicitur, delectet; voluptate quadam perfunditur animus tyronis, ubi videt, posita hypothesis, poni thesin, seu per assumpta determinari, quæ de subjecto prædicanda sunt. Hac voluptate non modo tollitur tædium, ex prævisa difficultate percipiendæ demonstrationis, sive vera, sive imaginaria oriundum; verum etiam ardor accenditur demonstrationis percipiendæ, & ad eam percipiendam animus redditur attentus. Novi equidem exercitioribus molestum accidere, ubi animum ante ad demonstrationem mechanicam advertere jubentur, quam ad scientificam accedant, & hac molestia effici impatientes, quod per inutiles ambages incedere debeant: id quod inprimis accidit iis, qui animum sciendi cupidum possident. Enimvero, quæ initio studii mathematici commendantur, ea in progressu præmittuntur, quando iisdem non amplius opus habemus. A syllabizatione incipimus, quando legere discimus: ab ea abstinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet syllabizationem, quod exercitiores eadem in legendo non habent opus? Quamobrem velim ut de iis, quæ hic inculcantur,

non

non feratur iudicium; nisi singulis rite expensis. Notandum quoque non omnia ingenia esse velocia; sed dari etiam tarda; & tarda effici studii utilissimi desertores, nisi molestiæ, quæ deterrentur, tempestive afferatur medela. Sunt vero subinde tarda ingenia optima, quando nimirum naturali quodam veritatis intime perspiciendæ impetu feruntur, ut alia taceamus.

§. 37. Demonstrationes continua ratiocinatione absolvuntur, & ex assumtis procedunt. Assumpta continentur in hypothesi, quæ singula demonstrationem ingredi debent. Ab his igitur exordiendum; redigendo in propositiones assumpta, & ex anterioribus sumendo principia, quæ vel in definitionum, vel axiomatum, & postulatorum, vel propositionum jam demonstratarum numero sunt, terminum communem cum istis habentia, qui ipse principium istud veluti sponte sua in memoriam revocat, ubi anteriora eidem firmiter infixâ tenueris. Quæ prodeunt conclusiones sumuntur deinceps eodem modo, quo ea, quæ hypothesis continebat; eodemque modo ratiocinando progrediendum, donec inferantur ea, quæ thesis sistit. Unde facile apparet, apprime opus esse, ut conclusiones per singula ratiocinia elicite probe notentur, & ad tollendam omnem molestiam oculis subijciantur: id quod ope symbolicae repræsentationis fieri posse dudum

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

docuimus, non minus in Ratione Prælectionum Sect. 1, c. 2, §. 38, 50, quam in Logica tam minori c. §. quam majori (*not. §. 551 & seqq.*). Consultum vero est, ut hic exemplo uno alteroque illustrentur, quæ modo diximus, cum amplissimum habeant usum, deinceps disertius exponendum. Hic tantum modo observamus, quod neglecta hac demonstrationum resolutione, & symbolica earundem repræsentatione, studium mathematicum reddatur difficile, & plurimis idem deferendi causa detur.

§. 38. Exemplum facillimum præbet theorema sextum Geometriæ (§. 156 *Geom.*), cujus hic est tenor: *Si recta quadam secet rectam aliam, anguli verticales ad punctum intersectionis æquales sunt.* Theorema symbolice ita repræsentatur:

Hypothesis.
CD recta data,
AB recta eam secans,
E punctum intersectionis, adeoque
 ϕ & x anguli verticales (§. 67 *Geom.*).

Thesis.
 $\phi = x$
Tab. I.
Fig. 9.

Patet itaque æqualitatem angulorum verticalium ϕ & x demonstrandam esse ex eo, quod oriuntur intersectione rectarum CD & AB ad punctum intersectionis E. Quodsi ergo omnia minutissime persequi volueris, convenienter definitionibus, quæ in Elementis nostris præmisimus, ut in tota demonstratione nihil

V

admit-

admittatur, quod confuse saltem percipitur, ratiocinatio ita instituenda. In hypothesin ad figuram oculis præsentem relatam, qualem exhibet symbolica ejus representatio eidem subjienda, non minus oculos conjiciens, quam animum advertens, vides CD esse rectam, quam in E secatur recta alia AB, adeoque angulos α & γ habere crus unum AE commune, & crus alterum CE anguli α in directum situm esse cruri alteri ED anguli γ ; adeoque definitio nominalis angulorum deinceps positum, quam ex reali, instar corollarii, deduximus (§. 63 *Geom.*), tibi suggerit hoc principium: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum duo crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Unde inferitur: Angulos α & γ esse deinceps positos. Quodsi primam hanc conclusionem sumas tanquam præmissam syllogismi, & tam subiectum, quam prædicatum perpendis, memoriam subit theorema Geometriæ quintum (§. 147 *Geom.*): Duo anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis; quod præbet majorem novi syllogismi. Ex his præmissis colligis conclusionem: Ergo anguli α & γ sunt æquales duobus rectis, quæ probe notanda in usum sequentem. Quodsi jam porro oculos in hypothesin ad figuram oculis præsentem conjicis, & animum ad eandem advertis; denuo vides, AB esse

rectam, quæ secatur alteram CD, adeoque angulos γ & α habere crus commune ED, & crura reliqua AE & EB in directum sita esse; atque hoc formas judicium intuitivum: Anguli γ & α habent crus commune & eorum crura reliqua in directum jacent. Ad hoc si animum attendis, memoria suggerit denuo definitionem nominalem angulorum deinceps positum, quam, corollarii instar, ex reali deduximus (§. 63 *Geom.*) & hoc supeditat principium, quod ad conclusionem modo elicitam, tanquam præmissam novi syllogismi assumptum, vicem alterius præmissæ tuetur: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum crura reliqua in directum jacent, sunt anguli deinceps positi. Ex his igitur præmissis inferis conclusionem: Anguli γ & α sunt anguli deinceps positi. Quodsi porro hanc conclusionem sumas præmissam syllogismi novi, animum ad eam advertenti succurrit theorema (§. 147 *Geom.*): Anguli deinceps positi sunt æquales duobus rectis. Ex his itaque præmissis inferis conclusionem: Ergo anguli γ & α sunt æquales duobus rectis. Quodsi jam in duas conclusiones, α & γ sunt æquales duobus rectis, α & γ sunt æquales duobus rectis, oculos conjicis, & super iisdem reflectis; attendenti manifestum est: angulos γ & α atque angulos α & γ esse duo æqualia eidem tertio, quod hic sunt duo recti. Quamobrem si judi-

judicium hoc quasi intuitivum sumas, instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit principium, quod antea didicisti (§. 87 *Arithm.*): Æqualia eidem tertio sunt æqualia inter se. Ex his adeo præmissis infer: Anguli o & y simul sumti sunt æquales angulis y & x simul sumtis. Enimvero thesis, ubi in eam oculos conjicis, attendenti loquitur demonstrandum esse, quod angulus o sit æqualis angulo x . Quamobrem vides angulum y utrinque esse auferendum, ut anguli o & x relinquantur: quod dum fieri supponitur, patet, quod idem ab æqualibus auferatur. Hoc igitur si sumis, succurrit denuo principium, quod in Arithmetica didicisti (§. 91 *Arithm.*): Si æqualia ab æqualibus auferas, vel idem ab æqualibus, quæ relinquantur æqualia sunt. Unde porro concludis: Anguli o & x , qui hic relinquantur, æquales sunt. Atque sic patet, demonstratum esse, quod demonstrandum fuisse thesis insinuat.

§. 39. Distinctissime adeo docuimus, quomodo concipienda sit demonstratio, ut omnem consequatur evidentiam, quam habere potest. Quodsi jam eandem symbolice repræsentare volueris, ut omnem quoque consequatur claritatem, quam habere potest, omnisque in ea concipienda tollatur difficultas; hoc modo ipsum fieri debet:

I.

AE crus commune ang. o & y .
CE in directum situm ipsi ED

o & y anguli deinceps positi

1. $o + y = 2 \text{ R.}$

II.

ED crus commune ang. y & x
AE in directum situm ipsi EB

y & x anguli deinceps positi

2. $y + x = 2 \text{ R.}$

III.

$o + y = 2 \text{ R. vi num. 1.}$

$y + x = 2 \text{ R. vi num. 2.}$

$y + o = y + x$

$o = x \quad Q. E. D.$

Notandum hic, lineam a se invicem separare, quæ sumuntur, & quod ex iis concluditur. Illa supra lineam collocantur, hoc infra eandem constituitur. Quod intra duas lineas deprehenditur, duplici modo considerari, nimirum 1º. tanquam conclusionem, quæ ex assumtis colligitur, & 2º. tanquam assumptum, unde ulterius infertur, quod infra lineam alteram scribitur. Vides autem porro, primo loco *num. 1.*, & *num. II.*; assumpta ex hypothesi peti, ac inde duplici ratiocinio elici conclusionem *num. 1.*, & alteram *num. 2.* Exhausta

fic hypothefi, *num. III* sumuntur conclusiones *num. 1 & 2* ex hypothefi elicite; ac inde inde porro duplici ratiocinio tandem elicetur, quod in thefi continetur, esse $\phi = x$, seu angulos verticales esse æquales. Representatio hæc demonstrationis symbolica tantummodo propositionem minorem, & conclusionem uniuscujusque syllogismi exhibet, qui demonstrationem ingreditur; adeoque syllogismos ad enthymemata reducit; omissis principiis, quæ unicuique syllogismo majorem præbent, ac facile suppleantur ex regulis logicis; immo sua veluti sponte memoriam subeunt, ubi ea familiaria experiris; vel per citationem in contextu positam reperiri possunt, ubi memoriæ nondum fuerint infixæ. Atque adeo abunde patet, nihil hic desiderari, quod ad demonstrationem distincte concipiendam requiritur, & non minus ad evidentiam quoad illationem demonstrationi conciliandam, quam ad claritatem omnem eidem affundendam, ne quicquam obscuri supersit, sed ut penitus intelligatur, desideratur.

§. 40. Demus adhuc exemplum aliud. Sit demonstrandum theorema 18 Geometriæ, de quo diximus superius (§. 25). *Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem, & latera eundem comprehendentia sigillatim æqualia; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, duo*

anguli reliqui erunt sigillatim æquales; & tota triangula æqualia atque similia. Quoniam ex hypothefi ratiocinatio nondum procedit, quemadmodum in casu anteriore (§. 38, 39); præterea in usum demonstrationis quædam adhuc alia sumuntur, quæ sumi posse patet. Ubi vero hoc fieri solet, tum quæ ulterius supponuntur, præparationem constituere dicuntur. Est itaque hoc in casu, ubi æqualitatem & similitudinem ex principio congruentiæ demonstraturi sumus, præparatio hæc (§. 3 *Geom.*). Triangulum unum ponatur super altero, ita ut vertex angulorum æqualium unius ponatur super vertice alterius, & crus illius unum cadat super crure uno alterius. Quæ in præparatione sumuntur, ea tanquam ad hypothefin spectantia considerantur, nullo inter hypothefin & præparationem, quoad usum assumtorum in demonstrando, facto discrimine. Dico quoad usum assumtorum in demonstrando: alias enim manifestum est discrimen inter ea, quæ in hypothefi, & ea, quæ in præparatione sumuntur. Etenim per ea sola, quæ in hypothefi sumuntur, determinantur ea, quæ subiecto tribuenda & de eodem adeo demonstranda veniunt: quæ vero in præparatione sumuntur, non alium habent usum, quam ut ex sumtis in hypothefi procedat ratiocinatio. Nimirum quæ in præparatione sumuntur, per ea, quæ sumuntur in hypothefi non determinantur; alias enim ratio-

ratiocinando ex iisdem colligi poterant, nec ulla foret ratio, cur sumerentur. Sumi autem possunt non invito principio contradictionis, quatenus hypothese non repugnant, sed cum iis, quæ in eadem continentur, una consistunt. Absoluta itaque præparatione demonstratio ordine naturali, qualem requirit usus facultatum animæ, ita procedit.

Tab. I.
Fig. 6.

§. 41. Vertex anguli a cadit in verticem anguli A , & crus illius $a b$ in crus alterius AB , per præparationem, estque angulus a æqualis ipsi A , per hypothese. Hæc ubi perpendis, succurrit theorema 12 (§. 166 *Geom.*). Si fuerint duo anguli æquales, & vertex unius ponatur super verticem alterius, ac præterea crus unum illius super crure uno hujus; etiam crus alterum illius super crus alterum hujus cadit. Unde infertur: 1°. crus $a c$ anguli a super crure AC anguli A cadit. Jam porro a cadit in A & $a b$ super AB , per præparationem, & $a b = AB$, per hypothese. Ad hæc animum advertenti succurrit: Si recta quadam alteri æqualis ita applicetur, ut terminus ejus unus cadat super terminum unum alterius, ac ipsa cadat in alteram; etiam alter ejus terminus in terminum alterum alterius cadit (§. 169 *Geom.*). Unde infertur 2°. rectæ $a b$ punctum b cadere in punctum B rectæ alterius AB . Similiter punctum a cadit in A , per præparationem, & $a c$ super AC per demonstrata *num.* 1, estque $a c$

$= AC$, per hypothese. Succurrit igitur denuo principium modo commemoratum, indeque infertur: 3°. punctum c cadere in C . Atque hæc sunt, quæ ex hypothese, accedente præparatione, ratiocinando colliguntur. Enimvero quoniam in hisce conclusionibus nondum continentur, quæ demonstranda loquitur thesis; hæc ex illis continuata ratiocinatione colligenda. Ad conclusiones modo elicitas perspicienti manifestum est, quod punctum c in C per demonstrata *num.* 3, & punctum b in B per demonstrata *num.* 2 cadere; unde formatur hoc judicium quasi intuitivum: Rectæ $b c$ & BC intra eosdem terminos continentur (§. 11 *Geom.*). Vi definitionis congruentiæ (§. 3 *Geom.*), memoria suggerit hoc principium. Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt. Hinc infertur conclusio: Recta $b c$ congruit rectæ BC . Hanc conclusionem si sumas instar præmissæ novi syllogismi; memoria suggerit hoc principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea sunt æqualia. Unde infertur: I. recta $b c$ æqualis est rectæ BC ; quod erat primum, eorum scilicet, quæ vi thesios demonstranda. Porro b cadit in B , per demonstrata *num.* 2, $b a$ in BA , per præparationem, & $b c$ in BC , per demonstrata *num.* 2 & *n.* 3, atque §. 170. *Geom.* Habemus adeo duos angulos b & B , quorum vertexes b & B .

V. 3.

atque

atque crura bc & BC , itemque ba & BA coincidunt. Enimvero si vertex & crura angulorum duorum coincidunt, anguli æquales sunt (§. 167 *Geom.*). Ergo II, angulus b æqualis est ipsi B ; quod erat secundum, eorum scilicet, quæ vi theseos demonstranda. Similiter punctum c in C cadit per demonstrata *num.* 3, & ca in CA per demonstrata *num.* 1, item cb in CB per demonstrata *num.* 2 & *num.* 3, atque §. 170 *Geom.* Habemus igitur denuo duos angulos c & C , quorum vertex & crura coincidunt. Denuo ad hoc animum advertenti succurrit principium: Si duorum angulorum vertex & crura coincidunt, anguli æquales sunt. Unde infertur conclusio III, anguli c & C æquales sunt; quod erat tertium. Denique a cadit in A , per præparationem, b in B , per demonstrata *num.* 2, & c in C per demonstrata *num.* 3, adeoque patet triangula acb & ACB intra eosdem terminos contineri (§. 11, 170 *Geom.*). Hoc ipsum perpendenti succurrit; Quæ intra eosdem terminos continentur, ea sibi mutuo congruunt (§. 3 *Geom.*). Unde colligitur: Triangula acb & ACB sibi mutuo congruunt. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, memoriam subit principium (§. 161 *Geom.*): Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt. Unde infertur IV, triangula acb & ACB æqualia & similia sunt; quod erat

quartum. Integram adeo demonstrationem absolvimus, cum vi theseos nihil amplius demonstrandum restet.

§. 42. Quodsi symbolicam demonstrationis hujus representationem desideres, qua singula veluti oculis conspicienda exhibentur; ea ita sese habet:

<i>Hypothesis</i>	<i>Thesis.</i>
ang. $a = A$	I. $bc = BC$
$ab = AB$	II. ang. $b = B$
$ac = AC$	III. $c = C$
	IV. $\triangle acb \cong \triangle ACB$

Tab. I.
Fig. 6.

Præparatio.

a cadit in A

ab cadit in AB

Demonstratio.

I.

a cadit in A , per præparat.

ab cadit in AB , per eandem.

$a = A$, per hypoth.

1°. ac cadit in AC

II.

$ab = AB$, per hypoth.

a cadit in A , per præparat.

ab cadit in AB , per eandem.

2°. b cadit in B

III.

a cadit in A , per præparat.

ac cadit in AC , per demonstr. *num.* 1.

$ac = AC$, per hypoth.

3°. c cadit in C

IV.

c cadit in C , per demonstr. *num.* 3.

b cadit in B , per demonstr. *num.* 2.

adeo.

adeoque
 bc & BC intra eosdem terminos continentur.

Recta bc congruit ipsi BC

I. $bc = BC$

V.

b cadit in B , per demonstr. num. 2.

ba cadit in BA , per preparat.

bc cadit in BC , per demonstr. num. 2.

& num. 3 & §. 170 Geom.

II. angulus $b = B$

VI.

c cadit in C , per demonstr. num. 3.

ca cadit in CA , per demonstr. num. 1.

cb cadit in CB , per demonstr. num. 2.

& num. 3. & §. 170 Geom.

III. angulus $c = C$

VII.

a cadit in A , per preparat.

b cadit in B , per demonstr. num. 2.

c cadit in C , per demonstr. num. 3.

adeoque

$\triangle acb$ & $\triangle ACB$ intra eosdem terminos continentur (§. 11, 170 Geom.)

$\triangle acb$ congruit $\triangle ACB$

IV. $\triangle acb \cong \triangle ACB$

§. 43. Atque ita totam demonstrationem in sua prima principia resolvimus, ex quibus facultatum nostrarum usu deducitur, non admissis notionibus confusis, quæ ob-

fcuritatem quandam relinquere poterant, & ratiociniis distincte atque naturali ordine expressis, ac inter se concatenatis, ut nihil desit evidentiae (§. 41). Singula hæc ipsis oculis spectanda exhibet representatio demonstrationis resolutæ symbolica (§. 42). Etenim conspicitur, quomodo demonstratio ex hypothese & præparatione, tanquam ex assumtis procedat; quemnam utriusque usum faciamus in demonstrando; & cur præparatione opus sit; nec non quomodo sese habeant ea, quæ præparatio superaddit, ad ea quæ in hypothese continentur. Videmus porro, quomodo omnes determinaciones in hypothese contentæ invehantur in demonstrationem; ut tandem, ex omnibus simul sumtis, concludatur unumquodque eorum, quod in thesi continetur, tanquam determinatum ex determinantibus. Videmus quoque, quomodo ratiocinia concatenentur, introductis conclusionibus præcedentium in sequentia. Videmus denique, quomodo ratiocinia ultima terminentur in iis, quæ demonstranda loquitur thesis, ut manifestum sit demonstrationem esse absolutam.

§. 44. Habet autem representatio demonstrationis symbolica hunc usum, ut eandem facilius & omnem difficultatem arceat. Oritur difficultas ex ratiociniorum continuandorum longa serie, & conclusiones, quæ in præcedentibus ratiociniis fuerant elicite, memoria retinendæ, ut eas intro-

introducere liceat in sequentes per modum præmissarum, ubi non statim, quando illatæ fuerunt, in locum præmissæ assumuntur in syllogismo proxime sequente, quemadmodum in exemplo primo factum esse apparet *num.* I, & II, (§. 39) & in præfenti *num.* IV, & VII. Enimvero, si demonstratio symbolice repræsentetur, gradum sistere licet in singulis, quæ sigillatim expressa exhibentur, & quacunque mora interposita redeunti progredi datur, ac si nulla interposita fuisset. Quæcunque igitur fuerit ratiociniorum eò usque continuandorum series, donec perveniatur ad ea, quæ demonstranda fuerant; non tamen defatigabitur animus ratiocinationi in longa serie continuandæ minus adsuetus. Nec distrahitur animus, quocunque, durante illa quam interponere visum est mora, cogitationes tuas convertas. Non interruptitur eadem attentio, quæ ad demonstrationem afferenda, ne desit sensus evidentiae ad convictionem plenariam requisitus. Immo dum omnia, ad quæ animus advertendus, oculis spectanda subjicit, attentionem mirifice juvat, sive ea excitanda, sive conservanda fuerit. Neque defatigatur imaginatio, atque memoria; quatenus conclusiones syllogismorum anteriorum retinendæ, ut earum prompte meminerimus, dum in syllogismos sequentes introducendæ; cum oculis in ea, quæ distincte scripta cernuntur, conversis,

sua sese sponte sistant, quamprimum earundem meminisse debemus. Neque etiam hæsitatio in eo, quomodo progrediendum sit in demonstratione, donec absolvatur. Etenim clarissime vides, primum formari propositiones ex iis, quæ in hypothese &, ubi ea non sufficit sola, in præparatione sumuntur, ut, adscitis principiis, ex anterioribus inferantur conclusiones, donec hypothesis & præparatio fuerit exhausta. In locum hypotheseos & præparationis, deinde succedunt conclusiones hoc pacto elicite, & quomodo introducendæ sint in novos syllogismos, tum thesis, quæ demonstranda oculis objicit, tum memoria principiorum, quæ conspectus conclusionum & in thesi contentorum offert, ostendit. Quod si adeo principia anteriora familiaria experiris, in distincte concipienda demonstratione nihil prorsus difficultatis percipitur. Redduntur autem familiaria, si eo, quem præscripsimus, modo expendantur, & symbolicæ repræsentationes, quas explicavimus, aliquoties animo recolantur.

§. 45. Qui principia, quibus opus habet, nondum adeo familiaria experitur, ut sponte sua memoriam subeant, quoties iisdem opus est; ei inserviunt citationes demonstrationibus in contextu insertæ. Hæ enim ostendunt paragraphum, in quo principium continetur, quod ad propositionem, vel ex hypothese ac præparatione formatam, vel ex conclusio-

nibus

nibus jam elicitis assumptam aut derivatam, applicatum conclusioni eliciendæ inservit. Patebit hoc, demonstrationis symbolicam repræsentationem cum contextu conferenti, ut adeo opus non sit plura in hanc rem afferri.

§. 46. Notandum nimirum, in contextu demonstrationem concisius proponi; quantum sufficit, ut singula suggerantur, quæ animum subire debent, ubi illam distincte concipere volueris. Quodsi tamen contextum cum resolutione, qualem hic præcepimus, & repræsentatione symbolica, qualem exhibuimus, conferre volueris; facile observabis, demonstrationem in contextu positam esse utriusque directorium, ne hæsites in eo, quid fieri debeat. Facile adeo animadvertes, demonstrationes ita a nobis fuisse expressas, ut huic instituto maxime conveniant. Disces etiam, resolvendo demonstrationes eo, quem præcepimus, modo, & symbolice repræsentando, easdem minime effici prolixiores: cum supplendo ea, quæ conspectus schematismi suggerit & quæ citationes insinuant, eodem prorsus ordine prodeant singula ratiocinia, quo eadem posuimus. Immo, si sufficiente attentione uti volueris, in te ipso experieris, deesse adhuc aliquid sensui evidentiae, quamdiu singula ratiocinia non formaveris; præsertim ubi uno vel altero exemplo eundem acquisiveris, ut ne ignores differentiam, quæ inter distinc-

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

ram & confusam perceptionem intercedit. Absit itaque ut tibi persuadeas, hic a nobis præcipi, quæ a contextu abhorrent, ac per inutiles ambages ad scopum tendi.

§. 47. Enimvero non inconsultum esse videtur, ut exemplum quoque demonstrationis theorematis arithmetici in medium afferamus. Sumamus itaque theoremata 21 (§. 181 *Arithm.*), quo superius usi sumus (§. 24) & quod ita habet: *Si duas quasunque quantitates per eandem tertiam divides; quoti sunt inter se ut quantitates divisæ.* Theorema hoc symbolice ita repræsentatur:

<i>Hypothesis.</i>	<i>Thesis.</i>
A & B quantitates dividendæ, C dividens communis, F & G quoti ex divisione prodeuntes	$F : G = A : B.$

Patet itaque demonstrandum esse, quotos F & G esse quantitatibus A & B proportionales, ex eo, quod prodeant ex divisione quantitatuum A & B per eandem tertiam C. Quodsi ergo ex hypothesi sumis: Quotus F prodit ex divisione quantitatis A per quantitatem C; ex anterioribus (§. 174 *Arithm.*) succurrit principium: In divisione unitas est ad divisorem, ut quotus ad dividendum. Unde infertur: 1, sive unitas, est ad C ut F ad A. Quodsi porro ex hypothesi sumis: Quotus G prodit ex divisione quantitatis B per quantitatem

titatem C; vi ejusdem principii infertur: unitas, sive 1, est ad C ut G ad B. Exhausta hypothese, ut inde nihil amplius concludi possit, ubi conclusiones modo elicitas inter se confers, patebit rationes F ad A, & G ad B, esse duas rationes eidem tertiæ 1 ad C æquales. Succurrit itaque theorema (§. 167 *Arithm.*): Rationes æquales eidem tertiæ sunt æquales inter se. Atque hinc infertur: Rationes F ad A & G ad B esse æquales, seu esse $F : A = G : B$. Enimvero thesis ostendit, quæri quomodo sese habeat A ad B. Huc si animum advertas, succurrit theorema 18 (§. 173 *Arithm.*): Quantitates proportionales etiam alternando proportionales sunt. Atque adeo tandem infertur, esse $F : G = A : B$, quod erat demonstrandum.

§. 48. Symbolica demonstrationis hujus representatio hæc est:

<i>Hypothesis.</i>	<i>Thesis.</i>
$\frac{A}{C} = F$ $\frac{B}{C} = G$	$E : G = A : B$

Demonstratio.

I.

$$\frac{A}{C} = F, \text{ per hypothesein.}$$

$$1^o. 1 : C = F : A$$

II.

$$\frac{B}{C} = G, \text{ per hypothesein.}$$

$$2^o. 1 : C = G : B$$

III.

$$1 : C = F : A, \text{ per demonstrata n. 1.}$$

$$1 : C = G : B, \text{ per demonstrata n. 2.}$$

$$F : A = G : B$$

$$F : G = A : B \quad Q. E. D.$$

Nulla hic opus est præparatione, cum sola hypothesis ea contineat, unde vi principiorum anteriorum tandem infertur conclusio, quæ vi thesios inde elicienda. Quodsi majoris perspicuitatis gratia in numeris demonstrationem repræsentare volueris, non alia re opus est, quam ut literis substituantur numeri; eo modo, quo hic factum esse vides:

<i>Hypothesis.</i>	<i>Thesis.</i>
$\frac{24}{3} = 8$ $\frac{12}{3} = 4$	$8 : 4 = 24 : 12$

Demonstratio.

I.

$$\frac{24}{3} = 8, \text{ per hypothesein.}$$

$$1^o. 1 : 3 = 8 : 24$$

II.

$$\frac{1^2}{3} = 4, \text{ per hypothesin.}$$

$$2^o. 1:3=4:12$$

III.

$$1:3=8:24, \text{ per demonstrata n. 1.}$$

$$1:3=4:12, \text{ per demonstrata n. 2.}$$

$$8:24=4:12$$

$$8:4=24:12 \quad Q. E. D.$$

Possunt etiam numeri quantitativis per litteras designatis subscribi, vel ad latus adjici, prout supra factum esse apparet (§. 24), ut claritate sua dispellant obscuritatem, quæ signis istis universalibus adherere videtur, quamdiu iisdem nondum satis fueris adfuetus. Ceterum si demonstrationem in numeris exhibere volueris, eadem demonstratione ad plura exempla applicata, absque ulla molestia fit repetitio, quod idem agendo semper aliud agere tibi videris, quatenus numerorum diversitas varietatem quandam inducit.

§. 49. Cum representatio demonstrationis in numeris non sit nisi ipsa demonstratio scientifica, seu generalis, ad exemplum aliquod, majoris perspicuitatis gratia, applicata; quemadmodum in Geometria demonstratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quæ singulare exemplum præbet; ideo in eadem acquiescere

licet, nec opus est, ut iisdem signa universalia substituas; modo tibi caveas, ne in ratiocinia tacite invchas determinationes nonnullas, quæ insunt numeris assumtis, non vero hypothesi. Etenim tum demonstratio non succedit, nisi in eo casu, ubi istæ determinationes adsunt; consequenter tantummodo casum quendam particularem attingit, nec universaliter demonstratur, quod erat demonstrandum. Atque adeo contingere potest, ut, dum conclusio in casu particulari elicitur habetur pro universali, in errorem incidas. Enimvero error hic præcavetur, modo probe consideres, num quod assumis, conclusionis inferendæ gratia, totum in hypothesi contineatur, aut per præparationem superaccedat, si præterea aliud quid sumitur, nulla habita ratione eorum, quæ numeris qualibus insunt. Ita enim certum est, in omni exemplo alio ratiocinationem eodem modo procedere, nec argumentationem fieri ab eo, quod huic exemplo inest singulare, sed ab eo, quod cum omnibus aliis sub hypothesi contentis commune habet. Ex. gr. in exemplo nostro (§. 48), quoti 8 & 4, *num. I & II*, sunt numeri integri rationales. Ast principium, quo mediante hinc inferimus conclusiones, scilicet quod in omni divisione sit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad dividendum, satis ostendit, conclusionem inferri ex eo, quod 8 & 4 sint quoti

per divisionem duorum numerorum 24 & 12, per eundem tertium 3 prodeuntes, nec supponi quotum esse numerum integrum rationalem; consequenter nihil hypothefi superaddi, dum demonstratio ad exemplum aliquod singulare applicatur. Ceterum, quæ hic dicuntur probe notanda sunt, cum usum habeant etiam extra Mathesin, atque in partibus Matheſeos mixtis, & in cognitione Naturæ mathematica, ubi majore circumſpectione opus est, quam in Arithmetica: præſertim ſi theoria accurata nondum proſtat, unde haurienda ſunt principia demonſtrandi; nec diſtinctis ratiociniis in demonſtrando fueris adſuetus; qualia requirit noſtra demonſtrationum reſolutio, earundemque ſymbolica repræſentatio, ſecundum leges animæ, naturali ordine ex hypothefi &, quæ ſubinde eidem ſuperaccedere debet, præparatione, tanquam ex fonte ſuo, proſluentia, quemadmodum ex principiis Psychoſogix empiricæ demonſtrari poteſt nullo negotio, modo ea habueris perſpecta.

§. 50. Quoniam demonſtrationis univerſalitati nil quicquam decedit, dum ad exemplum aliquod applicatur (§. 49); ab ejus repræſentatione in numeris facile abſtrahitur demonſtratio, qualem libro inferi convenit; ſi quæ aſſumuntur, & concluſiones quæ hinc inferuntur, verbis enuncientur, & concluſionibus adjiciantur citationes principiorum, quo-

rum vi hæ inferuntur. Ita in caſu dato (§. 48) talis prodit demonſtratio: Quoniam quoti ex diſiſione duarum quantitatum per eandem tertiam reſultant, per hypothefin; quilibet eorum eſt ad quantitatem diſiſam: ut unitas ad tertiam, quæ utramque dividit (§. 174 *Arithm.*); conſequenter quoti ad quantitates diſiſas eandem habent rationem (§. 167 *Arithm.*). Sunt igitur inter ſe ut quantitates diſiſæ (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

§. 51. Quodſi problema aliquod demonſtrandum eſt; notandum idem converti in theorema, ſumta reſolutione cum datis tanquam hypothefi, & eo, quod fieri debet, tanquam theſi. Ex. gr. Problema de ducenda linea alteri parallela, per punctum extra ipſam datum, adhibita reſolutione prima, quam ſuperius exempli loco produximus (§. 27), in hoc theorema convertitur: Si ex puncto, extra lineam dato, demittatur ad lineam datam perpendicularis; & ex puncto alio intra eandem pro arbitrio aſſumto, erigatur perpendicularis altera eidem æqualis: recta per punctum datum & extremum perpendicularis alterius tranſiens eſt lineæ datæ parallela.

§. 52. Ubi problema in theorema fuerit converſum, reſolutio demonſtrationis eodem modo abſolvitur, quo in demonſtrationibus theorematum reſolvendis uſi ſumus (§. 38, 41 & 47). Sit ex. gr. reſolvenda demonſtratio problematis, quod modo ad theorema

revoca-

Tab. I.
Fig. 7.

revocavimus (§. 51); demonstratio ita procedit. Recta VK, ex puncto V extra lineam RS dato, ducta est ad eandem perpendicularis; recta TA, ex puncto T intra rectam RS pro arbitrio assumpta, est itidem ad eandem perpendicularis, alterique perpendiculari VK æqualis, per constructionem seu resolutionem; adeoque perpendiculara, inter rectam datam RS & rectam per punctum V & A ductam intercepta, VK & TA æqualia sunt. Enimvero si perpendiculara inter duas lineas intercepta æqualia sunt, lineæ istæ sunt parallelæ (§. 226 Geom.). Linea igitur, ducta per punctum datum V & extremum A alterius perpendicularis TA, est parallela lineæ datæ RS. *Q. e. d.* Videmus adeo ex iis, quæ constructio, juxta resolutionem problematis facta, suggerit, unico syllogismo inferri, quod demonstrandum erat: quæ ratio est, cur nullam in contextu demonstrationem adjecerimus, sed tantummodo citationem principii, vi cujus ex constructione inferitur, quod erat demonstrandum, nempe parallelismus linearum RS & MN.

§. 53. Symbolica demonstrationis hujus representatio nihil prorsus difficultatis habet. Etenim non alia re opus est, quam ut representationi symbolicæ resolutionis supra datæ (§. 27) adscribas data ex representatione problematis symbolica, & ad summum adjicias propositionem ex iisdem formatam; prouti hic factum esse vides:

Hypothesis.

Recta RS data,
Punctum V extra eam datum,
VK perpendicularis ad RS,
T punctum pro arbitrio assumptum,
TA=VK,
MN transiens per V & A.

Demonstratio.

VK & TA perpendiculara
inter MN & RS,
atque VK=TA.

Thesis.

MN paral. RS.

MN parallela ipsi RS. *Q. e. d.*

§. 54. Quoniam demonstratio problematis, quod exempli loco in medium protulimus (§. 51 & seqq.), perbrevis est, utpote quæ nonnisi unico syllogismo constat; non inconsultum videtur addere exemplum adhuc aliud. Sumamus itaque problema 33 Geometriæ de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Sunt itaque data rectæ duæ AB & BE; Tab. I. quæsitum est recta BD media proportionalis inter AB & BE. Resolutio jubet rectas AB & BE jungi in directum, ut prodeat recta AE; super AE describi semicirculum ADE: & ex B erigi perpendicularem BD semicirculo in D occurrentem; quæ esse dicitur media proportionalis inter AB & BE. Quodsi ergo problema demonstrare volueris, resolutione in hypothesin versa & propositione prothesi sumpta; sequens prodit theorema. Si super recta AE describatur
X. 3. semicirculus

semicirculus, & ex puncto quocunque diametri B erigatur perpendicularis BD semicirculo in D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & BE media proportionalis.

§. 55. Quodsi jam hoc theorema demonstrare volueris, præparatio accedere debet. Ducantur itaque rectæ AD & DE, chordæ arcus semicirculi cognomines subtendentes, ut prodeant triangula ADB, BDE & ADE. Quo facto demonstratio ita resolvitur. Sumimus ex constructione: Recta BD perpendicularis est ad AE. Hoc ubi perpendis, definitio perpendicularis lineæ suggerit hoc principium (§. 78 *Geom.*): Si linea recta fuerit ad alteram perpendicularis, anguli, quos cum ea efficit, recti sunt & æquales (§. 79 *Geom.*). Unde infertur angulos m & n esse rectos & æquales. Porro rectæ AD & DE semicirculum subtendunt, vi præparationis & AE diameter circuli est, per constructionem. Unde patet, quod ADE sit angulus in semicirculo. Huc si animum advertis succurrit theorema (§. 317 *Geom.*): Angulus in semicirculo rectus est. Unde infertur: angulus ADE seu $o + x$ rectus est. Est vero etiam angulus m rectus, per demonstrata. Quamobrem, si angulum m ad angulum $o + x$ referas, succurrit principium (§. 145 *Geom.*): omnes anguli recti inter se æquales sunt. Unde infertur: angulus m trianguli ADB est æqualis angulo $o + x$

trianguli ADE. Enimvero angulus y utrique triangulo ADB & ADE communis est, atque adeo duo in hisce triangulis anguli æquales sunt. Memoria suggerit, siquidem anteriora eidem mandaveris, quemadmodum fieri debet, adeoque hic supponitur: Si duo anguli unius trianguli æquantur duobus alterius, etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 246 *Geom.*). Hinc itaque colligitur angulum o in triangulo ADB esse æqualem angulo z in triangulo ADE. Quodsi jam angulos in triangulis ADB & DBE inter se confers, tum patet duos angulos m & o trianguli ADB esse sigillatim æquales duobus angulis n & z alterius trianguli DBE. Succurrit itaque, ex anterioribus memoriæ probe infixis, principium: si duo anguli unius trianguli fuerint sigillatim æquales duobus angulis alterius, triangula latera æqualibus angulis opposita proportionalia habent (§. 267 *Geom.*). Hinc infertur, latera AB & BD in triangulo ABD esse proportionalia lateribus BD & BE in triangulo DBE, quorum scilicet illa opponuntur angulis o & y , hi vero angulis z & x , angulo o existente æquali angulo z & angulo y æquali angulo x , per demonstrata. Habemus adeo $AB : BD = BD : BE$. Q. e. d. Ita demonstrationem resolvimus, ut singula distincte enuncientur, quæ in notionibus continentur, quæ eandem absolvunt, & præsentis animo ejus

ejus esse debent, qui eadem convincitur.

Tab. I. §. 56. Demonstratio problematis
Fig. 2. hujus symbolice ita repræsentatur.

Hypothesis.

AB recta data

BE recta data

AE diameter
femicirculi

ADE semicirculus

AB }
BE } Segmenta diametri

Thesis.

BD recta quæsitæ.

AB: BD = BD: BE

Præparatio.

AD & DE chordæ semicirculum
subtendentes.

Demonstratio.

I.

BD perpendicularis ad AE, per constr.

1°. m & n anguli recti
& $m = n$

II.

AD & DE semicirc. subtendunt,
per præparat.

AE diameter circuli, per construct.
adeoque

ADE angulus in semicirculo.

2°. angulus $o + x$ rectus.

III.

ang. $o + x$ rectus, per demonstr. num. 2.
 m rectus, per demonstr. num. 1.

3°. $o + x = m$

IV.

in $\triangle\triangle$ ADE & ABD

$o + x = m$, per demonstr. num. 3.

$y = y$

4. $z = o$.

V.

in $\triangle\triangle$ ADB & DBE

$m = n$, per demonstrat. num. 1.

$o = z$, per demonstrat. num. 4.

50. $y = x$ &

AB: BD = BD: BE. Q. e. d.

§. 57. Atque adeo patet, inter demonstrationem theorematis & problematis nullam intercedere differentiam, modo problema in theorema convertatur, quemadmodum id fieri debere præcepimus (§. 51, 54). Et hoc pacto docuimus omnia, quæ observanda sunt ei, qui ad secundum cognitionis humanæ gradum adspirat. Unicum adhuc moneri consultum ducimus; scilicet quod ex resolutione demonstrationum pateat, cur propositiones pure enunciare debeamus, quas brevitatis gratia in contextu statim ad figuras retulimus, expositione cum propositione in unum confusa. Etenim ubi distincte ratiocinari volueris, quemadmodum exigit resolutio demonstrationis; necesse est ut propositiones singulæ pure enuncientur. Quamobrem etiam pure enuntiatae memoriæ mandandæ; cum alias applicatio, in casu dato, ob literarum figuris adscripta;

scriptarum diversitatem, confundat, ut difficilis ac molesta evadat. In addiscenda igitur Mathesi morem veterum sequi tenemur, ut primum propositionem unamquamque pure enunciemus, ac deinde eandem exponamus, separata expositione a propositione, quando eidem immixta.

§. 58. Quodsi objicias, nos nihil dixisse de corollariis, quorum tamen bene multa in Elementis nostris occurrunt: facilis est responsio. Corollaria enim sunt propositiones, quarum veritas perspicitur per definitionem, vel propositionem, cui subjiciuntur. Quoniam pleraque eorum demonstratione indigent, quam per modum principii ingreditur definitio, vel propositio, cui subjiciuntur; quæ de resolutione & symbolica representatione propositionum diximus, ea quoque de corollariis tenenda. Nimirum propositio pure enuncianda, deinde exponenda, exposita in hypothesin & thesin resolvenda, quarum utraque consueto more symbolice representata. Demonstratio deinde, eodem modo resolvenda, quo eandem in anterioribus resolvimus, eodem etiam modo symbolice representanda, quo eandem in anterioribus representavimus. Nullis igitur peculiaribus præceptis hic opus.

§. 59. Ne quicquam in dictis superfit obscuri, exemplum aliquod

superaddere lubet. Sumamus itaque corollarium quartum theorematis 34 (§. 228 *Geom.*), quod revera est corollarium præcedentis tertii; cum non theorema ipsum, sed ejus corollarium tertium ingrediatur demonstrationem tanquam principium. Propositio in eodem contenta hæc est: *Si in triangulo rectangulo cathetus unus sumatur pro basi, erit alter altitudo.* Hæc propositio ita exponitur. Sit MKL triangulum, MK & KL catheti ejus. Dico si KL sumatur pro basi, ^{Tab. I.} fore MK altitudinem ejus. ^{Fig. 11.} Hypothesis adeo est quod triangulum MKL sit rectangulum, MK & KL sint catheti, & KL sumatur pro basi; thesis autem, quod cathetus MK sit altitudo trianguli. Demonstratio ita resolvitur, si nihil perceptioni confusæ tribuere, sed singula ad notionem distinctam reducere volueris. Figura MKL triangulum rectangulum est, per hypothesin. Succurrit definitio 52 (§. 91 *Geom.*): In triangulo rectangulo angulus unus rectus est. Unde concluditur: In figura MKL angulus unus rectus est: Porro latera MK & KL sunt catheti, per hypothesin. Succurrit definitio 57 (§. 96 *Geom.*). Catheti trianguli rectanguli angulum rectum intercipiunt. Unde inferitur. Angulus K rectus est. Studio utor syllogismo cryptico, quem a crypti facile liberabit in Logica versatus, tum quia syllogismi cryptici frequentissime sua veluti sponte sese offerunt in demonstrationibus, manifesti au-
tem

tem studio quærendi; tum ut crypticos in ratiocinando idea animo sese insinuet profutura in Logica, ubi theoria syllogismorum crypticorum traditur. Ceterum hanc conclusionem, quam modo intulimus, unica etiam ratiocinatione colligere licet hoc modo: Angulum K in triangulo rectangulo MKL catheti intercipiunt, per hypothesin. Angulus in triangulo rectangulo, quem catheti intercipiunt, rectus est. Ergo angulus K rectus est. Ex eo, quod angulus K rectus sit, per immediatam consequentiam inferitur: Cathetum MK cum altero KL efficere rectum. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, vi definitionis lineæ perpendicularis (§. 78 *Geom.*) succurrit principium: Linea recta cum altera efficiens angulum rectum ad eandem perpendicularis est. Unde colligitur: Cathetus MK ad alterum KL perpendicularis est. Quodsi perpendas ex puncto M ad rectam KL ductam esse perpendicularem MK, succurrit vi definitionis 47 (§. 85 *Geom.*) principium: punctum, ex quo perpendicularis ad rectam duci potest, eidem rectæ opponitur; quod scilicet ex definitione, animo obversante per consequentiam immediatam elicitur. Unde inferitur: Punctum M catheto trianguli KL opponitur. Jam rectæ KM & LM in puncto M concurrunt ad formandum angulum KML, ut adeo M sit vertex hujus anguli,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

quod per definitionem 26 (§. 54 *Geom.*) patet, nec demum per ratiocinia distincta elicere lubet. Hoc ubi perpendis, ac præterea ex hypothesi sumis quod KL sit basis trianguli, succurrit definitio 74 (§. 114 *Geom.*): Vertex figuræ est vertex anguli basi oppositus. Unde inferitur: Punctum M est vertex figuræ seu trianguli MKL. Recordatus quod MK sit ad KL perpendicularis, per demonstrationem, hoc formas judicium: Cathetus MK est perpendicularum ex vertice trianguli M in basin KL demissum. Quodsi denique huc animum advertis, succurrit principium (§. 227 *Geom.*): Perpendicularum ex vertice figuræ in basin ejus demissum est altitudo figuræ. Atque hinc tandem concludis: Cathetum MK esse altitudinem trianguli rectanguli MKL.

§. 60. Quodsi hanc demonstrationem symbolice representare volueris, hoc modo id fieri debere, ex anterioribus abunde liquet.

Hypothesis.

MKL Δ rectangulum,
MK & KL catheti,
KL basis,

Thesis.

MK altitudo;

Demonstratio.

I.

MKL Δ rectangulum, per hypothesin.

1°. In Δ MKL angulus unus rectus

Y

II.

II.

MK & KL catheti Δ rectanguli
MKL, *per hypoth.*

2. Angulus K rectus.

III.

MK cum KL efficit rectum, *per
demonstr. num. 2.*

3. MK ad KL perpendicularis.

IV.

MK ad KL perpendicularis, *per
demonstr. num. 3.*

4. M opponitur ipsi KL.

V.

M vertex anguli KML, *quod
patet intuitive.*

5. M vertex Δ MKL

VI.

M vertex Δ MKL, *per de-
monstr. num. 5.*

MK perpendicularis ad KL, *per
demonstr. num. 3.*

KL basis, *per hypoth.*
adeoque

MK perpendicularum ex vertice
M in basin KL demissum.

MK altitudo Δ rectang. MKL.

§. 61. Insunt resolutioni demon-
strationis præcedentis, quæ attento-
nem merentur. Nimirum quando
per notiones confusas clare perspi-
cimus, quæ distincte cognoscenda

ratiociniis inferenda, saltum in ratio-
cinando committimus: qui quando
admitti possit citra lapsus periculum,
ex resolutione confuse perceptorum
in ratiocinia patet. Quodsi integram
Arithmeticam & Geometriam eo mo-
do pertractare libuerit, quem præ-
scripsimus & exemplis illustravimus,
vix quicquam in theoria Logica oc-
curreret, cui non lux affundatur. Ipsa
quoque resolutio demonstrationis co-
rollarii, quam modo in medium at-
tulimus, clarissime docet, cur in de-
finiendo fuerimus prolixiores, quam
vulgo fieri solet, & cur multa demon-
straverimus principia, quorum nul-
lus in Elementis Geometriæ locus esse
solet. Etenim, omissis istis defini-
tionibus atque principiis, in demon-
strationibus saltus in demonstrando
committuntur, nec distinctam hujus
notionem consequi datur, ubi nun-
quam, quæ per notiones confusas
clara putantur, distinctis ratiociniis
inferuntur. Equidem non nego ty-
ronibus initio studii mathematici mo-
lestum esse hunc rigorem, immo su-
perfluum videri, propterea quod de-
monstratione non indigere existimant
ea, quæ absque demonstratione vera
intelliguntur; non tamen hinc sequi-
tur, rigorem istum sua carere utilita-
te. Quamvis adeo, initio studii ma-
thematici, in gratiam tyronum, ab
eo tantisper sit recedendum, in pro-
gressu tamen non negligendus. Ea de
causa in Elementis Germanicis multa
non definivimus, quæ in Latinis defi-
niuntur.

niuntur; multa sine demonstratione sumimus in illis, quæ in hisce demonstrantur. Nec hoc fecimus sine prægnantibus rationibus, quæ manifestæ evadent per ea, quæ capite sequente dicentur. Non defuere, qui tantum definitionum & principiorum demonstratorum apparatus improbarunt; immo autores nobis fuere, ut in nova editione rescaremus, quæ ipsis superflua videbantur, propterea quod evidentes sint demonstrationes, absque illis definitionibus & absque principiorum istorum demonstrationibus. Enimvero si nostram demonstrationum resolutionem viderint & ex sequentibus consilium intellexerint, quo id fecimus; non dubitamus fore, ut aliud sit ipsorum iudicium.

§. 62. Probe autem notandum est, tum demum demonstrationes esse naturales, seu ordinatas, & completas, adeoque consummatas, quales in Logica requirimus (§. 799, 854, 855 *Log.*), si eo modo resolvantur, quem præscripsimus, ut plenaria oriatur convictio, nec quicquam quoad evidentiam desiderari possit. Et qui in Psychologia empirica satis fuerit versatus, ex principiis ibidem traditis, demonstrabit, tum demum facultatum animæ in cognoscendo rectum fieri usum, ubi demonstrationes eo modo expenduntur, quo eadem resolvere docuimus. Nec minus patebit, in demonstrando tum eum fieri facultatum cognoscendi

usum, quem in communi cogitationum sese mutuo excipientium serie observamus.

§. 63. Nos in Elementis nostris demonstrationes eo ordine digessimus, ut in ratiocinia ex hypotefi & superaccedente præparatione, si quando opus est, deducta & inter se concatenata facile resolvi possint. Etenim conclusiones eo ordine sese invicem excipiunt, quæ in repræsentatione symbolica exhibentur, & iis adjiciuntur citationes, quibus insinuantur principia, quæ in resolutione commemorantur. Sumuntur etiam, ex hypothefi & in demonstrationibus problematum, ex constructione unde inferitur conclusio, immo etiam ex demonstratis, conclusiones; nisi immediate ingrediantur ratiocinium proxime sequens, ut eandem bis poni inconsultum foret. Saltus si quos admittimus, quemadmodum in corollario, quod exempli loco modo adduximus, tales sunt, ut, nisi acutior fueris in demonstrando, eos non animadvertas, quod oculis in schema conversis per se clara videntur; veluti quod M sit vertex trianguli, quod MK & KL interceptiant rectum K. Nullum vero in demonstrationibus nostris deprehendes hiatum, ut omitterentur quædam, quæ ad formanda ratiocinia sunt necessaria, & sine quibus singula, quæ ad demonstrationem requiruntur, formari nequeunt: qui ipse hiatu demonstrationem reddit incom-

pletam (§. 854 *Log.*). Enimvero exactam hanc formam logicam naturæ animæ convenientem, quemadmodum ex Psychologia constat, demonstrationibus vulgo non tribuunt autores: unde eadem facilitate non resolvuntur in ratiocinia, ex quibus constant, nec symbolice eo modo absque difficultate repræsentantur, quo nos easdem exhibere docuimus. Quamobrem, ex nostris quoque Elementis, Mathesis minore studio atque minore temporis intervallo addisci potest, quam ex aliorum scriptis; & si qua sphalmata, vel typographi incuria, vel festinante scribentis calamo, irrepserint, ea attentione adhibita haud difficulter corriguntur.

§. 64. Vulgo demonstrationes non eo modo expenduntur, quo nos eas resolvere docuimus. Immo ipse, cum Mathesi addiscendæ operam darem, aliam viam ingressus sum, donec tandem studium philosophicum cum mathematico coniungens & in rationem evidentiae anxius inquirens, in veram inciderem. Nimirum vulgo animum primo convertimus in conclusionem quam contextus suggerit, & deinde inquiritur in rationem, cur ea tanquam vera sit admitenda; quæ vel ex hypothesi, vel ex definitione, aut propositione quadam anteriore petita, & cum schemate oculis subiecto collata, attento vim consequentiæ confuse percipiendam exhibet, nullo ratiocinio distincte

formato. Ex. gr. Si quis demonstrationem theorematis 6 (§. 156 *Geom.*) expendere voluerit, is conclusiones $x+y$ & $y+o=180$ confert cum figu-
ra, ut intelligat, quid affirmetur. Tab. I.
Fig. 9.
Quærit deinde, cur hæc propositio sit vera; & §. 148, qui citatur, evolvens, ubi legit angulos deinceps positos junctim sumtos conficere 180 grad., recurrit ad figuram, ex qua ubi confuse percipit, angulos y & x , itemque o & y esse deinceps positos, duas istas conclusiones admittit tanquam veras. Deinde recordatur, quod demonstrandum sit, angulos o & x esse æquales, hanc conclusionem cum illis confert, oculis in figuram conjectis. Et ubi videt, eos relinqui, si angulus communis y auferatur, theorematis veritatem admittit; cur hoc faciat quæsitus, respondens, quia ab æqualibus idem auferatur, seu particulariter, quia angulus communis y auferatur; axioma istud, quod eodem ab æqualibus ablato æqualia relinquantur, nonnisi confuse sibi repræsentans. Unde audias alios respondentes, hoc per se patere. Solenne enim est hominibus, ut per se liquere dicant id, quod per confusas perceptiones verum apparet, cur vero verum sit rationem reddere nequeunt. Admittuntur hinc saltus & hiatus in demonstrando, quæ, initio studii mathematici, subinde haud parum obstant evidentiae ad plenariam convictionem requisitæ, antequam confusis

fufis istis ratiocinationibus adfuefcas, ut familiaritas fuppleat defectum evidentiæ.

§. 65. Quid interfit discriminis inter noſtram demonſtrationum reſolutionem, & communem eas expendendi morem; in ſeipſo experietur, qui initio ſtudii mathematici utramque viam ingreditur. Magis autem idem animadvertet, ubi in philoſophia noſtra verſatus, utrumque modum expendendi demonſtrationes inter ſe confert. Quam diverſi autem ſint fructus, quos hinc percipere datur, ex capite ſequente eluceſcet. Diſta igitur de ſecundo cognitionis gradu acquirendo ſufficiant.

§. 66. Reſtat ut dicamus de tertio cognitionis gradu, quomodo ad eum perveniatur, quantum hic datur. Tertius cognitionis gradus in eo conſiſtit, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus (§. 1). Si quis demonſtrationes noſtra methodo reſolvit; is modum colligendi ex aſſumptis quæſitum, continuo ratiociniorum nexu, inde perſpicit (§. 38, 41, 47, 52, 54, 59). Quodſi ergo habitum reſolvendi demonſtrationes præſcripto modo ſibi comparaverit; habitu ratiocinandi pollet, quo in veritatibus ſibi adhuc incognitis eruendis opus habet. Quamobrem iſta demonſtrationum reſolutio maximopere quoque commendanda eſt, in uſum tertii cogni-

tionis gradus; ita ut ad tertium appropinquemus, dum ſecundo acquirendo ſtudemus. Et qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat, is multus eſſe debet in demonſtrationibus reſolvendis; cum omnis habitus non modo acquiratur, verum etiam perficiatur, augeatur, & conſervetur continuo exercitio (§. 430, 431 *Pſych. empir.*). Quamobrem cui tertius cognitionis gradus curæ cordique eſt, is acquieſcere non debet in Elementis Arithmeticæ & Geometriæ, ſed ad alias quoque Matheseos partes progredi tenetur.

§. 67. Si ex aſſumptis ratiocinando, colligendum eſt quod in theſi continetur; ipſa reſolutio demonſtrationis, præſcripto modo facta, loquitur, non opus eſſe ut hoc tanquam cognitum præſupponatur. Quamobrem, ſub generali tantummodo determinatione ſupponi poteſt tanquam quærendum. Unde theorema convertere licet in problemata, quæ, ſub data in hypotheſi conditione, inveſtigari jubent, quod theſis continet. Ita theorema de æqualitate angulorum verticalium (§. 38) in hoc convertitur problema: Invenire rationem angulorum verticalium ex interſeſtione duarum linearum rectarum prodeuntium. Similiter theorema de congruentia triangulorum angulum æqualem cruribus æqualibus comprehenſum habentium (§. 40) in ſequens abit problema: Invenire rationem triangulo-

rum angulum unum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentium; & rationem, quam habent anguli duo reliqui unius ad duos reliquos alterius sigillatim; necnon latus tertium unius ad latus tertium alterius. Theorema arithmeticum, de quotis, ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultantibus, quantitatis divisæ proportionalibus (§. 47) in hoc problema transmutatur: Invenire rationem quotorum, qui prodeunt, si duæ quantitates per eandem tertiam dividuntur. Denique corollarium, quod, catheto uno trianguli rectanguli sumto pro basi, cathetus alter sit altitudo (§. 59) ad problema redigitur hoc modo: sumto catheto uno trianguli rectanguli pro basi; invenire, aut determinare altitudinem ipsius. Discere hinc licet, quomodo quod jam inventum est spectetur ut adhuc inveniendum, & instar problematis proponatur ad exercendam artem inveniendi. Sane omnia theoremata, non modo in Arithmetica atque Geometria, verum etiam in omni Mathesi reliqua, hoc modo ad problemata rediguntur, quæ tanquam inveniendum proponunt, quod jam cognitum est, dum exercitii gratia tanquam adhuc incognitum supponitur.

§. 68. Quodsi theoremata ad formam problematum fuerint reducta, quibus aliquid inveniendum proponitur; data a quæsitis sunt distinguenda. Quoniam in hac conver-

sione aut, si mavis, reductione; quæ in hypothesi continentur, sumuntur tanquam data; quod vero in thesi continetur, sub determinatione quadam generali, exhibet quæsitum; data & quæsitæ eodem prorsus modo a se invicem distinguuntur, quo superius thesin ab hypothesi separavimus. Ita, in exemplo primo angulorum verticalium, dari supponimus duas lineas sese mutuo interfecantes, ex quarum intersectione necessario oriuntur anguli verticales; quæritur autem, quænam sit horum angulorum ratio ad se invicem. In thesi theorematis, determinatur ratio, quæ inter eos intercedit, nimirum quod sit ratio æqualitatis. Ast hic qualis ea sit, ignotum supponitur & investigari jubetur. In exemplo secundo de congruentia triangulorum, datur in duobus triangulis ratio, quam habet angulus unus unius a ad unum alterius A , ratio crurum $a b$ ad AB & $a c$ ad AC , nempe quod ubivis sit ratio æqualitatis, seu $a=A$, $ab=AB$ & $ac=AC$: quæritur autem ratio lateris tertii ab ad AB , anguli b ad B , anguli c ad C & totius trianguli $ac b$ ad totum ACB . Immo quæri etiam potest, utrum triangulum $ac b$ sit simile, an dissimile triangulo ACB . In thesi theorematis, denuo determinatur ratio horum omnium ad se invicem, qualis sit; scilicet quod sit ratio æqualitatis, seu $bc=BC$, $b=B$, $c=C$ & $\triangle ac b = \triangle ACB$. Hic vero

Tab. I.

Fig. 6.

vero eadem tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. In exemplo tertio, quod arithmeticum est, dantur duæ quantitates, datur quantitas tertia, per quam istæ dividendæ, ut duo prodeant quoti; quæritur ratio, quam habent quoti hi ad se invicem. In thesi theorematis eadem determinatur, nimirum quod eadem sit cum ratione quantitatum divisarum; sed hic tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. Denique in exemplo quarto, datur species trianguli MKL, nimirum quod sit rectangulum, datur etiam basis, scilicet quod ea sit cathetus KL; determinari jubetur altitudo. In theoremate seu corollario, quod in problema conversum fuit, altitudo determinatur, nimirum quod ea sit cathetus alter MK: hic vero demum quæritur. Videmus adeo, quomodo data a quæsitis distinguantur.

§. 69. Enimvero non sine ratione data a quæsitis discernuntur. Cum enim id, quod quæritur, per ea quæ dantur, determinetur; ex datis ratiocinando colligendum est quæsitum. Facimus hoc, dum demonstrationem nostro more resolvimus; neque enim in omni ratiocinatione supponitur tanquam cognitum, quod inde tandem colligitur, quando ratiocinatio finitur. Quamobrem patet, ad inveniendum quod quæritur, non aliud requiri, quam ut modo præscripto ratiocinemur. Nostræ igitur reso-

lutiones demonstrationum totæ analyticae sunt; ostendentes modum, quo ex datis colligitur quæsitum, seu ratiocinando pervenitur ad id, quod investigandum erat. Eadem adeo non minus ad tertium cognitionis gradum ducunt, quam ad secundum: id quod non obtinet, ubi communi more demonstrationes expendantur (§. 64). Insigne hic patet discrimen, quod inter nostras demonstrationum resolutiones, & communem eas expendendi modum intercedit; tanti æstimandum, quanto præstantior est gradus cognitionis tertius, quam secundus. Velim huc animum advertant illi, quibus nostræ demonstrationum resolutiones superfluæ, aut prorsus pueriles videntur. Quodsi exemplum Mathematicorum præclarorum obvertere volueris, qui ad artem eximia inveniendi pervenerunt absque ista demonstrationum resolutione; hoc parum nos movebit. Objectionem enim esse nullam capite sequente ostendemus. Absit itaque ut hoc exemplo ab ista, quam commendavimus, demonstrationum resolutione te deterri patiari.

§. 70. Ex iis, quæ diximus & per anteriora satis manifesta sunt, liquet, quantum fallantur, qui sibi aliisque persuadere conantur, quod demonstrationes syntheticae, quales sunt EUCLIDIS, atque Geometrarum veterum, non simul sint analyticae; consequenter veritates eodem modo

modo ab ipsis reperiri non potuerint, quo demonstrantur. Etenim, si ex assumtis legitime ratiocineris, quemadmodum fieri debere ex principiis Psychologiæ empiricæ demonstrari potest; eodem prorsus modo colligitur quod ignotum est, & ad investigandum proponitur, quo, quod jam notum est, demonstratur. Deditur fidem oculatam, quæ in suspicionem adduci minime potest. Memini me olim, cum in Academia Lipsiensi Mathesin atque Philosophiam docerem, antequam ad Professionem Mathematicam in Academia Halensi vocarer, Artem invenienti juxta regulas Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* explicatam, per exempla exerciturus, Geometriam elementarem ea methodo pertractasse, ut theoremata ad problemata revocarem, & quomodo ex assumtis in hypothesi, tanquam datis, eruatur quod in thesi continetur, tanquam quæsitum, ostenderem, ipsaque problemata tanquam nondum soluta, sed adhuc solvenda proponerem, idemque imitarer in Arithmetica. Unde contigit in Elementis Germanicis Arithmeticam practicam a me pertractari methodo vere analytica; ut ex unica notione numeri rationalis, qui juxta definitionem EUCLIDIS, sistitur tanquam unitatum multitudo, nimirum, juxta methodum geneticam, tanquam ortus ex continua unitatis additione, integram Arithmeticam practicam

deduxerim, tyronum captui accommodato modo: quod tantisper attentifacile animadvertent; iis autem satis superque perspectum est, qui me eandem explicantem audiverunt. Deditur etiam hinc inde specimina quædam in his ipsis Elementis Latinis, veluti ubi de extractione radicis, & numeris æque-differentibus agitur.

§. 71. Ex resolutione demonstrationum præscripto modo facta, præterea videre est, singula ratiocinia, quibus colligitur quod demonstrandum erat, aut, ubi theorema in problema mutatur, quod investigandum fuerat, supponere aliquam definitionem, vel propositionem jam cognitam, quæ, vel ope ejus quod assumitur, seu datur, vel auxilio conclusionum jam elicitarum, in memoriam revocatur. Pater etiam ne unicum quidem ratiocinium abesse posse, siquidem ex assumtis inferendum, quod demonstrandum, vel ex datis deducendum, quod investigandum erat. Et si enim non omnes ratiocinia distincte expendant; in confusis tamen ipsorum notionibus, quæ animo obversantur, actu continentur. Quælibet adeo veritas latens, ubi in apicum producenda, certas veritates cognititas supponit, quarum si vel una ignoratur, ut quæsitam invenias fieri nequit. Quo plures igitur veritates, hoc est, definitiones & propositiones, tibi perspectæ fuerint, eo plures quoque invenire poteris; cum abun-

abundes principiis, quibus ad ratiocinandum indiges, ex datis inventurus quæsitum. Quamobrem dum secundo cognitionis gradui acquirendo studes, ad tertium quoque acquirendum te preparas, immo aptum reddis. Qui inoffenso pede, in detegenda veritate latente ex iis quæ dantur, progredi voluerit; ei principia, quibus ad ratiocinandum opus habet, familiaria esse debent; ut ea, veluti sponte sua memoriam subeant, quoties eorum usus requiritur. Definitiones itaque, & propositiones, in quarum etiam numerum referuntur resolutiones problematum, cum eò quod fieri jubetur in theorema conversæ, memoriæ firmiter infingendæ sunt ei, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut multus esse debeas in acquirendo gradu primo, antequam ad tertium properes; nisi quod expediat ea, quæ demonstrationum vi tanquam vera affecutus es, tanquam invenienda tibi proponi (§. 67): ita enim tanto facilius & absque ulla molestia, immo potius cum insigni voluptate, memoriæ mandabis, quæ eidem firmiter inhærere debent, ac una cum gradu secundo tertium acquires.

§. 72. Demonstrationes etiam mechanicæ ad tertium cognitionis gradum ducunt; quatenus tentando manifestant incognitum (§. 32): quibus cum æquipollegant exempla in numeris (§. 35), horum etiam usus est in tertio cognitionis gradu

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

comparando. Quoniam tamen demonstrationes mechanicæ, perinde ac exempla (§. cit.), veritatem conspiciendam non præbent, nisi in casu singulari, aut ad summum in particulari (§. 33); in iis non acquiescendum, ne cum periculo errandi a singulari ad universale argumenteris. Quamobrem propositio in casu singulari, vel particulari, detecta sumi debet tanquam universalis, & in problema convertenda; ac deinde inquirendum, num, ex datis legitime ratiocinando, universaliter erui possit, quod in casu singulari, vel particulari, verum cognovisti. Ita constat olim PYTHAGORAM animadvertisse, si quadratum numeri 3, quod est 9, addatur quadrato numeri 4, quod est 16, summam 25 exhibere quadratum numeri 5. Quamobrem cum perpenderet, si latus unum trianguli rectanguli fiat trium, alterum vero quatuor partium, hypothenusam esse partium quinque; consequenter quadratum hypothenusæ æquale esse quadratis reliquorum laterum; suspicio ipsi enata est, num hæc sit proprietas trianguli rectanguli, ut quadratum hypothenusæ sit æquale quadratis laterum simul sumtis. Non disiteor levem admodum hanc esse suspensionem, si secundum regulas probabilitatis æstimetur; sed levis etiam suspicio ad investigandum verum invitat. Quamobrem ubi super trianguli rectanguli lateribus fuere constructa quadrata, superacceden-

cedente præparatione ad comparationem quadrati hypotenusæ cum quadratis reliquorum laterum requisita, eo modo detegi poterat veritas, quo theorema istud demonstravimus (§. 417 *Geom.*). Dico veritatem theorematum hoc modo detegi potuisse: cum enim constet, ipsum non uno modo demonstrari posse, & demonstrationem unamquamque, nostro more resolutam, monstrare modum ad veritatem liquidam perveniendi (§. 70), non una patebat ad eandem via. Demonstrationes itaque mechanicæ, si tanquam artificium heuristicum adhibeantur, haud raro faciunt, ut de problemate quodam cogites, cujus cogitatio alias animum non subiret.

Tab. I.
Fig. 9.
§. 73. Exempla, quæ in superioribus dedimus, dicta confirmant. Ita si ducas lineas AB & CD se mutuo secantes in E, ut prodeant anguli verticales ϕ & χ ; ac, vi demonstrationis mechanicæ, eorum æqualitatem deprehendas (§. 32); ubi porro sumis æqualitatem angulorum verticalium tanquam universaliter veram, & hoc theorema in problema convertis (§. 67), eodem modo eruetur veritas in omni casu, quo theorema hoc demonstrandum esse ostendimus (§. 38, 70). Similiter si construas triangulum quodcunque ACB, & deinde alterum acb , ea conditione, ut fiat $ab = AB$, angulus $a = A$, & $ac = AC$; atque triangulo acb exciso ex charta, in qua

delineatum fuerat, ita ponas super altero ACB, ut punctum a in A, & latus ab in AB cadat; atque videas, triangulum acb esse alteri ACB æquale, & esse præterea $bc = BC$, $c = C$, atque $b = B$; ubi hoc sumis tanquam universaliter verum, & theorema in problema convertis (§. 67), eodem prorsus modo ratiocinando assequeris, quod quæritur, quo theorema demonstrandum esse supra præcepimus (§. 41, 70). Me tacente patebit, quomodo eadem valeant de exemplo, quod in numeris exhibet theorema, de quotis, ex divisione duorum numerorum per eundem tertium resultantibus, numeris divisim proportionalibus; ut plura eam in rem dici non sit opus. Obiter observo, demonstrationem mechanicam de congruentia triangulorum, ubi ad notionem congruentiæ animum advertis, simul insinuare principia, quibus opus est ad ratiocinandum, sive in demonstratione synthetica, sive in investigatione ejus, quod quæritur; ut adeo idea confusa, quæ oculis obversatur, integram demonstrationem contineat, ab ea abstrahendam, si ad notionem distinctam revocetur. Immo notionem theoremati respondentem esse universalem agnoscimus, si in rationem coincidentiae eorum, quæ in triangulis discernuntur, inquirimus; quatenus patet eandem rationem redire in quolibet casu. Coincidit hic demonstratio mechanica cum exemplis, quibus universaliter

saliter repræsentavimus numerorum quadratorum & cubicorum genesin (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*). Ex. gr. in exemplo numerico, 16 quadratum numeri 4, quæ est pars secunda radicis, prodit, quia 4 ducitur in seipsum (§. 246 *Arithm.*). Idem vero cum fiat in quocunque exemplo alio, eadem quoque semper adest ratio, cur quadratum partis secundæ prodire debeat. Similiter in exemplo geometrico, punctum *b* cadit in *B*, quia *a* ponitur super *A*, & *ab* super *AB*, estque $ab = AB$. Singula vero cum eodem modo sese habeant in exemplo quocunque alio, eadem semper adest ratio, cur punctum *b* in *B* cadere debeat. Principium nimirum ontologicum est, quod posita ratione sufficiente ponatur etiam id, quod propter eam potius est quam non est (§. 118 *Ontol.*): quod principium in Arte inveniendi multum habet usum.

§. 74. Constat ex superioribus (§. 40), hypothesein solam non semper sufficere, ut inde colligatur, quod erat demonstrandum; sed præterea accedere debere præparationem, qua superadduntur iis, quæ in hypothesei sumuntur, adhuc alia, eadem non invita sumenda, ut ex sumtis colligi possit, quod thesis continet. Quoniam theorematibus in problemata conversis, quibus investigandum proponitur, quod thesis insinuat (§. 67); ratiocinatio, ex assumtis tanquam datis, eodem modo

cedit ad colligendum quæsitum, quo, in resolutione demonstrationis præscripto modo facta, colligitur quod demonstrandum erat (§. 70); facile intelligitur, præparatione eadem non minus opus esse in veritate investiganda, quam in jam inventa demonstranda. Quando præparatione opus sit, quivis animadvertit; nimirum, quando animum advertens ad assumpta, deprehendit deesse principia, quorum vi ex iis elicitur conclusio una, vel plures eliciuntur, prout casus tulerit. Hic itaque dispiciendum, præter ea quæ hypothesis continet tanquam determinantia id quod thesi continetur, sumi adhuc possint alia istis minime repugnantia; quibus accedentibus, hypothesis apta efficitur ad conclusiones, vi principiorum anteriorum, inde inferendas. In demonstrationibus præparatio ista non demum quærenda; sed Autor, qui theorema demonstrat, eam supeditat. Ast ubi theorema per modum problematis proponitur; præparatio non tanquam cognita spectari potest, sed adhuc incognita supponitur; non tanquam jam inventa consideranda venit, sed tanquam quærenda spectatur. Ad tertium igitur cognitionis gradum adspirans inquirere tenetur, quomodo præparatio innotescere potuerit. In exemplo de triangulis, angulum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentibus, constat, datis cruribus cum angulo intercepto, construi posse

triangulum; consequenter per crura data & angulum interceptum datum triangulum, non minus integrum, quam latus ejus tertium, eidemque adjacentes duos angulos reliquos determinari; adeoque in hypothesi nihil eorum deficere, quæ assumenda sunt, ut inde colligi queant, quæ per ea determinantur. Quoniam vero quaritur triangulorum ratio, ratio lateris tertii unius ad tertium alterius, & ratio angulorum ad ideam adjacentium in uno ad angulos eidem adjacentes in altero sigillatim; ratio vero omnis vel æqualitatis vel inæqualitatis est (§. 130 *Arith.*); per modum hypotheseos tantisper sumitur, rationem æqualitatis hic obtineri. Hæc hypothesis cum examinanda sit, utrum veritati consentanea sit, nec ne; quaritur quomodo æqualitas innotescat. Quamobrem, cum, juxta notionem communem, æqualitas æstimetur ex congruentia, notio congruentiæ insinuat triangulum unum super altero poni debere. Atque adeo in præparationem incidimus. Vides adeo, quomodo notiones communes insinuare queant præparationem: id quod tamen non semper procedit, cum non omnia ex notionibus communibus immediate deduci possint.

§. 75. Quoniam tamen, per naturam animæ impossibile est, ut quicquam nobis in mentum veniat, nisi quatenus antea cognita, beneficio eorum quæ nunc cogitamus, vel in

memoriam revocantur, vel ratiocinationem ingrediuntur; quæ ex notionibus communibus immediate deduci nequeunt, ex aliis utique notionibus derivanda. Quamobrem ut hoc appareat, sumamus exemplum alterum, quo usi sumus in superioribus (§. 54) in demonstratione problematis, de invenienda media proportionali inter duas rectas datas, in hoc theorema conversi: Si ex quocunque puncto diametri excitetur perpendicularis peripheriæ circuli occurrens, erit ea inter segmenta diametri perpendicularis. Patet hic demonstrandam esse proportionem linearum AB, BD & BE ex eo, quod BD sit ad AE perpendicularis & ADE semicirculus. Quamobrem cum constet, triangula similia habere latera æqualibus angulis opposita proportionalia; consequenter linearum proportionem ex triangulorum similitudine colligi posse; ideo liquet, dispiciendum esse, annon lineis quibusdam ductis, ut prodeant triangula, obtineri possint triangula similia. Ducuntur itaque subtensæ arcuum AD & DE; quia sic prodeunt triangula ADB, ADE & DBE, quæ, per modum hypotheseos, sumuntur tanquam similia; ab eo qui veritatem demum investigat; & deinde experimur, num eorum similitudo demonstrari possit; consequenter num hæc bene sumta fuerit. Quodsi modum, quo in hanc præparationem incidis, distincte perpendis; evidens est, id quod demonstrans

Tab. II.
Fig. 10.

strandum est ad animum revocare similitudinem triangulorum, cujus notionem antea tibi acquisivisti; & ex hypothesi theorematis patet, ductis rectis AD & DE, obtineri triangu-
la, quæ utrū similia sint, nec ne, angulos eorum inter se conferenti innotescit; cum ex anterioribus constet, triangulorum similitudinem ab æqualitate angulorum pendere; consequenter per eandem probari. Nimirum in inveniendi conjecturis locus est; ubi ex iis, quæ dantur, vi principiorum tibi perspectorum, ratiocinando colligi nequit quod quaeritur; quemadmodum in demonstranda æqualitate angulorum verticalium succedit (§. 38). Cum vero conjectando, nonnisi casu, prima statim vice incidamus in veritatem; ideo haud raro variis modis tentanda est præparatio, antequam in eam incidas, quæ recta est: id quod satis experiuntur, qui veritati proprio Marte eruendæ operam navant. Enimvero de iis hic dicere disertius, quæ ad Artem inveniendi spectant, nostri non est instituti, ubi tantummodi docemus, quomodo ad præparationem pervenire potuerint, qui bene positam retinuerunt. Bene autem positas esse eas, quæ in demonstrationibus adhibentur, ipse successus in demonstrando probat. Non tamen existimandum est, quasi earundem inventores prima statim vice in eas inciderint, quemadmodum exemplum modo datum insinuare videtur; sed

potius tenendum, tentatis haud raro pluribus sine successu, eam retentam fuisse, quam successus approbabat. Sed talia, suo tempore, demonstraturi sumus a priori, ex ipsa animæ natura, in Arte inveniendi; si quidem Deo visum fuerit corporis animique vires eo usque conservare, donec ad hanc telam pertexendam ordo nos deducet.

§. 76. Hic non aliud agendum est, quam ut ostendamus, quomodo inquiramus in modum, quo ad præparationes in Elementis nostris. occurrentes perveniri licuerit; reddendo rationem, cur hoc modo fiat, tum ex conditione propositionis demonstrandæ, tum ex anterioribus, quæ tanquam cognita & nobis familiaria supponuntur. Quodsi ergo, ad imitationem eorum quæ, exempli loco, in medium attulimus (§. 74, 75), præparationes omnes in Elementis nostris expendere libuerit; nulli dubitamus lucem affulsuram sufficientem iis, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Quibus vero in secundo acquiescere visum est, illi hac disquisitione non habent opus, huicque labori supersedere possunt ac debent. Sufficit enim iis præparatione, prouti præscribitur, ad hypothesin accedente, demonstrationem legitime procedere, qua animus convincitur verum esse, quod erat demonstrandum.

§. 77. Illud adhuc superest, ut doceamus, quomodo procedendum sit, si resolutionem problematis suppo-

Tab. I.
Fig. 7.

nis tanquam incognitam, adeoque eandem consideras tanquam invenendam. Ex hac enim hypothefi, perinde ac in theorematibus, vi anteriorum ratiocinando, colligendum, quid fieri debeat, ut facias, quod erat faciendum. Sumamus exempli loco problema de linea recta per datum punctum alteri rectae parallela ducenda. Supponamus factum, quod petebatur; nimirum rectam MN, quae per datum punctum V transit, alteri RS, quae data supponitur, esse parallelam. Quod si hoc sumis; ex anterioribus succurrit: perpendiculara inter duas parallelas intercepta aequalia esse (§. 226 *Geom.*). Unde infertur: duo quaecunque perpendiculara inter rectas MN & RS aequalia sunt. Porro constat, quod V sit punctum extra lineam RS datum. Huc animum advertenti succurrit (§. 216 *Geom.*), a dato puncto extra lineam datam perpendicularem demitti posse. Unde infertur, posse quoque ex puncto V ad rectam RS demitti perpendicularem, nempe VK. Succurrit porro, ubi perpendis duas requiri lineas perpendiculares inter rectas MN & RS, ut per earum aequalitatem pateat parallelismus ipsarum, per demonstrata, ex quovis puncto intra rectam datam assumpto erigi posse perpendicularem (§. 212 *Geom.*). Unde denuo infertur, ex puncto quocunque lineae RS, veluti T, erigi posse perpendicularem TA. Jam, quia MN supponitur ipsi RS

parallela, & VK atque TA sunt perpendiculara inter haec parallelas intercepta, adeoque aequalia, per demonstrata; resolutio, quae quaerebatur, jam patet. Nimirum 1^o. ex puncto dato V demittenda est perpendicularis VK ad rectam RS: 2^o. ex puncto quolibet T erigenda est perpendicularis TA priori aequalis: 3^o. per duo puncta A & V ducenda est recta MN. Haec ipsa est resolutio, quae in Elementis nostris legitur (§. 258 *Geom.*).

§. 78. Patet autem, si hoc modo in resolutionem problematis inquiris; hinc simul modum problema in theorema conversum demonstrandi manifestum esse. In ea enim investiganda uteris principiis, quibus in demonstrando habes opus: id quod ex collatione eorum, quae modo dicta sunt, cum resolutione demonstrationis superius facta (§. 52) patet. Demonstrationes nimirum, una cum resolutione, una eademque opera deteguntur; ut adeo non opus sit, nisi ut, ubi synthetice proponere volueris quae invenisti, ea, quae faciunt ad resolutionem, separes a ceteris, quae ad demonstrationem spectant. Subinde tamen etiam in Elementis nostris resolutionem & demonstrationem una exhibuimus; quemadmodum in hoc ipso casu factum, quem exempli loco produximus; & in aliis, ubi prolixior est demonstratio, veluti in problematis de extrahenda radice quadrata & cubica (§. 269, 282. *Arithm.*).

§. 79.

Tab. I.
Fig. 12.

§. 79. Demus adhuc exemplum aliud. Supponatur itaque resolutio problematis 16 (§. 212 *Geom.*) de linea perpendiculari, ex dato in recta data puncto, excitanda. Data sit recta ML, & in eo detur punctum G; ex hoc puncto G ducenda est linea, quæ sit ad rectam ML perpendicularis. Ponatur factum, quod petebatur, nempe ducta perpendicularis GI. Succurrit ex anterioribus: Si linea recta ducenda, duo dari debent puncta, ex quorum uno ad alterum ducitur recta (§. 121 *Geom.*). Unde infertur: Præter punctum G, quod datur, determinandum esse adhuc punctum aliud I, ut recta GI duci possit. Liquet igitur, totum negotium in eo versari, ut punctum I determinetur. Ponamus denuo hoc esse factum. Sumitur itaque: Recta ex puncto I ad punctum G ducta perpendicularis est. Succurrit principium: Si recta quædam fuerit ad alteram perpendicularis, anguli deinceps positi æquales sunt (§. 79 *Geom.*). Unde infertur: Anguli MGI & IGL æquales sunt. Sumatur IG pro crure triangulorum contiguum communi. Patet triangula ista habere angulum unum æqualem &, crus unum ejus esse æquale, nempe idem. Succurrit ex anterioribus principium (§. 179 *Geom.*): Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem duobus cruribus sigillatim æqualibus comprehensum, etiam latus tertium unius æquale erit lateri tertio alterius. At-

que hinc infertur: Si præterea fiat $GK=GH$, erit etiam $KI=HI$. Atque adeo liquet, si fiat $GK=GH$, hoc est, si ex puncto H capiatur utrinque æquale intervallum, ex punctis K & H eodem intervallo quocunque alio (cum hic longitudinis GI nulla habenda sit ratio, sed tantummodo situs ad rectam ML) per intersectionem determinari posse punctum I, quod quærebatur, ut recta IG duci possit. Denuo manifestum est, resolutionem problematis analyticam simul continere & ejus demonstrationem. Quodsi unam ab altera separes, utraque prodibit, qualis in Elementis nostris extat. Obiter monco, inter principia heuristica in Geometrica referendum esse, ut dispiciamus, num triangula congruentia & similia determinari possint, quorum ope procedat ratiocinatio ad investigandum quod quæritur, vel demonstrandum quod asseritur requisita. Quomodo in hoc principium inciderint Geometræ, nostrum jam non est disquirere. Erit alibi de eo dicendi locus.

§. 80. Subinde resolutiones problematum innotescunt sola attentione ad theoremata inventa, ad quas nulla patet via, si hæc tanquam incognita supponuntur. Istiusmodi est problema de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Etenim si supponimus lineam BD esse inventam, quæ inter duas datas AB & BE media proportionalis est, succurrit

Tab. I.
Fig. 10.

currit tantummodo vi definitionis (§. 155. *Arithm.*): Si fuerint tres lineæ continue proportionales, erit prima ad secundam, ut secunda ad tertiam. Atque hinc infertur: Recta data AB est ad inveniendam BD ut hæc ipsa BD ad alteram datam BE. Et si hic ad similitudinem triangulorum tanquam principium heuristicum confugas; & sumas BD esse crus commune duorum triangulorum similium ABD & BDE, videasque, si BD fuerit ad AE perpendicularis, angulum x angulo y æqualem construi debere, quod etiam fieri posse constat (§. 208 *Geom.*); quoniam tamen BD determinata magnitudinis est, non constat, quantus fieri debeat angulus x , ut recta AD attingat punctum D, quod quæritur, atque ita determinandum, ut crus anguli x secet AE in puncto E. Nihil itaque conficies, nisi supponas theorema tanquam cognitum: Si ex puncto quocunque B diametri AE erigatur perpendicularis peripheriæ in puncto D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & EB media proportionalis. Ubi vero hoc theorema tanquam notum sumitur, resolutio problematis, de inveniendâ rectâ inter duas alias datas media proportionali, sua quasi sponte sese offert. Etenim non multa attentione opus est, ut animadvertas rectas datas AB & BE in eandem rectam transferri, & super eadem semicirculum describi posse; infertur vi corollarii theoremat

primi (§. 136 *Geom.*). Neque ullum est dubium, quin inventori resolutionis hujus problematis ante innotuerit theorema istud, quam de resolutione cogitaret. Non est quod excipias, nos theorema istud non præmisisse in Elementis nostris problemati huic. Etenim si ita visum fuisset, præmitti poterat: sed in synthesi non necessarium erat. Dum enim demonstranda est resolutio, problema in istud theorema convertitur, atque demonstratio ejus adjicitur, quemadmodum ex superioribus constat (§. 54, 55). Non nego fieri quoque potuisse, ut resolutio eadem deduceretur ex aliqua proprietate trianguli rectanguli, scilicet ex hoc theoremate: Si ex angulo recto D trianguli rectanguli ADE demittatur ad hypotenusam AE perpendicularis DB; erit hæc ipsa DB media proportionalis inter hypotenusæ AE segmenta AB & BE. Quod si enim supponas tanquam notum; quomodo super data hypotenusa construi possit triangulum rectangulum: resolutio problematis nostri non minus in aprico est. Plures haud raro patent viæ ad eandem veritatem, & prouti vel hæc, vel alia principia, tanquam cognita supponuntur, unus hanc, alius aliam calcât viam. Mihi tamen probabilius est, ex proprietate circuli potius, quam trianguli rectanguli, resolutionem de qua nobis sermo est fuisse deductam. Enimvero non opus est, ut ea
de

de re contentionis ferram cum aliis reciproce. Ubi enim veritates tanquam quærendæ proponuntur, quæ jam inventæ sunt, sufficit ingredi viam, qua recto facultatum cognoscendi usu ad eas pervenire datur.

§. 81. Dantur integræ disciplinæ mathematicæ, quas inter Algebra eminet, aut, si mavis, Analysis mathematica, quibus docetur, quomodo veritates mathematicæ sint inveniendæ. Nemo non intelligit, ad tertium gradum cognitionis mathematicæ adspiranti inprimis opus esse, ut in iis addiscendis assiduus sit. Enimvero ea de re nobis demum dicendum erit, ubi ad specialia descendemus. Hic enim nonnisi generalia tradimus, quæ in qualibet Matheseos parte observanda sunt; etsi tantummodo exempla ex Arithmetica & Geometria dederimus.

§. 82. Restat denique ut adhuc dicamus, quomodo definitiones expendere debeat, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat. Facile apparet, inquirendum hic quoque esse, quomodo definitiones fuerint detectæ, aut inveniri saltem potuerint. Quamobrem id nobis agendum est, ut ostendamus, quomodo hæc inquisitio sit instituenda. Definitiones esse duplices, nominales, & reales, in Commentatione de methodo mathematica monuimus (§. 17, 18); ubi etiam docuimus, quomodo tum ad

nominales (§. 19 & seqq.), tum ad reales perveniatur (§. 25 & seqq.). Juxta regulas igitur ibidem traditas definitiones ad examen revocandæ: quod quomodo fiat, uno alteroque exemplo docendum.

§. 83. *Congruentia* definitur, quod sit coincidentia terminorum, & *congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Definitio hæc explicat, unde congruentiam agnoscere possis in duabus magnitudinibus, veluti in duabus lineis, vel superficiebus. Quamobrem cum definitio nominalis sit, cujus beneficio res agnoscitur, & ab aliis distinguitur (§. 17 *Comment. de Meth.*); definitionem hanc nominalem esse hinc colligitur. Primus modus perveniendi ad definitiones nominales consistit in eo, ut ad rem præsentem quam percipimus animum attendamus, & cum cura distinguamus quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim consideremus, mox vero eadem inter se conferamus. Quodsi inquiramus, utrum hoc modo definitio congruentiæ inveniri potuerit, nec ne; hoc modo eam detectam esse deprehendes. Sumantur, ex. gr. duo fila ejusdem longitudinis coëxtensa, dicuntur ea sibi mutuo congruere. Quodsi quæriveris, cur sibi mutuo congruere dicantur; non aliam reddere potes rationem, quam quod ab eodem termino incipiant, & in eodem desinant;

seu quod extrema eorum coincident, ipsaque etiam coincident quoad longitudinem. Atque adeo patet, ex lege ratiocinandi (§. 349 *Log.*), coincidentiam terminorum hic dici congruentiam. Similiter notio lineæ rectæ abstrahitur a filo extenso, cujus crassities, cum diminui posse concipiat in infinitum, donec tandem evanescat, a notione confusa ejus abstrahitur notio lineæ in genere, quod sit longitudo latitudinis expers; quæ est definitio *Lineæ* in genere, quam dedit EUCLIDES. Quod si jam notionem rectæ confusam ad distinctam revocare volueris, distinguenda in ea sunt, quæ distinguì possunt; eaque fini singula primum sigillatim considerari, & mox inter se conferri debent (§. 19 *Meth.*). Cum in linea non concipiantur nisi puncta, quæ a se invicem distinguì possunt, & situs eorundem, quem ad se invicem habent; recta a curva differre nequit, nisi situ punctorum quæ in ea assumuntur. Advertit hoc EUCLIDES: unde *Rectam* definit, quod sit linea ex æquo interjacens inter sua extrema. Enimvero cum huic punctorum situi nulla respondeat notio, nisi confusa, quam verbis ex æquo interjacere inter sua extrema indigitat, eadem nempe cum notione confusa lineæ rectæ; nihil explicuit, nec definitione sua uti potuit. Nos igitur assumentes partem quamcunque rectæ AC, eamque conferentes cum tota AB, inquisivimus, num

Tab. I.
Fig. 13.

quid in situ punctorum, quæ in parte assumuntur, deprehendi possit, quod diversum sit a situ punctorum in toto assumptorum. Ubi nullam diversitatem reperiri posse deprehendimus; memores definitionis similitudinis (§. 24 *Arith.*), *Rectam* definivimus per lineam, cujus pars quæcunque toti similis. Nimirum, vi illius definitionis; in parte ad totam collata, præter magnitudinem nihil observare datur, quo ea a tota distinguì possit. Quamobrem cum Linea curva sit, quæ recta non est; eademque, supposita definitione rectæ, hoc modo definiri poterat (*not.* §. 85 *Ont.*); nos in definitionem nostram *Lineæ curvæ* incidimus, quod nimirum sit linea, cujus partes toti dissimiles (§. 22 *Geom.*). Ita si assumes Tab. I.
Fig. 14.
duos peripheriæ arcus quosunque AC & AB, ducasque chordas cognomines; situm puncti C ad A & B ad A distinguere licet per diversam rationem subtensarum ad diametrum; neque enim arcuum subtensarum omnes eandem ad diametrum rationem habent, ut adeo pars arcus ab arcu integro, hoc modo, distinguì possit. Tacemus modos alios distinguendi situm punctorum in parte; consequenter partem ipsam, a tota Geometriæ sublimioris gnari non ignorant hoc principio distinguere curvas a se invicem. Sed cum seniores Geometriæ in recta a curva distinguenda hæsitaverint; definitiones utriusque daturi; non opus est ut tyrones, in modo

modo quo eadem detectæ fuerunt inquirendo, industriam suam fatigent. Tum enim idem manifestus erit, ubi in Geometria curvarum fuerint verlati.

§. 84. Similiter videre licet ubi vis, lineam rectam cum altera in eodem puncto concurrentem, diversimode ad se invicem inclinari posse. Unde, non attenta inclinationis diversitate, enata est definitio *Anguli* in genere (§. 54 *Geom.*), quod scilicet sit duarum linearum in puncto uno concurrentium mutua inclinatio. Quodsi ergo recordatus, a puncto quovis ad punctum quodvis lineam rectam duci posse (§. 20 *Geom.*), crura anguli CAB recta CB jungi concipias; reflectendo super iis, quæ in figura, quæ sic prodit, distinguuntur; reperitur (§. 19 *Meth.*) definitio trianguli in genere, rectilinei scilicet; quoniam, in Geometria elementari, cum aliis nullum nobis est negotium, quod sit figura tribus lineis rectis terminata (§. 87 *Geom.*). Quodsi perpendis, in hac definitione non determinatam esse rationem laterum AB, BC & AC; & recordaris rationem omnem vel esse æqualitatis, vel inæqualitatis (§. 130 *Arith.*); addendo determinationem rationis laterum ad se invicem, nascuntur triangulorum species (§. 22 *Meth.*). Nimirum, si tria latera habeant ad se invicem rationem æqualitatis, seu omnia inter se æqualia sint; definitio præstest *Trianguli æquilateri* (§. 88. *Geom.*).

Si sumis eadem habere ad se invicem rationem inæqualitatis, hoc est, singula inæqualia esse; definitionem habes *Trianguli scaleni* (§. 90. *Geom.*). Denique si sumis latus unum habere ad unum reliquorum rationem æqualitatis, ad alterum vero rationem inæqualitatis, seu duo nonnisi latera æqualia esse; in definitionem *Trianguli æquicruri* incidis.

§. 85. A definitione trianguli æquilateri, quod tria latera æqualia habet, abstrahitur definitio *Figura æquilatera* in genere, ommissa determinatione numeri laterum (§. 20 *Meth.*); quod scilicet sit figura, cujus latera singula inter se æqualia sunt (§. 88 *Geom.*). Atque adeo satis patet, quomodo, ope regularum in Commentatione de Methodo mathematica explicatarum, detectæ fuerint, aut saltem detegi possint, definitiones nominales Geometriæ, immo in qualibet Matheseos parte. Idem enim quoque succedere in definitionibus aliis experietur, qui tentare voluerit.

§. 86. Sufficiant igitur hæc dixisse de definitionibus nominalibus: restat ut nonnulla addamus de realibus. Ex. gr. lineam quandam rectam LM, juxta ductum alterius rectæ LO, motu sibi semper parallelo, hoc est, ut in quolibet situ semper parallela sit, deorsum moveri posse constat. Quamobrem, si hoc fieri sumis; prodit definitio *parallelogrammi* in genere. Similiter rectam quandam AC, circa punctum fixum C, in gy-

Tab. I. rum agi posse; donec redeat ad ter-
Fig. 15. minum A, unde digressa fuerat, per
se liquet, & per notiones communes
confirmatur. Quodsi ergo hoc su-
mis; prodit definitio *Circuli* realis
(§. 25 *Meth.*).

§. 87. Eadem definitiones repe-
riri quoque potuerunt, præsuppositis
definitionibus nominalibus. Paralle-
logrammi definitio nominalis est,
quod sit figura quadrilatera, cujus
latera opposita sunt parallela (§. 102
Tab. I. *Geom.*). Quodsi concipias rectam
Fig. 3. LM juxta ductum alterius rectæ mo-
veri deorsum; patet figuram descri-
bi quadrilateram. Quodsi linea po-
natur sibi semper manere parallela;
liquet latus ON opposito LM esse
parallelum, & rectas quascunque pa-
rallelas inter latera OL & MN inter-
ceptas esse æquales. Enimvero si li-
near parallela æquales intra easdem
lineas comprehendantur, erunt quo-
que hæ inter se parallela (§. 257
Geom.). Unde inferitur, Latus quo-
que MN esse opposito LO paralle-
lum. Evidens adeo est, figuram,
quæ describitur, motu linear rectæ
LM, juxta ductum alterius rectæ LO,
sibi semper parallelo, esse quadrilate-
ram & habere latera opposita paral-
lela. Atque sic liquet, figuram hoc
modo descriptam esse, vi definitio-
nis nominalis, parallelogrammum.
Nimirum, si definitio nominalis pa-
rallelogrammi sumitur; parallelo-
grammum dici nequit nisi figura, quæ
& quadrilatera est, & latera oppo-

sita æqualia habet. Quamobrem ubi
definitionem realem, hac supposita,
dare volueris; ita omnino concipien-
da, ut nominali non repugnet ista
genesis, sed ex genesi figuræ potius
demonstrari possit, nominalem defi-
nitionem eidem convenire. Quodsi
excipias, supponi hic, quæ demon-
stranda ante sunt, quam definitio-
nem realem ex nominali deducere
valeas, nimirum quod linear paral-
lela inter duas linear interceptæ
æquales esse debeant, ut hæ quoque
inter se sint parallela; objectio nulla
est. Ecquis enim dixerit, salva ve-
ritate, definitiones reales ex nomina-
libus deducendas esse, nulla theoria
præsupposita, quæ demonstranda an-
te venit. Quin potius ipsum exem-
plum, quod modo dedimus, con-
trarium loquitur. Definitiones no-
minales sumere licet, antequam theo-
remata demonstrantur. Sumere quo-
que licet reales, antequam demon-
strentur propositiones, modo genesis
intelligatur possibilis absque demon-
stratione; scilicet ut nihil fieri jubea-
tur, quod absque demonstratione
fieri posse non constet. Sed figu-
ram, quæ per genesis prodit, esse
eandem, cujus definitio nominalis
datur, utique demonstrandum. Quod-
si ergo demonstratio supponit princi-
pia, quæ absque demonstratione ve-
ra esse non perspicitur; illa utique
ante demonstranda sunt, quam figuram
genitam cum ea, cujus definitio nomi-
nalis datur, eandem esse ostendi potest.

Tab. I.
Fig. 15.

§. 88. Facilius ex definitione nominali detegitur realis *circuli*, non suppositis aliis, quæ de circulo demum demonstranda. Nominalis circuli definitio est, quod sit figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C ductæ rectæ sunt inter se æquales. Quodsi sumis, quod in hac definitione continetur, circulum terminari linea curva in se redeunte; atque succurrit, vi intentionis inveniendi genesin curvæ, seu detegendi motum, quo describitur, describi lineam, si punctum ab uno termino ad alterum moveatur (§. 10 *Geom.*); facile animadvertis, lineam, qua terminatur circulus, describi, si punctum describens continuo motu redeat ad terminum A, unde digressum fuerat. Quodsi porro sumis, vi definitionis nominalis, rectas ex singulis lineæ istius punctis ad centrum C ductas esse æquales; consequenter punctum describens A esse alterum extremum lineæ rectæ, cujus alterum extremum fixum hæret in centro C; patet, si punctum A a termino suo dimoveri debet, ut tamen alterum rectæ AC extremum in puncto C sit fixum; rectam AC circa punctum fixum C moveri debere. Vides itaque circulum describi, si recta quædam AC circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ ipsa

est circuli definitio realis deducta ex nominali, nulla præsupposita theoria circuli, sed tantummodo assumtis, quæ in definitione nominali continentur.

§. 89. Dn. DE TSCHIRNHAUSEN in *Medicina mentis* definitiones reales mirifice deprædicat, iisque omne tribuit pretium, nominalibus nullo relicto. Enimvero, quemadmodum vidimus, definitiones reales ex nominalibus deduci posse; ita vicissim nominales deducuntur ex realibus: id quod in circulo levi attentione animadvertitur. Exempla alia dedimus in solidis (§. 456 & seqq. *Geom.*). Etsi autem non negemus, ex definitionibus realibus haud raro facilius deduci, quæ ex nominalibus operosius demonstrantur, adeoque ad inveniendum eas esse admodum utiles; nominales tamen realibus præstant in rebus ad sua genera suasque species reducendis: id quod in demonstrationibus & in applicatione theoriæ ad casus obvios maxime usui est. Quamobrem definitiones nominales non sunt contemnendæ, immo certo sine realibus præferendæ, quæ ad res obvias agnoscendas & ab aliis distinguendas non adeo commodæ sunt, quam nominales; id quod ipsa circuli atque parallelogrammi definitione reali docetur.

CAPUT II.

De Modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa.

§. 90. **N**on omnes in addiscenda Mathesi eundem sibi scopum præfigunt. Postquam igitur in genere docuimus, quomodo Mathesis sit tractanda, ut eam consequaris cognitionem, quam intendis; nunc porro dispiciendum est, quoniam per Matheseos studium intendi possint fines, & quænam observanda sint ei, qui finem intentum consequi voluerit. Eminent inter hosce fines perfectio intellectus, quæ consistit in habitu rectum faciendi facultatum cognoscendi usum in veritate cognoscenda. Hunc finem intendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoscibilium adspirant, sive philosophari voluerint, sive Theologiæ, Jurisprudentiæ, ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de causa, veteres neminem ad Philosophiam addiscendam admittere voluerunt, nisi Geometriæ peritum; cum olim Geometria sola accurata methodo tradetur. Optandumque erat, ut idem mos in scholas nostras introduceretur. Rationes perspicientur ex iis, quæ mox tradituri sumus, & pertransennam prospiciuntur vi eorum quæ modo diximus. In veritate

enim cognoscenda, rectum facere tenetur facultatum usum, qui a veritatis tramite delectere noluerit.

§. 91. Tres sunt intellectus operationes, notio, iudicium, atque discursus, sive ratiocinium; & hisce suppetitas ferunt facultates cognoscendi inferiores, sensus, imaginatio, atque memoria, una cum facultatibus intermediis, attentione ac reflexione, per quas ab inferioribus ad superiorem fit transitus. Quæ omnia satis manifesta sunt ei, qui Psychologiam empiricam cognitam atque perspectam habet. Qui adeo intellectum perficere voluerit, is rectum operationum intellectus usum facere tenetur; ac in iis eliciendis uti debet facultatibus inferioribus atque intermediis. Quamobrem studio Matheseos perficitur intellectus; si eodem habitus operationibus intellectus recte utendi, & in iis eliciendis rectum facultatum cognoscendi inferiorum ac intermediarum usum faciendi acquiritur.

§. 92. Non igitur nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, sed accuratæ methodo, qua traduntur mathemata, fructus hic debetur. Ejus adeo participes non sunt, qui methodum accu-

cura-

curatam insuper habent. Quamobrem cum Mathesi, perficiendi intellectus causa, potissimum in scholas sit introducenda; parum adolescentibus & juvenibus consulunt, qui ut desidiis placeant, methodi nullam rationem habent, sibi magis, quam ipsis prospicientes.

§. 93. Qui in primo cognitionis gradu acquiescit, non alium finem sibi propositum habet, quam ut veritatem ab aliis propositam intelligat (§. 1); consequenter non aliud intendit, praterquam veritatum mathematicarum nudam cognitionem. Quoniam igitur nuda veritatum mathematicarum cognitione non perficitur intellectus (§. 92); nec fructus hujus particeps fieri potest, qui primum cognitionis gradum unice curæ cordique habet. Quod si ergo eum praxes quædam mathematicæ non juvant, veluti si agrimensorem, aut architectum militarem agere deceiverit, vel si principiorum mathematicorum usum non experitur in addiscendis aliis, ex. gr. in percipiendis dogmatis nonnullis physicis; Mathesin plerumque in spem futuræ oblivionis addiscit; ut studii hujus, quod multiplici ratione sese commendat cultoribus suis, nullum prorsus percipiat fructum. Unde facile intelligitur, quinam in addiscenda Mathesi oleum atque operam perdant; ut ab hoc studio potius sint arcendi, quam ad idem invitandi vanis pollicitationibus. Convenit ingenuitati docen-

tis; ne aliquid lucelli facturus, juvenes ab addiscendis iis, quæ magis profutura sunt, ad ea avocet, quæ in spem futuræ oblivionis addiscunt.

§. 94. Qui primo cognitionis gradui acquirendo cam operam navat, quam requisivimus; is attentionem ad ea, quæ discit, asserre ac tamdiu conservare adsucescit, donec illa rite intellexerit (§. 5). Quænam ad hoc requirantur, ut definitiones intelligat (§. 6 & seqq.), nec in propositionibus quicquam supersit obscuri (§. 17 & seqq.), perspicit. Definitionum accuratarum, & in disciplinis rite ordinandarum (§. 6), ac theorematum (§. 24, 25), & problematum, & resolutionis eorundem (§. 26 & seqq.) genuinæ formæ ideam exemplarem animo concipit. Differentiam inter notiones distinctas & confusas, adæquatas & inadæquatas penitus perspicit (§. 6, 9 & seqq. §. 24 & seqq.). Quomodo recto sensuum usu faciliteretur operatio intellectus addiscit (§. 7). Quo pacto repetitio faciliior minusque molesta reddatur, qua memoriæ insiguntur firmiter eadem retinenda, cognoscit (§. 15). Nemo non agnoscit, ad perfectionem intellectus pertinere; ut formet notiones distinctas & adæquatas cognoscibilia; ut judicia formet determinata; ut resolutiones problematum distincte concipiat; ut attentionem, prout usus requisiverit, determinet; ut usum sensuum in operationibus intellectus decernat; ut

memo-

memoriæ infigendorum eademque retinendorum curam gerat. Quamobrem cum hæc perfectio intellectus acquiratur, si primo cognitionis gradui acquirendo præscripto modo studeamus; quin Matheseos studium, si nostro more tractetur, faciat ad intellectum perficiendum dubitandum non est.

§. 95. Non est quod mireris modum, a nobis præscriptum, ad primum cognitionis gradum adspirantibus, facere ad perficiendum intellectum; cum tamen a methodo, non a dogmatis expectanda sit perfectio intellectus (§. 92). Etenim cum secundus cognitionis gradus supponat primum; nos in acquirendo cognitionis gradu primo jam ea præcepimus, quæ vi methodi observanda sunt iis, quibus secundus curæ cordique est (§. 30); cum vulgo methodi nulla habeatur ratio, & plerumque nonnisi confusæ notiones memoriæ imprimantur, vi imaginationis reproducendæ, quando iisdem opus est. Sane in Geometria, lecta vel audita definitione, oculos in schema delineatum statim conjicientes ideam definiti memoriæ infigunt, non distincte expensis, quæ in definitione continentur; eodemque modo idea schematis, quæ theorema & resolutionem problematis exhibet, eidem mandatur, quæ vi imaginationis præsens sistitur, quoties de ea re cogitamus. Parum adeo, vel nihil, tribuitur intellectui, facultatum vero

cognoscendi inferiorum usus prædominatur. Immo ne attentionis quidem is fit usus, quem facultas cognoscendi superior exigit.

§. 96. Qui definitiones, propositiones, & resolutiones problematum eo modo exponit, quem nos præscripsimus (§. 9, 17 & *seqq.*); eas ad figuras in charta delineatas & exempla exhibita applicat, qualis applicatio requiritur, dum ratiocinamur. Ratiocinatio tertia intellectus operatio est; eodemque prorsus modo ratiocinandum, dum propositiones demonstramus, vel a priori, ex cognitis, alia adhuc nobis incognita colligimus. Quamobrem patet, si in acquirendo cognitionis gradu primo morem nostrum sequaris, hoc ipso perfici debere intellectum. Nulla adeo intellectus operatio est, cui rite elicendæ non inserviat modus acquirendi primum cognitionis gradum a nobis præscriptus (§. 94 & *præf.*).

§. 97. In primo igitur cognitionis gradu acquirendo, omnem illum facis facultatum cognoscendi usum, qui in secundo acquirendo requiritur, immo in tertio familiaris supponitur. Est adeo modus acquirendi cognitionis gradum primum, quem nos præscribimus, præparatio ad secundum: qua facta, nihil prorsus difficultatis in secundo percipitur, cum cum usum facultatum jam facere possis, quem is requirit. Me vero tacente liquet, quod, ubi primus cognitionis gradus acquiritur, antequam

quam ad secundum accedas, una in parato habeas principia, quibus in ratiocinando opus est, dum ad secundum animum appellis. Equidem id modus a nobis præscriptus commune habere videtur cum vulgari; non tamen utroque idem prorsus efficitur. Etenim, nostro more, definitiones ac propositiones pure enunciatione memoriæ insiguntur, quales adhibendæ sunt in ratiociniis distinctis; &, dum præscripto modo expenduntur, simul familiares evadunt, quales esse debent, ut statim memoriam subeant, quando iisdem indigemus. Quodsi vero nostro more non expenduntur; nec eadem facilitate definitiones ac propositiones memoriæ mandantur, sed multa demum repetitione consequimur, quod multo temporis compendio obtineri poterat.

§. 98. Plurimum autem refert, ut definitiones, & propositiones antecedentes familiares experiaris, antequam ad sequentes accedas. Etenim, definitiones sequentes non intelliguntur nisi per anteriores, ubi eas ingrediuntur termini per anteriores explicati. Quamobrem ubi hæc nondum familiares experiris; sequentes tibi non possunt non videri obscuræ, nec fieri potest, ut eas penitus intelligas. Similiter demonstratio non convincit, nisi principia, quæ ex antecedentibus sumuntur, sensum evidentiae secum ferant. Necesse igitur denuo est, ut tibi antecedentes definitiones ac propositiones fuerint fami-

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

liares, ubi sine hæsitazione in demonstratione progredi volueris. Quid, quod nec propositiones satis intelligantur, quamdiu definitiones, quibus explicantur termini in iisdem occurrentes, non fuerint familiares? Ea de causa observare licet, quod studium mathematicum difficile videatur iis, qui nulla terminorum notitia instructi ad idem accedunt, nec in repetendis iis, quæ explicata fuerunt, seduli ac frequentes sunt; cum in casu opposito nulla percipiatur difficultas. Danda vero omnino est opera, ut difficultas hæc tollatur, ne studii utilissimi efficiat desertores.

§. 99. Qui Mathesi addiscendæ operam navant, ut intellectum perficiant; iis imprimis convenit, ut in secundo cognitionis gradu acquirendo industriam suam exercent. Methodo enim debetur hic fructus, non dogmatis, quæ in Mathesi proponuntur. Hujus autem potissima pars sunt demonstrationes, quibus veritatis eorum, quæ docentur, convincimur, ut nihil nobis dubii supersit. Secundo gradui cognitionis acquirendo inserviunt demonstrationes (§. 30). Quamobrem si studium Matheseos intellectum perficere debet, necesse est ut in demonstrando sis assiduus.

§. 100. Intelliguntur vero hic demonstrationes syntheticæ, quales sunt EUCLIDIS & Geometrarum veterum. Neque alia de causa, quam harum demonstrationum gratia,

B b

Vete-

Veteres voluerunt, ne quis ad philosophiam accedat, nisi Geometriæ peritus. Quamvis enim demonstrationes recentiorum analytica, quæ calculis algebraicis absolvuntur, suum etiam habere possint usum in intellectu perficiendo; ab iis tamen eundem expectare minime licet, quem spondent synthetica: id quod satis manifestum evadet per ea, quæ mox disertius dicentur. Inde nimirum est, ut in Mathesi licet versatissimi & inter summos Mathematicos eminentes, ubi extra Mathesin methodo mathematica uti voluerunt, minime dare potuerint, quæ satisfaciunt. Exemplo nobis est CARTESIUS, Vir summus, cujus memoriam egregia in Mathesi inventa posteritati commendabunt, quamdiu scientiæ honos erit. Cum enim MERSENNI desiderio satisfactorius, suum de existentia Dei argumentum ad formam demonstrationis geometricæ reducere vellet; quam parum ipsi leges methodi mathematicæ & genuina demonstrationis forma fuerit perspecta, abunde prodidit in Responsionibus ad objectiones contra Meditationes suas metaphysicas. Taceo exempla alia, quæ commemorari poterant; & quibus tandem effectum est, ut extra Mathesin nullam dari certam cognitionem acutiores inde colligerent: in qua opinione ipsum scepticismum consistere, nemo est qui non agnoscat. Quodsi ergo ad certam cognitionem extra Mathesin pervenire vo-

lueris; necesse est ut methodi mathematicæ interiorum rationem perspicias, & leges ejus distincte cognoscas: id quod fieri non poterit, nisi demonstrationum syntheticarum resolutione naturæ animæ convenienter facta, quam in superioribus factis declaravimus, ut nihil in ea desiderari possit. Atque, ea de causa, demonstrationes nostras syntheticas eo ordine digessimus, ut facillime præscripto modo resolvi possint. Nihil enim magis intendimus, quam ut studio mathematico intellectus perficiatur, quo certæ extra Mathesin cognitioni acquirendæ sufficiat.

§. 101. Doluit ideo ipse Vir summus ISAACUS NEWTONUS, quod, cum se studio mathematico totum daret, ad CARTESII Geometriam, aliosque scriptores algebraicos, statim progressus fuisset, antequam Elementa EUCLIDIS ea attentione expendisset, quam merentur; nec probavit, quod hodie Geometriæ methodum syntheticam Veterum prorsus negligant, & in solis calculis algebraicis acquiescant; quemadmodum ex ore ipsius hausta refert HENRICUS PEMBERTON in præfatione ad Conspectum Philosophiæ NEWTONI, quem patrio sermone edidit. Nullum mihi dubium est, quin, quantum sibi hoc ipso defuerit, abunde expertus fuerit, cum in divino opere Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, inventa præclara methodo veterum Geometrarum proponere.

nere decreviffet. Quodfi enim quis, more a nobis præfcripto, demonstrationes fyntheticas refolvere didicerit, & genuinam earum formam animo comprehenderit; is facile animadvertet, quod eam non perviderit NEWTONUS; neque adeo diftincte agnoverit, unde pendeat evidentia veritatis extra Mathefin; quemadmodum & CARTESIO accidiffe modo monuimus (§. 100). Idem videre licet in eximio opere Phoronomiæ JAC. HERMANNI; qui, cum omnem ætatem in calculis algebraicis confumiffet, methodo Veterum recentiora in Mechanica & Hydraulica, agnatisque difciplinis inventa demonftrare volebat. Quam parum enim fibi & lectoribus fuis confuluerit; quod methodo, cujus vim ac poteflatem minime comprehendebat, ea proponere voluerit, quæ per calculos algebraicos affecutus fuerat, & cum laude ad utilitatem difcentium proponere poterat, acutiores vident.

§. 102. Firmum itaque ratumque manet; qui intellectus perficiendi gratia ad Mathefin accedit, ei demonftrationes *Euclidean* omni cura ac follicitudine expendendas effe: quæ qualis effe debeat, noftra demonftrationum analyfis & earundem fymbolica repræfentatio clariffime docet (§. 38 & feqq.). In his igitur induftriam fuam ingenii que vires exerceat, qui extra Mathefin evidentiam in veritatis cognitione confequi

voluerit. Proprio experimento edocti fumus, non dari aliam ad evidentiam in Philofophia & Facultatibus, quæ dicuntur, fuperioribus viam: quam fi calcare nolueris, tanto pronior erit in Scepticifmum prolapfus, quanto fueris acutior; & facillimum erit nubem pro Junone amplecti, nec abortus imaginationis a genuinis intellectus foetibus diftinguere dabitur. Quodfi, præfcripto a nobis more, in Mathefi verfari volueris, ceffabunt querelæ de imbecillitate intellectus humani, quales movit HUETIUS, non profuturæ, nifi ut fternant ad Scepticifmum viam, non fine detrimento religionis tam revelatæ, quam naturalis. Scepticifmum hodie ubi vis terrarum invalefcentem everfuri methodo ifta philofophari cœpimus, qua EUCLIDES in fuis Elementis olim ufus. Cumque, in Philofophia, notiones confusæ refolvendæ fint in diftinctas, quas fine detrimento veritatis fert Mathefis; ipfas etiam demonftrationes geometricas ad eam formam reduximus, quam extra eandem habere debent, ne quid defit evidentiae; ut adeo fuperflua exiftimanda non fint, quæ finis tam præclari gratia fiunt. Nec puerilia cenfenda funt, quorum neglectus fe vindicat in Viris fummis. Abfit itaque, ut eorum autoritate ad eundem defendendum abutaris.

§. 103. Modus, quo definitiones ac propofitiones expendere docuimus, omnem facultatum ufum legitimum

num in veritate cognoscenda pollicetur, ipso opere consequendum. Quodsi vero ad repræsentationem symbolicam animum advertere, & regulas generales inde abstrahere volueris; verioris Logicæ præcepta consequeris, quæ in Logica nostra demonstravimus. Atque adeo reipsa experieris, Logicam artificialem tum demum esse genuinam, ubi praxi veterum Geometrarum conformis; quemadmodum in Prolegomenis Logicæ ostendimus (§. 26 *Log.*). Qui sic præparatus ad Logicæ studium accedit, non modo omnia, quæ hic docemus, penitus intelliget; verum etiam regulas ibidem traditas, absque ulla hæsitazione, dextre applicabit; ut nec in iis applicandis sibi met ipsi imponat; quemadmodum haud raro contingit, nec de difficultate applicandi queratur. Ubi studium Matheseos præscripto a nobis more instituerit; in studio Logicæ, quod spinosum alias ac tædii plenum videtur, non sine voluptate versabitur, nec Logicam soli scholæ addisci in seipso experietur. Etenim ideas, quæ regulis logicis lucem affundunt, tot exemplis confirmatas, recta Mathematicarum tractatione, adeo familiares possidet; ut, quoties iisdem opus est, sua veluti sponte sese sistant animo præsentibus; ipsaque Mathematicarum tractatio in continua regularum istarum applicatione cum consistat, quin continuo, hoc exercitio, eas applicandi habitum sit consecutus, dubitari

nequit. Voluptate perfunditur animus, dum veritatis plenarie convincitur. Quamobrem cum veritatis eorum, quæ in Logica docentur, convincatur qui, Matheseos studio nostro more præparatus, ad studium Logicæ accedit; quin continua in eodem fruatur voluptate dubitandum non est. Docet Logica usum facultatum cognoscendi in veritate cognoscenda & applicanda. Quoniam itaque usum facere potest, qui nostro more in Mathesi fuit versatus; usus autem idem requiritur, in singulis omnino actionibus recte determinandis, prouti abunde constabit, si quis attentamente Tomum posteriorem Philosophiæ practicæ universalis perlustrare voluerit; utilitatem Logicæ per omnem vitam experietur, qui regulas ejus penitus intelligit, & dextre applicare didicit.

§. 104. Quoniam ea demum Logica censetur genuina, quæ praxi veterum Geometrarum conformis (§. 26 *Log.*); utrum vero huic conformis sit, nec ne, dijudicare valet, qui in Mathesi præscripto a nobis modo fuit versatus (§. 103); nostra Matheseos quoque tractatio hunc pollicetur fructum, ut Logicam genuinam a spuriis discernamus, quales nostra ætate eduntur haud pauca, & quæ naturali facultatum animæ usui e diametro adversantur; ita ut studium Logicæ non amplius faciat ad dirigendum facultatem cognoscitivam in cognoscenda veritate, sed intel-

intellectum potius corrumpat, ut a solida cognitione veritatis proscribaris. Neque verendum est, ne auctoritas Mathematici, Logicæ non unius scriptoris, ipsi imponat: satis enim intelligit, vulgari Mathemata discendi more (§. 64) non patefieri regulas logicas, quas nostra resolutio & analytica expressio in apicem producit. Non igitur sufficit Logicam scribi ab eo, qui Mathematicus audit, vel Geometriæ quædam Elementa methodo minus accurata compilavit; sed necesse est, ut, qui Logicam scribit, in expendendis definitionibus ac propositionibus earumque demonstrationibus, cum faciat facultatum usum, quem regulæ logicæ urgent, & ut hæc ipsas regulas praxi huic conformes tradat. Vidimus paulo ante (§. 101) deficere hic acumen Mathematicorum summorum; ut adeo mirum videri non debeat, si acumen illorum desideretur, qui in illorum numerum referri nequeunt.

§. 105. Quoniam ad studium logicum accedere non debet, nisi qui in studio Matheseos secundum morem nostrum versatus est; ideo in Logica exempla mathematica dedimus, quippe quæ satis cognita atque perspecta supponimus, nisi ubi exempla vulgaria satisfaciunt. Accedit, quod nonnulla in Logica tradantur, quæ aliis, quam mathematicis exemplis, non eadem perspicuitate illustrantur. Bene sibi consulunt, qui

saltem Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa præscripto a nobis modo perlustrant, antequam ad Logicam animum appellunt. Reipsa experientur, quod ex studio logico omnem percepturi sint fructum, qui ab eo sperari potest. Quodsi vero, neglecta Mathesi, ad Logicam properant, multa in iis non penitus intelligent, etsi omnia rite percepisse videantur; nec absoluto studio logico in potestate sua positum deprehendent, ut regulis Logicæ satisfaciant, hoc est, cum faciant facultatum usum, quem Logica præscribit.

§. 106. Maxima intellectus perfectio est Ars inveniendi; qua ex iis, quæ cognovimus, alia nobis incognita ratiocinando colligimus. Qui eo usque in perficiendo intellectu progredi voluerit; illi tenenda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66 & seqq.) Quodsi enim vel sola Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ eo modo pertractaveris, qui ibidem præscribitur; non modo constabit, quomodo in veritate invenienda sit procedendum; verum etiam habitum quendam tibi comparabis ex cognitis alia incognita colligendi; consequenter aliquid saltem hujus Artis acquies. Quemadmodum vero intellectus continuo magis magisque perficitur, quoad promptum usum in veritate cognoscenda; si simili modo Philosophiam nostram pertractare volueris, quo in acquirendo gradu secundo

cognitionis mathematicæ utendum esse docuimus; ita quoque, quoad Artem inveniendi, eundem ulterius perficies, si in Philosophia facias, quæ tertii cognitionis gradus acquirendi gratia fieri debere præcepimus. Quod si cui hoc nimis molestum videtur; is sciat velim, quæ ardua sunt, ea non facili opera acquiri. Qui vult finem, media velit necesse est, quæ ad eundem ducunt.

§. 107. Satis itaque docuimus, quomodo instituendum sit studium Matheos, ut intellectus, quantum datur, perficiatur. Unicum adhuc superest, de quo nonnulla mihi dicenda sunt, antequam ad alia progrediar. Sunt qui sibi aliisque persuadere conantur, quasi methodus mathematica Philosophiæ minus conveniat; multo autem adhuc minus in Theologia, Jurisprudencia, & Medicina eidem locus sit. Equidem hoc dubium jam sustulimus in Discursu præliminari, quem Logicæ præmisimus, de Philosophia in genere, ubi (§. 139) identitatem methodi philosophicæ ac mathematicæ demonstravimus; & in Horis nostris subsecivis ostendimus, quod & quomodo methodus mathematica adhiberi possit in Jurisprudencia, & Scriptura sacra interpretanda; ex nostra tamen definitionum & demonstrationum propositionum analysi, singulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifestum est, omnem methodum mathematicam, qua usus est EUCLIDES,

huc tandem redire; ut operationum intellectus legitimus faciamus usum in veritate cognoscenda, qui ad evidentiam acquiritur, qua veritas indubitato agnoscitur. Hinc manifestum est, non alias homini esse facultates, quibus in cognoscendis mathematicis utitur, quam quibus opus habet ad cognoscendam veritatem quamcunque aliam; nec alium esse facultatum earundem usum in Mathesi addiscenda, vel etiam in veritatibus mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, sive ab aliis inventa fuerit, sive demum nostra opera detegenda. Mathesis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoscendi usus fieri debeat, si ad liquidam veritatis cognitionem pervenire decreveris: id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abstrahi possunt (§. 103), ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas sit lapis Lydius genuinæ Logicæ (§. 26 *Log.*). Quotquot igitur in ea sunt opinione, quasi Mathesis propriam sibi habeat methodum, quæ extra eam nullius sit usus; aut methodi mathematicæ vim ac potestatem, aut genuinum facultatum cognoscendi ad certam veritatis cognitionem consequendam usum, aut utrumque, ignorant. Hinc etiam videas, objectionem moveri ab iis, qui vel sunt in omni Mathesi hospites ac peregrini, vel legitimi usus facul-

facultatum cognoscendi prorsus ignari.

§. 108. Denique nostra Mathematicum tractatio manifesto loquitur, eum, qui in Mathesi addiscenda præscriptum a nobis morem observat, sequi modum cogitandi maxime naturalem. Primus hoc animadverti, cum ad demonstrationum analysin, præscripto a nobis modo factam, animum attenderem, & publice hoc monui in Lexico mathematico, idemque postea uberius docui in Psychologia. Naturalis cogitandi modus est, qui leges animæ exacte sequitur. Quis igitur adeo vesanus est, ut sibi persuadeat, usum facultatum aliis legibus accommodandum esse in Philosophia, Theologia, Jurisprudencia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

§. 109. Etsi autem Mathesis universa faciat ad intellectum perficiendum, si eo, quem præscripsimus, modo tractetur; ut adeo optime sibi consulat, qui Elementa nostra omnia eodem studio perlustrat: quoniam tamen non omnibus tantum suppetit temporis spatium, quantum huic labori sufficit; unusquisque eo usque progredi poterit, quantum conceditur. Arithmeticae autem & Geometriae pertractatio prorsus indispensabilis est; quæ ideo pramittenda, antequam ad Logicam animum appellis, & hinc ad reliquam Philosophiam te conferas. Immo, si cui volupe fuerit integra Mathe-

seos nostræ Elementa perlustrare; ei tamen non suaferim, ut de Philosophia omnem cogitationem abjiciat, donec studium Matheseos omne fuerit absolutum: sed potius autor sum, ut, Arithmetica & Geometria absoluta, statim Logicæ operam suam addicet, & in Mathesi juxta Philosophiam pergat. Ita enim futurum certus sum, ut studium Matheseos ac Philosophiæ sibi mutuo lucem affundant.

§. 110. Supponimus autem Philosophiam eadem methodo esse conscriptam, qua in Elementis Matheseos utimur. Quamobrem cum id ante nos fecerit nemo; nec alia ipsi scripta philosophica commendare valeamus, nisi Opera nostra philosophica, Latino inprimis idiomate conscripta. Quodsi prolixitatem obtendas, nulla sane ratio est, cur ea te deterreat. Etenim si non ante ulterius progredi volueris, quam singularte intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris; multo minore temporis spatio scripta nostra utiliter perlegere potueris, quam breve quoddam compendium, communi more conscriptum; modo in pertractanda Arithmetica & Geometria industriam tuam desiderari passus non fueris. Immo valde vereor, ne si præscripto a nobis more in Arithmetica & Geometria fueris versatus, lectio aliorum scriptorum philosophicorum quam nostrorum, te efficiat studii philosophici desertorem, aut in Scepticismum dedu-

deducat. Absit, ut quis existimet hæc arroganter a nobis dicta esse, nimia in nos fiducia, in contemptum aliorum! Veritati enim unice litamus, non loquentes nisi experta, quæ ratio defendit. Ab aliorum contemptu procul remoti, aliena merita suspicimus & extollimus; neminem in scriptis nostris nominatim perstringimus; iis etiam parcimus, qui in laceffenda fama nostra quidvis sibi licere arbitrantur; probe memores eam non dependere a laudibus aliorum, sed a factis propriis; omni animi contentione omnique industria

ac diligentia in id enitentes, ut calumnias factis contrariis refellamus. Alienum a nobis esse existimamus, ut doctrinis, quas profitemur, facta sint contraria. Nemo igitur nobis vitio vertet, si aliorum utilitati velificaturi ea dicimus, quæ veritas imperat, citra injuriam alterius. Minus toleranda potius ambitio est, si quis non sine detrimento aliorum veritatem reticere vult, ut videatur qui non est. Ceterum, si quis consilio nostro aurem benignam dare voluerit; re ipsa experietur vera omnino esse, quæ dicimus.

C A P U T III.

De Studio Arithmetica, Geometria, & Trigonometriae planæ in specie.

§. 111. **A**rithmetica, Geometria, & Trigonometriae planæ nostra Elementa ita conscripsimus, ut satisfaciant omnibus, quocunque fine ad Arithmetica & Geometriam addiscendam appellunt. Ea enim digessimus, ut nullo negotio prætermittantur, quæ salvo fine, quem quis sibi præfixum habet, ignorare potest; & ea iisdem inseruimus, quæ nisi eo excidere voluerit, ignorare nequit.

§. 112. Qui Arithmetica addiscit, vel soli praxi studet, theoriam non curat, vel hujus etiam rationem habet. Qui soli praxi operam na-

vat, is vel solum ejus usum in vita communi, vel usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus, intendit. Idem præterea, vel in nuda praxi acquiescere vult, vel veritatem quoque praxeos perspicere avet. Cui theoria curæ cordique est, is eandem, vel propter usum in ceteris Matheseos partibus, vel propter usum in perficiendo intellectu, appetit. Videamus igitur, quomodo Elementa nostra Arithmetica pro multiplici hoc discendum scopo satisfaciant.

§. 113. Qui soli praxi operam navant,

vant, & quidem in usum vitæ communis; iis satisfaciunt problemata de Algorithmo in numeris integris, & fractis, quæ capite secundo & quarto continentur, una cum problemate 33, quod capite sexto legitur, de numero tertio, vel quarto, proportionali inveniendò, una cum scholiis, in quibus idem problema ad varios casus in vita communi obvios applicatur. Qui vero usum etiam in Geometria practica, aliisque Matheseos mixtæ partibus intendunt; illi superaddere debent problemata de extractione quadratæ ac cubicæ radicis, quæ capite quinto leguntur, problemata de logarithmis, fractionibus decimalibus & fractionibus sexagesimalibus, quæ capite octavo, nono & decimo extant. Fractiones sexagesimales omittere possunt, qui calculi Astronomici nullam habent rationem. Immo eodem carere possunt, qui ultra ea non progrediuntur, quæ in nostris Astronomiæ, & Chronologiæ Elementis traduntur.

§. 114. Problemata a definitionibus & theorematis satis aperte distinguuntur, suoque nomine insignita numerantur, ut adeo nullo labore opus sit ad ea evolvenda, & agnoscenda. Ut adeo usus quidam hinc elucescat, cur in Mathesi veritates singulæ suis nominibus compellentur, ac numerentur; etiamsi in citationibus ad paragraphum provocemus, in quo principium istud continetur, quo in demonstrando utimur.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 115. Quoniam in propositione, itemque in resolutione, occurrere solent termini, quibus nondum intellectis, nec propositio, nec resolutio intelligi potest; igitur necesse est, ut istorum terminorum definitiones ante expendat, quam ad problemam accedat, qui praxin in eodem traditam discere studet. Ita ex. gr. problema secundum (§. 96 *Arithm.*) docet numeros quocunque datos addere. Supponitur adeo definitio additionis, quæ traditur in anterioribus (§. 61 *Arithm.*). Quia vero nec definitiones intelliguntur, nisi intellectis terminis, qui eas ingrediuntur; si qui termini per notiones claras, sed confusas communes non satis perspicui sunt, ad definitiones eorum, quas in antecedentibus damus, recurrendum. Ita, in definitione additionis mentio fit numerorum homogeneorum. Quoniam numeri sint homogenei, ex communi sermone notum non est. Quamobrem necesse est, ut ad definitionem numerorum inter se homogeneorum recurras, quam in anterioribus exhibemus (§. 35 *Arithm.*). Quomodo autem hæ definitiones sint expendendæ, patet ex iis, quæ de primo cognitionis gradu acquirendo, quoad definitiones, præcepimus.

§. 116. Problematum resolutiones statim applicandæ sunt ad exempla, quemadmodum in ipso textu nobis factum. Nimirum regulæ, quibus præcipiuntur, quæ fieri debent,

C c

fuis

suis numeris distinguuntur, ut singulis statim satisfieri possit. Collocantur eo ordine, quo singula fieri debent; ut, lecta regula una, statim fiat quod eadem præcipitur. Nihil adeo applicatio ad exempla habet difficultatis; ita ut totam Arithmeticam practicam proprio Marte addiscere possis, nisi fueris valde impatiens; aut si, duce alterius, unam operationem arithmeticam didicisti, ceteras deinde, absque ullo duce, tibi familiares reddere queas.

§. 117. Si quis veritatem resolutionis problematum perspicere voluerit, necesse est demonstrationes addat. Citationes in iisdem adductæ ostendunt principia, quibus opus habet. Neque opus est, ut theoremata, quæ capite primo proponuntur, demonstret; sed sufficit ea sumi, tanquam per notiones communes nota, absque demonstrationibus. Similiter sufficit, ut ex capite 3 non nisi definitionem rationis, nominis rationis, rationum identitatis & proportionis in genere, ejusque specierum, proportionis continuæ atque discretæ (§. 126, 136, 149, 155, 156) sibi cognitam ac perspectam reddat, una cum theoremate 20 & 21, quorum demonstrationes omittere potest, in illustratione per exempla facta acquiescens. Problema 36, de modo inveniendi logarithmum, prætermittere potest; immo totam de Logarithmis doctrinam tamdiu differre; donec, absoluta Geome-

tria, ad Trigonometriam accedere voluerit.

§. 118. Quodsi vero theoriam expetit, sive propter usum in ceteris Matheseos partibus, sive intellectus perficiendi gratia, tota omnino Elementa pertractanda sunt, eo modo, quem in capite primo pro acquirendo gradu cognitionis secundo præscripsimus, ut adeo nihil supersit, quod hic veniat addendum.

§. 119. Quamvis ostenderimus, quid faciendum sit, si quis nudæ præxi operam navat, nulla prorsus habita ratione theoriæ; hujus tamen neglectum nemini suademus: quin potius consultum ducimus, ut Arithmetica, etiam practica, in usum vitæ communis, non sine demonstrationibus addiscatur. Ut enim alios taceam usus; non modo tota Arithmetica practica facilius addiscitur; verum etiam memoriæ multo firmitus infigitur, non sine temporis compendio; & ubi quorundam oblitus est, absque multa difficultate in memoriam revocantur: id quod inprimis usui est, ubi arithmetice operationibus non quotidie habueris opus.

§. 120. Ceterum hinc liquet, quod, absque ullo negotio, ex Elementis nostris Arithmetice exscribi possit Compendium Arithmetice practice, in usum illorum qui solam Arithmeticam practicam, propter usum in vita communi, expetunt; levi sumtu ab iis comparandum, qui eodem

eodem opus habent. Quodsi plura desiderentur exempla, ea cumulare difficile non est. Etenim non alia re opus est, quam ut in locum numerorum, quos exemplum sistit, substituantur quicumque alii. Quodsi demonstrationes non negligantur, quemadmodum ne id fiat modo suavisimus (§. 119); paucis exemplis obtinetur, quod non sine multis consequi datur, ubi theoriam omnem abjicere volueris.

§. 121. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ii memores esse debent ejus, quod in scholio definitionis primæ (§. 2 *Arithm.*) monuimus; scilicet quod ab Arithmetica practica, tanquam methodo inveniendi speciali, regulæ inveniendi generales abstrahere liceat. Cumque in scholio generali ad Algorithmum numerorum integrorum (§. 125 *Arithm.*), istiusmodi regulas abstraxerimus, ut exemplo quodam præiremus; & in genesi numerorum quadratorum & cubicorum (§. 262, 266, 277, 280 *Arithm.*), nec non in theoria numerorum æquidifferentium (§. 327, 329 *Arithm.*) artificia quædam analytica docuerimus; ad hæc imprimis animum advertere debent, qui non modo in Arithmetica, Artem inveniendi, sed eam etiam generalem, curæ cordique habent. Si prolixioribus esse liceret, addi poterant multa specialia, de quibus alibi commodius dicitur; ubi nimirum Artem inveniendi ea methodo tra-

dituri sumus, qua huc usque Logicam & Metaphysicam universam, una cum Philosophia practica universali, tradidimus. Ita ex. gr. quæ (§. 142 & seqq. *Arithm.*) de generibus & speciebus rationum rationalium docentur, insinuant modum ex dato genere inveniendi genera inferiora eorundemque species: quo etiam Dignitatum divisio facit (§. 252 *Arithm.*). Huc etiam pertinent fictiones, quarum exemplum habemus in fractionibus spuris (§. 221, 222 *Arithm.*)

§. 122. Qui Geometriæ studio sese dedunt; similiter aut soli praxi student, theoriæ nullam prorsus rationem habentes, veluti agrimensores & architecti militares; aut in praxi nuda acquiescere nolunt, sed ejus demonstrationes expetunt. Qui vero theoriæ addiscendæ sese dedunt, aut usum in ceteris Matheseos partibus intendunt, aut hoc faciunt intellectus perficiendi causa.

§. 123. Quibus in nuda praxi acquiescere visum est; iis satisfaciunt definitiones & problemata, omissis demonstrationibus. Nullum est problema, quod usui esse non possit, adeoque prætermittendum sit: sed definitiones quædam omitti possunt, veluti figuræ in genere, lateris, tangentis, secantis, &c. Sufficit enim didicisse definitiones angulorum & figurarum, atque linearum perpendicularis, & linearum parallelarum. Ceterorum notiones confusa, ipso usu

terminorum, in casu dato insinuantur, quæ praxi soli intentis satisfaciunt.

§. 124. Quænam observanda sint circa definitiones, & problemata, eorundemque resolutiones, ex iis intelliguntur, quæ de acquirendo gradu primo cognitionis in anterioribus præcepimus (§. 5 & seqq.); nisi quod definitiones sequentes non opus sit resolvi in antecedentes, quia sufficit eas referri ad schemata oculis subjecta; cum non requiratur adæquata entium geometricorum notio, sed vel in confusa eorundem notione acquiescere possit.

§. 125. Praxis duplex est: alia, quæ exercetur in charta; alia, quæ in campo. Qui praxi unice se dat, eam exercere intendit. Non igitur sufficit resolutiones problematum intelligere; verum etiam requiritur, ut facias, quæ fieri jubentur. Ad praxin igitur in charta exercendam, ad manus esse debet circinus, regula, instrumentum transportatorium, norma, & parallelismus, una cum triangulo ex ligno ebenino, & scala modica; ad eandem vero in campo exercendam, baculi, cum catena, vel fune cannabino in pedes & decem, edas illorumque digitos legitime diviso, una cum instrumentis cæteris, quorum usus explicatur.

§. 126. Juxta resolutionem problematis uniuscujusque instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo; ut videas, num ea facere

possis, quæ jubentur. Quorum vero problematum resolutiones arithmeticae sunt, adeoque calculo absolvuntur; cæ tentandæ sunt in exemplis non modo iis, quæ ipsimet in medium attulimus, verum etiam aliis; qualia comminisci haud difficile, ubi in locum numerorum datorum surrogantur alii pro arbitrio nostro. Quemadmodum enim consultum est, ut una eademque operatio, sive in charta, sive in campo, aliquoties repetatur, donec exacte facere possis quod jubetur; ita etiam exempla cumulanda. Hoc nimirum non tantummodo facit, ut resolutionem problematis uniuscujusque rite intelligas, eandemque memoriæ firmiter infigas; sed & ut habitum exacte faciendi, quod faciendum erat, acquiras. Qui enim praxin exercere vult, non modo intelligere debet, quid fieri debeat, sed & ut omni exactitudine id facere possit requiritur. Habitus docendo communicari nequit, sed crebro exercitio, seu idem sæpius faciendo acquiritur. Qui adeo docet, officio suo satisfacit, si ea tradit, quæ, ut recte facias quod faciendum, nosse debes.

§. 127. Quoniam multa dantur problemata geometrica, quorum resolutiones per calculum expediuntur; Geometria practica Arithmeticam practicam supponit. Illam igitur si addiscere volueris, hanc ante addiscas necesse est.

§. 128. Ex nostris adeo Elementis

tis Geometriæ, absque ullo negotio, Geometria practica extrahi poterat, ne verbo quidem immutato: cui quod utiliter addatur compendium Arithmeticæ practicæ, ex Elementis Arithmeticæ exscribendum (§. 120), nemo est, qui non videt (§. 127).

§. 129. Enimvero, etsi praxis absque theoria commode addisci possit, & Elementa nostra ita conscripta sint, ut brevissima ad eandem via ducant absque ulla theoria; meo tamen, si quid valet, consilio, omnes agrimensores & architecti militares, & si qui alii praxin geometricam exercere voluerint, tantum theoriæ sibi acquirere deberent, quantum ad praxin demonstrandam sufficit. Quemadmodum enim theoria accurata praxin accuratam parit; ita etiam probe intellecta exercitium praxeos reddit exactum. Immo succurrunt subinde in praxi casus nonnulli, in quibus hæret ac facile aberrat, qui theoria instructus non est. Non opus esse videtur, ut hoc multis rationibus adstruatur; qui enim consilio nostro aurem benignam præbere voluerit, veritatem dicti re ipsa experietur. Nemo non novit, si plures agrimensores aream ejusdem campi investigent, haud raro magnum esse dissensum in quantitate ejus definienda; certo indicio, quod non eadem accuratatione singuli fuerint usi, etsi omnem diligentiam adhibuisse sibi videantur. Diligentia oculata esse debet, quæ ab accuratatione nulla in

re deficit. Ut hæc oculata sit, theoriæ debetur.

§. 130. Equidem non diffitemur, theoriam adeo exactam non requiri in iis, qui Geometriam practicam exercent, qualem nos intellectus perficiendi gratia condidimus; unde & in Elementis nostris Germanicis ab ea abstinuimus eandemque in compendium contraximus. Quodsi tamen visum fuerit omnem retinere theoriam, quam dedimus; ea multiplici utilitate sese commendabit etiam praxin exercentibus. Per eam enim obtinebis, ut nulla in re patiaris desiderari attentionem tuam, & vel in minimis te præbeas circumspectum. Taceo, quod omnibus usui sit, si facultatum cognoscendi legitimum usum facere queant; & ipsa obligatione naturali, nemo negligere teneatur occasionem, qua eundem in potestatem suam redigere valet.

§. 131. Neque est quod excipias, agrimensores, & architectis militibus, aliisque praxin geometricam exercentibus non convenire theoriam, sed eam captum ipsorum transcendere, immo ipsos eandem naturali quadam aversione fastidire: hoc enim quam sit a veritate alienum, & experientia me docuit, & ratio convicit. Si qui theoriam contemnunt, non alia de causa hoc faciunt, quam quod eam non didicerint, nec ignoti ulla sit cupido, & quod eadem in praxi sua carere posse sibi videantur. Aliter vero sentirent, ubi mature theoria

eorundem animis instillaretur. Quod vero eam capere nequeant, si rite eandem doceantur, adeo verum non est, ut experimento contrario refellatur. Ne difficultatem præter necessitatem facessas, doce ipsos primum praxin solam, sed ea methodo, ut distincte concipiant singula, quæ fieri debent, quemadmodum nos urgemus: ita enim futurum, ut notionibus distinctis adsueti, quid inter has atque confusas intersit facile internoscant. Adde demonstrationes, quas diximus, mechanicas; ut veritatem eorum, quæ docentur, experiantur: quam ubi percepisse sibi videntur, eisdem mone experimenta hæc loqui nonnisi veritatem in casu singulari, nec reiterata eandem prodere in universali. Neque difficile est convincere quemvis a posteriori, quod a particulari ad universale non valeat argumentatio, cum ubivis prostent exempla, quibus idem doceri potest. Cum hoc modo excitaveris cupidinem sciendi, quod scire delectet; commodum jam erit ad theoriam progredi. Et ubi quis in cognitionis gradu primo acquirendo nostro more versatus fuerit, ad secundum consequendum præparatus accedit; in quo si denuo morem a nobis præscriptum sequaris, absque ulla molestia in theoria addiscenda progredi dabitur.

§. 132. Qui theoriæ operam navant, propter usum in disciplinis ceteris mathematicis; illi non modo

omnes propositiones sibi familiares reddere, verum etiam habitum demonstrandi comparare tenentur. Quamobrem universa Elementa Geometriæ eo modo pertractare debent quem, acquirendi secundi & tertii cognitionis gradus causa, capite primo præscripsimus; & definitiones, ac propositiones pure enunciatas memoriæ firmiter insigere tenentur: quo plurimum confert accurata demonstrationum analysis, in quibus definitiones & propositiones pure enunciatæ tanquam principia adhibentur. Hoc enim pacto demonstrationum sequentium evolutio repetitionis vicem sustinet, qua definitiones ac propositiones pure enunciatæ memoriæ mandantur, & discipuli familiares evadunt; quales supponuntur ad ceteras Matheseos partes absque difficultate pertractandas.

§. 133. Quod problemata attinet, quæ praxin continent; notandum est, praxin in charta exercendam usui esse in ceteris Matheseos partibus; quæ vero exercetur in campo, ea nullum habere in reliquis usum, nisi in Architectura militari, & in Astronomia, atque Geographia, nonnulla ex iis cognita atque perspecta supponi. Praxis accurata in charta magis ornat Mathematicum, quam necessaria est, si in sola theoria acquiescere voluerit. Neque is multo instrumentorum apparatu indiget; sed sufficit regula, cum circino, & graphio, cujus tamen vicem supplet pen-

na

na ex corvorum alis evulsa (§. 123 *Geom.*). Problemata, quæ praxin in campo docent, non tamen prorsus negligenda. Eorum enim theoretica cognitio discentem præparat ad ceteras Matheseos partes facilius addiscendas. Neceffe igitur est, ut resolutionem distincte concipiat, & demonstrationem nostro more resolvat, ac analytice exprimat; omni cura ac sollicitudine animi observans, quæ de iis, secundi cognitionis gradus acquirendi gratia, præcepimus, qui theoreticam Matheseos universæ cognitionem curæ cordique habet.

§. 134. Eadem tenenda sunt, si quis, intellectus perficiendi gratia, Geometriæ studet; sive tantummodo ad secundum cognitionis gradum, sive simul ad tertium extra Mathesin adspiret. Utilitatem percipiet qui, in Philosophia morali & civili, accurata diligentia versari, eandemque ad usum vitæ transferre, & theoriam physicam ad Artes perficiendas applicare voluerit.

§. 135. Qui a Geometria & Trigonometria ad Algebram progredi voluerit, is cognitionis gradum tertium in Mathesi intendit. Quamobrem ea ipsi observanda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus capite primo. Inprimis autem animum attendere debet ad præparationem, quæ demonstrationi præmittitur; cum ea opus quoque habeat in resolutione problematum geometricorum in Algebra,

& in solutionibus, præsertim algebraicis, problematum in ceteris Matheseos partibus.

§. 136. Elementa Arithmeticæ & Geometriæ, per Mathesin universam, & in omni cognitione mathematica, quam philosophicæ contra distinguimus (§. 14 *Disc. pralim.*), apprime necessaria sunt, ita ut eorum notitia nemo carere possit, qui in ceteris Matheseos partibus ad cognitionis gradum secundum atque tertium adspirat. Quo majore igitur studio ac industria in illis fuerit versatus, eo felicius in reliqua Mathesi progredietur. Id etiam obtinebit, quod hodie in plerisque Mathematicis, & in seipso desideravit Vir summus NEWTONUS (§. 101), ut methodum Geometrarum veterum cum algebraica recentiorum conjungat, & utriusque compos reddatur: cujus insignem experietur usum, si ad summa quævis in Mathesi contendat, & exemplo NEWTONI naturam mathematicæ tractare voluerit; inprimis si quando volupe fuerit mathematicarum rerum naturalium cognitionem in systema redigere, quantum fert ætas nostra, præsertim ubi ante officio suo satisfecerint Philosophi.

§. 137. Trigonometria plana, non minus quam Sphærica, primum in usum Astronomiæ fuit inventa. Quamobrem indispensabilis usus est in Astronomia, adeoque eam negligere nequit, qui nobilissimæ huic scientiæ operam dare decrevit. Postea quoque

quoque ad praxin geometricam in campo fuit applicata; quemadmodum capite ultimo Trigonometriæ planæ ostendimus. Quamobrem eadem quoque studere tenentur, qui praxin geometricam in campo exercere voluerint. Applicata eadem fuit ad varia problemata in Geographia, Hydrographia, Gnomonica, Mechanica, Architectura militari, & Opticis disciplinis: ut adeo commendanda veniat ad hæc quoque Matheseos partes animum appellentibus. Multo igitur illustrior est ejus usus, quam qui olim fuerat.

§. 138. Qui in sola praxi acquiescunt, iis satisfaciunt perpauca ista problemata, quæ capite secundo continentur; addituri ea, quæ continentur tertio, ubi Geometriam practicam curæ cordique habent. Hoc unicum notandum est, quod usum Canonis sinuum & tangentium, una cum Canone logarithmorum tam sinuum atque tangentium, sibi familiarem reddere teneantur, qui in usum praxeos Trigonometriam planam addiscunt; additis problematis, quibus in Arithmetica usus logarithmorum docetur (§. 349 & seqq. *Arithm.*), una cum definitione logarithmorum, & theorematis eorum naturam explicantibus (§. 334 & seqq. *Arithm.*); sed absque demonstratione.

§. 139. Exempla, quibus calculum trigonometricum illustravimus, adeo distincte repræsentavimus, ut

ideam exemplarem resolutionis problematum animo insinuent, & resolutionis vicem tueri possint. Quamobrem ii, quos sola praxis juvat, eandem sibi familiarem reddere tenentur: id quod uno alteroque exemplo facile obtinetur. Exempla autem complura facile comminiscitur, qui numeris in exemplo proposito datis substituit pro arbitrio alios. Inprimis etiam suademus omnibus, quotquot praxin geometricam in campo exercere voluerint, ut exempla proprio Marte addant problematis, quæ hunc in usum traduntur capite tertio. Reperiuntur autem ad imitationem eorum, quæ dedimus capite secundo. Nimirum non alia re opus est, quam ut data numeris exprimantur: id quod nihil difficultatis habet; præsertim cum in expendendis problematis data a quasitis semper veniant distinguenda (§. 26). Quodsi hoc feceris, calculus erit idem, qui in problematis citatis: quæ etiam ratio est, cur eundem in textu non apposuerimus, ne præter necessitatem essemus prolixiores.

§. 140. Qui praxin oculatam desiderant, vel theoriæ tantummodo rationem habent; illos demonstrationes superaddere & in Trigonometria eodem modo versari debere, quem pro secundo & primo cognitionis gradu acquirendo supra præscripsimus, me vel tacente, intelligitur. Nihil adeo prætermittere tenentur, quæ in Elementis nostris continentur. Et quam-

quamvis Canon sinuum atque tangentium, cum naturalis, tum artificialis, jam fuerit constructus, ut nullus amplius problematum, quæ in capite primo in hunc finem traduntur, videatur usus; ea tamen negligenda non sunt, ut appareat, quomodo Canones isti construï potuerint, & quomodo ex theoria praxis, ad quam tendit, deducatur.

§. 141. Inprimis hoc proderit iis, qui ad cognitionis gradum tertium adspirant. Ex hisce enim perspiciunt, quomodo ex cognitis alia incognita ratiocinando colligantur, & quomodo haud raro praxes prorsus inexpectatæ eademque longe utilissimæ ex theoriis deriventur, quarum tantam prævidere non licebat utilitatem. Sane non alia de causa, postquam Canon sinuum & tangentium jam fuit constructus, Mathematici tamen recentiores alios eosdem construendi excogitarunt modos, quam quibus usi sunt illorum conditores. Non alia de causa, postquam docuimus Canonis sinuum atque tangentium constructionem, adjecimus scholion (§. 27 *Trigon.*), in quo monemus, eundem adhuc multis aliis modis construï

posse; laudavimusque URSINUM, qui nonnulla præclara dedit, & in Algebra, ubi de serierum doctrina agitur, ostendimus, quomodo pro sinibus & tangentibus, nec non pro logarithmis reperiantur series infinitæ, ex quibus per approximationem deducuntur numeri, qui satisfaciunt.

§. 142. Trigonometria non modo pars quædam Artis inveniendi specialis est, cujus usus in aliis Matheseos partibus elucet (§. 137); sed tota etiam ita digesta, ut appareat, quomodo singula fuerint inventa, modo observare volueris, quæ de acquirendo cognitionis gradu tertio præcepimus capite primo. Ab ea igitur regulas generales Artis inveniendi non modo abstrahere licet; verum si præscripto a nobis modo, ad quem hic provocamus, pertractetur, ad ipsam quoque Artem inveniendi acquirendam aliquid conferet. Quamobrem studium trigonometricum rite instituendum tam iis, qui ad tertium cognitionis gradum in Mathesi adspirant, quam illis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, commendandum.

C A P U T IV.

De Studio Algebra, seu Analyseos mathematicæ in specie.

§. 143. **A** Nalysis mathematica est ipsa Ars inveniendi, qua hodie utuntur Mathematici in verita-
Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

tibus mathematicis investigandis. Huic adeo operam dare debent, quotquot ad cognitionis gradum tertium in

D d

Mathesi

Mathesi adspirant. Etsi enim demonstrationum more nostro facta resolutio etiam analytica sit, ut eodem modo ex hypothesi data inveniri possit, quo demonstrandum quod demonstratur; non tamen iis detegendis sufficit, ad quæ Analysis recentiorum ducit, tota vulgo Algebrae nomine appellari solita. Etenim, per Algebram, paucis cognitis, invenire licet quæ, si more veterum detegenda essent, longam rerum inventarum seriem supponerent. Quid, quod facili labore eruantur, quæ Herculeo investiganda essent? Hæc sane ratio est, cur inventa Mathematicorum recentiorum longissimo intervallo post se relinquant inventa Veterum, & quod uno seculo plura fuerint detecta, quam tot seculis inveniri potuerint, quibus Mathesis antea fuit exculta. Sane si ARCHIMEDES & APOLLONIUS nostro ævo reviviscerent; in stuporem raperentur, visis inventis recentiorum, quæ per Algebram fuerunt in aprium producta: neque enim unquam sibi persuasissent, patere ad talia mortalibus aditum.

§. 144. Non tamen omnia per calculos algebraicos erui possunt, quæ ad Geometriam spectant. Patet id ex ipsa Geometria elementari. Etenim quæ ibidem de lineis perpendicularibus, de parallelismo linearum, de angulis, de congruentia & similitudine triangulorum, aliisque nonnullis demonstrantur, per Algebram investigari nequeunt.

Pendent enim hæc a situ linearum, quem ad se invicem habent. Calculus vero algebraicus est calculus magnitudinum, non situs. Unde LEIBNITIUS in Analysisi recentiori adhuc desiderari monuit calculum situs, a calculo magnitudinum prorsus diversum; quem tamen nec ipse dedit, nec dedit adhuc alius, sed in desideratis numeramus.

§. 145. Similiter Analysis Veterum, qualem loquitur nostra demonstratio- num analysis, non eam esse qua, Algebra inventa, carere possimus, haud difficulter ostenditur. Etenim antequam problemata geometrica, vel alia in Mathesi mixta ad Geometriam puram reducta, per Algebram solvuntur, reducendæ sunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo supponit præparationem methodo Veterum inveniendam, verum etiam ipsamet per eandem methodum eruenda. Accedit subinde occurrere problemata, etiam in altioribus, quæ methodo Veterum multo brevius & elegantius solvuntur, quam per calculum algebraicum, qui haud raro admodum perplexus & nimis longus est. Accedit, quod absque omni theoria calculo algebraico minime sit locus. Hinc quæ problemata physico-mathematica, vel etiam mechanico-physica solvunt, quædam tanquam cognita sumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut sumant nondum satis explorata, vel si ea demonstrare voluerint; quæ certa sunt & methodo Veterum rigide

rigide demonstrari poterant in dubitationem adducant; ut adeo, quæ per calculum ex assumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel suspecta reddantur acutioribus, rigori Veterum adfueris. Immo nullum est dubium, quin plura irrepperint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum revisione quadam indigerent, & haud pauca firmitiori fundamento superstrui mererentur. Nec alia ratio est, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controversiæ, quales Veteribus erant ignotæ. Optime igitur sibi consulunt, qui methodum Veterum cum algebraica Recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum NEWTONO (§. 101), quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc hodie properent, qui inter Mathematicos eminare volunt.

§. 146. In *Analysi* nostra, primo loco occurrit *Arithmetica speciosa*, quam etiam *literalem* appellare solent. Primo loco agitur de signis tam primitivis, quam derivativis. Occurrunt nempe signa quantitatum, & operationum arithmeticarum, quas vulgo species *Arithmeticæ* vocant. Quantitates, cum sint numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), per determinatos explicabiles sunt. Quamobrem suadendum tyronibus, ut literas, quibus indignantur quantitates, per plures numeros diversos explicent. Quoniam vero eadem quantitates etiam sub se comprehendunt quamli-

bet magnitudinem; igitur non minus consultum est, ut etiam per magnitudines, veluti per lineas, explicentur. Linearum enim, & magnitudinum quarumvis determinatarum ratio ad aliam homogeneam, quæ pro unitate sumitur, per numeros determinatos definiri potest; cum numeri revera omnes, tam rationales, quam irrationales, nonnisi rationem ad unitatem expriment. Nimirum, quod literis generaliter, hoc est, indeterminate designatur, per numeros determinate exprimitur; itidemque per magnitudines determinatas; quatenus harum ratio ad aliam homogeneam pro unitate assumtam numeris, sive rationalibus, sive irrationalibus, exprimi potest: sit ita, quod hoc variis modis fieri possit pro diversitate ejus, quæ pro unitate sumitur, nec semper hoc præstare valeamus. Qui theoriæ entis universalis, ab ipsa *Mathesi* abstrahendam, perspectam habet, multo intimius quæ dixi perspiciet, quam qui ab omni *Philosophia* prorsus alienum habet animum.

§. 147. Qui *Artem* inveniendi in genere curæ cordique habent; modo universalis a specialibus abstrahere didicerint, multa animadvertent ad *Charactèristicam* universalem spectantia, quam esse partem *Artis* inveniendi ipsa *Arithmetica* universalis, & calculus differentialis docet, suoque ostendemus loco, si quando ad *Artem* inveniendi explicandam ordo nos deducet. Ipsa autem

Ars Characteristica universalis plurimum lucis affundet, tum notationi numerorum in Arithmetica, tum signis, quibus utimur in calculo literali, sive communi, sive differentiali. Ceterum hic notandum est, signa primitiva, quæ in alia resolvable non sunt, respondere notionibus confusis; derivativa vero distinctis: quemadmodum suo loco demonstrabimus. Qui enim novit differentiam, quæ inter notiones distinctas & confusas, quoad usum earundem, intercedit, quantæ sit utilitatis huc adverti animum facile perspiciet.

§. 148. Ipsum algorithmum in integris satis perspicue explicavimus. Tyrones sibi eundem familiarem reddent, ubi diversis modis exempla literalia explicaverint per numeros determinatos, si ita visum fuerit, etiam per concretos, quemadmodum ostendimus (§. 28, 30 *Analys.*). Qui in Arte inveniendi generali proficere volunt, iis consultum est, ut ex ipsis hisce exemplis in numeris concretis datis addiscant, quomodo algorithmus literalis ex notionibus communibus deducatur, per quas primum inventoribus innotuerunt regulæ, quibus in eodem utimur; quamvis idem, utut non eadem facilitate, jam ex Elementis Arithmeticæ ac Geometriæ addisci poterat. Plurimum enim prodest ut noris, omnem tandem cognitionem humanam ex notionibus communibus

fuisse deductam, in quocunque scientiarum genere. Et in Ontologia jam me monuisse memini, EUCLIDEM Elementa sua reduxisse ad notiones communes; consequenter, per ea, omnem Mathesin. Hoc notasse etiam usui erit in Mathesi mixta: demonstrabitur autem in Arte inveniendi generali, aliter fieri hoc minime posse.

§. 149. In multiplicatione quoad usum signorum fictiones occurrunt, veluti si quantitas sive positiva, sive negativa, per privativam multiplicanda venit (§. 34, 36 *Arithm.*). Unde liquet usus fictionum, ad conservandam notionum universalitatem. Etsi autem regulas, in subsidium vocata Geometria, demonstravimus; ut ad imaginationem reducantur, quæ vi intellectus concipienda; consultum tamen est, ut tyrones exempla statim in numeris addant, in iis regularum veritatem perspecturi, vel ipsas etiam regulas ex iisdem deducturi, quemadmodum in Elementis Germanicis feci. Clarius enim in numeris liquet, cur addendum sit, quod plus fuerat subtractum, vel subtrahendum, quod plus fuerat additum, ubi conceptibus universalibus, utpote nimium abstractis, nondum fueris aduetus: id quod initio studii algebraici supponi nequit.

§. 150. Algorithmus fractionum literalis cum numero idem est; cum quantitates, quæ literis designantur, sint numeri indeterminati; regulæ autem

autem hujus algorithmi ex notione numeri generali fluant; consequenter ex iis deducantur, quæ numeris determinatis & indeterminatis communia sunt. Hinc tyrones sibi consulunt, si literis numeros substituant determinatos, ut clarius appareat, nihil hic occurrere diversitatis. Quæ vero problemate 7, & ejus corollariis, ac scholiis (§. 45 & seqq. *Analys.*), de seriebus infinitis per divisionem prodeuntibus docentur, initio prætermitti possunt ab iis, quorum attentio facile defatigatur; donec multo inferius in doctrina de seriebus infinitis iisdem habuerint opus, ubi attentio nihil amplius difficultatis facessit, cum multo usu jam major gradus fuerit acquisitus.

- §. 151. Multiplicatio & divisio potentiarum, & elevatio ad potentiam, atque extractio ex radice, a Logarithmorum doctrina pendet, quam in Arithmetica tradidimus. Quamobrem, nisi hic in tenebris versari volueris, illam ante tibi perspectam reddere debes, quam ad Algorithmum dignitatum accedas. Inprimis autem hic notanda est reductio quantitatum irrationalium ad formam rationalium, & unitatis ad x^0 (§. 57, 55 *Analys.*), quoniam hæc reductio non modo multiplicem, eundemque prorsus eximium & inexpectatum, in altioribus habet usum; verum etiam apertissime loquitur, quantum interfit inter characteres primitivos & derivativos: id quod Arti

characteristica generali, quam partem quandam Artis inveniendi esse supra jam monuimus, notiones fecundas suppeditat.

§. 152. Usus hujus reductionis analyticus in Arithmetica irrationalium conspicitur; præsertim ubi ea, quæ nos de eadem tradimus, cum illis conferre velis, quæ vulgo in eadem docentur, veluti cum calculo irrationalium in Elementis Algebræ OZANAMI. Sane tractatio nostra tota vere analytica est, qualem requirit *Analysis* recentiorum mathematica. Et qui ad cognitionis gradum tertium adspirant, hinc discunt, quemnam facere tenentur characterum derivativorum usum; cumque inferius per Algebram eruamus (§. 146 *Analys.*) quæ hic ex characterere derivativo, regulis Artis characteristica generalis convenienter, deducuntur; hinc porro discere licet, quomodo ex characteribus, derivativis, modo magis naturali & ad *Analysin* Veterum propius accedente, eruantur, ad quæ Algebra via quadam extraordinaria ducit: sit ita quod tyrones, quibus intimius singula perspicere nondum datur, Algebræ magis fidant, quam Arti characteristica, quemadmodum indigitavi in scholio problematis 19 (§. 60 *Analys.*). Illustratur quoque doctrina fictionum in Arte inveniendi utilium, radicibus imaginariis, de quibus in scholio tertio problematis 13 (§. 71 *Analys.*) diximus. Et perplexa EUCLIDIS

de irrationalibus doctrina, ope hujus characteristica, ab omni perplexitate liberari, eidemque plena lux affundi potest; ut non amplius habeant, quod de obscuritate illius conquerantur, qui eandem ex Elementis hodie vulgo eliminare solent.

§. 153. Quibus calculus irrationalium sub initium molestus est, iisdem prætermittant, & statim ad usum calculi literalis in inveniendis theorematis se transferant, absoluto algorithmo integrorum & fractionum; donec multo usu calculum literalem magis familiarem sibi reddiderint, majusque acumen acquisiverint ejus applicatione, & attentione majori uti didicerint. In ipso autem progressu patebit, quandonam calculo irrationalium habeas opus; ut gradum sistere & ad ea, quæ in anterioribus neglecta fuerunt, regredi te nearis.

§. 154. Sola Arithmetica literalis sufficit ad invenienda longe plurima, quæ in Elementis *Euclideanis* docentur; ita ut, qui eam didicit, absque ullo negotio eadem facilitate theoremata *Euclideanæ* reperire possit, qua exemplis illustrantur. Ostendimus hoc capite tertio. Neque in problematis resolvendis, quæ ibidem proponuntur, alia notanda sunt, quam ut attendatur, quomodo datorum denominatio fiat, & ut literis designatæ quantitates numeris quoque exprimantur; quo pateat quid intersit discriminis inter exempla universalia

& singularia, & hisce illis lux quædam affundatur, qua indigent tyrones. Observandum tamen, calculum in casu singulari instituendum esse, juxta regulas calculi universalis seu literalis, ubi iste pleniori luce fulgere debet. Ex. gr. in problemate 20 (§. 81 *Analys.*) jubemur determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt. Diximus radicem unam n , alteram $n + 1$. Dicantur in casu singulari 7 & $7 + 1 = 8$. Quodsi quadratum majoris per calculum universalem reperiatur, erit $7 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 1 = 64$; Quadratum minus $= 7 \cdot 7$, Differentia $2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1 = 15$. Ita nimirum constabit, calculum universalem etiam exerceri posse in numeris, & sic absque calculo literali eadem detegi posse, quæ per literalem eruuntur; quemadmodum & in Arithmetica fecimus, ubi v. gr. in genesin numerorum quadratorum & cubicorum inquisivimus. Consultius tamen est uti calculo literali, qui hoc commodo gaudet, ut numeri determinati ab indeterminatis sua sponte sese distinguant: cum si notis numericis uti volueris, artificiiis demum opus sit, quibus hoc fiat. Ita in allato exemplo $2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1$, numerus binarius 2 est determinatus, idem in omnibus exemplis, sed 7 est indeterminatus, qui in omni exemplo alio alius. Collatio autem calculi literalis cum calculo universali, in exemplis singularibus, usui esse poterit

terit ad inveniendâ artificia, quibus absque ulla confusione calculus universalis in numeris utiliter exercetur. Nostrium non est ea hic docere uberius, quæ Ars inveniendi jure suo sibi vindicat. Etli autem calculus universalis in numeris instituendus superfluous videri poterat, literali invento; falluntur tamen, qui ita sentiunt. Facit enim ad facile demonstrandum haud pauca in gratiam eorum, qui ad Analysin animum appellere nolunt, nec difficiles demonstrationes capiunt; quemadmodum patet per ea, quæ de genesi numerorum quadratorum & cubicorum in Arithmetica docentur. Neque nullus quoque ejus usus est in Analysis speciosa, prout ex sequentibus constabit. Taceo alia, quæ in ejus favorem dici poterant.

§. 155. Multa hic facillime, absque ullo fere negotio, eruimus theoremata, quæ in Elementis EUCLIDIS extant, eorumque plura erui poterant, nisi hæc specimina sufficerent. Alia vero investigavimus per Algebram. Enimvero jam supra monuimus (§. 144), per calculum literalem, qui nonnisi magnitudinum calculus est, non omnia in Geometria demonstrari posse theoremata; sed quædam pendere a situ; ad quæ investiganda & analytice demonstranda, peculiaris requiratur calculus situs. Quodsi Analysis situs fuisset reperta; non inconsultum foret in-

tegra Elementa EUCLIDIS analytice demonstrari; ut inter methodum Veterum, & Analysin Recentiore[m] clarius pateret differentia. Quodsi quis eam investigare voluerit, is novas condere tenetur definitiones situs notionem involventes; veluti quod *Punctum* sit situs sui unicum, quod *Circulus* sit figura plana, in cujus perimetro singula puncta ad punctum quoddam intra eam dato eundem situm habent, quod *Linea* una sit ad alteram *perpendicularis*, si punctum quodcunque in ea assumptum sit situs sui ad idem punctum alterius unicum. Dicitur autem *situs sui unicum*, quod ad aliam magnitudinem datam, seu punctum aliud datum, cum habet situm, ut nullum aliud præter ipsum eundem situm habere possit. *Eundem* vero *situm* habent, inter quæ idem extensum, veluti eadem linea recta poni potest (§. 5 *Geom.*). Præterea opus est novo calculo, calculo nempe situs: quem investigaturus perpendere tenetur, calculum in genere esse inventionem characteris derivativi ex aliis, sive primitivis, sive derivativis, per continuam æquivalentium substitutionem (§. 298 *Psyche. empir.*). Hinc enim conficitur, diversos determinandos esse situs possibiles eorumque excogitandos characteres, & ut hos legitime combinare liceat, requiri axiomata quædam generalia aut, si mavis, regulas quasdam generales, quibus perficitur combinatio & substitutio.

Sed

Sed nobis minime vacat, ut in talibus investigandis ingenii nostri vires exerceamus, qui magnum adhuc campum emetiri tenemur, antequam Philosophiam universam ad umbilicum perduxerimus. Sufficit aliis monstrasse viam, qua sit ad metam contendendum. Reddat eandem proprio ingenio & propria industria perviam, qui hanc attingere voluerit.

§. 156. Quanta vero sit vis Artis characteristicae, non modo ex singulis problematis, sed vigesimo praefertim nono, ejusque corollariis (§. 95 & seqq. *Analys.*) perspicitur; in quo binomium ad dignitatem quamcunque evehere docemur; quod deinde ad extractiones radicum (§. 98 *Analys.*), & ad infinitinomium ad dignitatem datam evehendum transferimus (§. 102 *Analys.*). Huc animum advertere debent non modo, qui in *Analysi* Recentiorum feliciter progredi voluerint, verum etiam qui eidem, Artis generalis invenienti causa, operam navant.

§. 157. Quoniam vero non uno artificio analytico utimur in problematis istis per calculum literalem solvendis; singulis autem artificiis insunt generales notiones, quae ad Artem invenienti generalem spectant; eas inde abstrahere tenentur, qui Artis generalis invenienti gratia in *Analysi* Mathematicorum versantur: ut vero hoc facere possint, acquirere sibi tenentur acumen pervidendi abstracta in concretis, quod quomodo com-

paretur docebimus in philosophia morali, ubi praxin virtutum intellectualium, inter quas etiam sibi acumen istud locum vindicat, exposituri sumus. Quodsi vero quis in addiscenda Mathesi eo modo versatus fuerit, quem capite primo praescripsimus, & inprimis in representatione definitionum, propositionum, & demonstrationum symbolica industriam suam exercuerit, atque inprimis ad animum probe revocaverit, quae in scholio generali ad algorithmum integrorum de abstrahendis regulis generalibus, juxta quas intellectus in eodem dirigitur, inculcavimus; is se hujus acuminis compotem fieri animadvertet: quod quomodo fiat, nunc exponere non lubet, ne extra oleas evagari videamur. Quemadmodum vero Mathesis & Philosophia mutuas sibi suppetias ferunt; ita quoque ad acumen istud ipso usu acquirendum haud parum confert Logica, qualem nos tradidimus idiomate Latino. Immo Ontologia etiam, & Psychologia, adjumento esse poterit. Quamobrem autor fui, ut, absolutis Arithmeticae ac Geometriae Elementis, studium Philosophiae cum mathematico jungatur. Et si quis in Arte invenienti generali ex studio Mathe- seos proficere voluerit; ei suademus, ut, postquam in Philosophia fuerit cum laude versatus, Mathesin universam denuo pertractet, & huc inprimis animum advertat, quod ad usum facultatum in veritate cognoscenda

cenda usui esse potest. Nullum enim dubito fore, ut perspicillis philosophicis usus plus videat, quam cum iisdem destitueretur.

§. 158. Inprimis autem opera danda est, ut tempestive adsueciamus formulis algebraicis, tam per numeros, quam per lineas, explicandis. Quamobrem consultum est, ut data exprimentur, tum numeris, tum lineis, & tam in formula substituantur pro literis numeri, quam figuræ construuntur juxta formulam: id quod cum in præsentī capite facillime succedat, plurimum confert ad formulas per Algebram erutas, geometricæ præsertim, minori molestia construendas. Ex. gr. in problemate 24 (§. 90 *Analys.*), partes totius sunt Q & q , & prodit aggregatum ex Q^2 & $Q^2 + 2 Q q + q^2 = 2 Q(Q + q) + q^2$. Quodsi fiat $Q = 4$ & $q = 3$, erit $Q + q = 7$, $Q^2 = 16$, $(Q + q)^2 = 49$, adeoque $Q^2 + (Q + q)^2 = 65$. Sed $2 Q = 8$, adeoque $2 Q(Q + q) = 56$. Est vero $q^2 = 9$. Quare $2 Q(Q + q) + q^2 = 65$. Habes itaque etiam examen, quali inprimis indigent tyrones, ut tanto clarius perspiciant, quod per calculum fuit erutum a veritate non esse alienum. Et si enim exempla singularia non evincant veritatem in universali; tyronibus tamen magis satisfaciunt, quam si animum ad calculum advertentes nullibi a se aberratum esse observent. Neque destituitur summa pro-

Walsi Oper. Mathem. Tom. V.

babilitate, si quidem formula analytica cum exemplo in numeris consentit. Quoniam enim numeri nullo consilio eliguntur, sed potius sumuntur, prout eos casus obtulerit; vix credibile est te casu incidere in numeros, qui ex ratione singulari satisfaciunt formulæ, in omni casu minime veræ. In præsentī casu dubium hoc esse nullum, quod quis movere poterat, ostendi nullo negotio poterat, si calculus universali ratione instituitur etiam in numeris. Etenim si $Q = 4$ & $q = 3$, habebis $2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3^2 = 2 \cdot 4(4 + 3) + 3^2$, hoc est, $2 \cdot 16 + 2 \cdot 12 + 9 = 8(4 + 3) + 9$, seu $32 + 24 + 9 = 32 + 24 + 9$. Vides autem pro numeris 4 & 3 substitui posse duos alios quoscunque, ceteris semper eodem modo sese habentibus. Sed nolim tyrones talibus defatigari, nisi tempestive adsuefieri voluerint calculo, universali ratione in numeris instituendo: quo in casu consultum foret, ut numeri determinati, in omni casu iidem, qualis hic binarius ter occurrit, virgula transversa notentur, nempe ut scribatur $2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3^2 = 2 \cdot 4(4 + 3) + 3^2$. Quodsi Q & q explices per lineas & construas tam quadratum ex composita $Q + q$, quam ex una Q , & deinde rectangulum ex composita Q & q in rectam Q bis sumtam atque quadratum lineæ alterius q , formulam geometricæ repræsentabis. Sed utriusque figuræ æqualitatem intuitive non cognosces,

E e

quem-

quemadmodum numerorum, qui calculo secundum formulam instituto prodeunt. Hoc tamen non obstante figurarum constructio non omni utilitate caret. Neque enim figuræ eum in finem construuntur, ut examinis vicem subeant; sed ut discamus, quomodo formulæ analyticæ geometricæ construantur, & earum sensus per figuras explicetur. Subinde tamen accidit, ut non minus veritatem formulæ intuendam præbeant figuræ, quemadmodum numeri. Taceo quod mechanicæ demonstrationi, de qua supra diximus, hic sit locus, si ad principium congruentiæ confugas & partes a figura una rescissas alteri superimponas, prout ipse usus docuerit. Enimvero quibus talia inutilia videntur, is ea prætermittat. Neque enim omnia conducunt omnibus.

§. 159. Nimirum calculus literalis, & ejus applicatio ad solutionem problematum, doceri poterat pueros & adolescentes; quorum captui consulitur, si, quæ abstracta sunt, ad sensum & imaginationem reducantur. In omni Philosophia utilis est hæc reductio; ut eidem nunquam satis adfueri possit, qui in hac inoffenso pede progredi voluerit. Quamobrem, qui, intellectus perficiendi gratia, in Algebra versantur, talia negligere non debent, quæ superflua ac puerilia videntur aliis, qui in nuda veritatum mathematicarum cognitione acquiescunt. Maximæ

quoque utilitatis est ad recte philosophandum, si actus imaginationis ab operationibus intellectus discernere valeas, ne abortus imaginationis cum notionibus realibus confundas: quemadmodum accidit summis etiam Mathematicis, qui imaginaria a realibus separare non didicere, neglectis exercitiis, quæ huc facere poterant.

§. 160. Difficilis est tyronibus doctrina de ratione quantitatum, quam in Arithmetica demonstravimus; præsertim si theoremata non exponantur per numeros, & demonstratio ad exempla non applicetur. Delectabuntur itaque, quando in problemate 32 (§. 124 *Analys.*) videbunt, quomodo per calculum literalem, absque ullo negotio, omnia pateant; ut ad ea capienda sensuum magis usu, quam intellectus operationibus opus sit. Hæc ipsa autem voluptas, non modo amorem studii algebraici, sed & alacritatem idem prosequendi instillabit. Consultum vero est, ut literæ non minus per numeros rationales, quam irrationales explicentur: id quod non modo universalitatem theorematum per calculum erutorum confirmabit, verum etiam exercitiò calculum irrationalium reddet magis familiarem. Immo, ne multitudine theorematum hic coacervatorum obruaris, sed ut singula absque molestia memoriæ insigantur, nisi hoc jam factum fuerit in Arithmetica, hoc ipso obtinebis. Quoniam vero theoremata verbis pure enun-

enunciata in usum futurum memoriæ mandanda sunt (§. 21); non minus consultum est, ut singula verbis enuncies. Hoc modo enunciatorum faciliior quoque erit comparatio cum theorematibus in Arithmetica propositis; cumque ea tota nitatur distinctis notionibus, faciet idem institutum ad notiones confusas ad distinctas revocandum, & animum impatientem reddet ad acquiescendum in confusis, per quas nobis veritatem perspicere videmur: id quod haud parum proderit in Philosophia ad præcavendam præcipitantiā, qua in periculum errandi adducimur, & in errorem haud raro præcipites damur. Theorema primum, quo investigatur ratio factorum communem efficientem habentium, multiplicatis scilicet duabus quantitatibus, rationem quamcunque inter se habentibus, a & ma , per eandem tertiam c , ita repræsentatur:

$$\begin{array}{r} a : ma \\ c \quad c \\ \hline ac : mac = a : ma \end{array}$$

Per numeros rationales explicabitur hoc modo:

$$\begin{array}{r} 8 : 12 \\ 3 \quad 3 \\ \hline 3 \cdot 8 : 3 \cdot 12 = 8 : 12 \\ \text{seu } 24 : 36 = 8 : 12 \end{array}$$

Quodsi 24 divides per 36 & 8 per 12; fractionibus $\frac{24}{36}$ & $\frac{8}{12}$ reductis, prodibit utrobique $\frac{2}{3}$, idem nempe

exponens (§. 136 *Arithm.*), quemadmodum requirit proportio (§. 149, 155 *Arithm.*).

Per numeros irrationales explicabitur hoc modo:

$$\begin{array}{r} \sqrt{5} : \sqrt{3} \\ \sqrt{7} \quad \sqrt{7} \\ \hline \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} : \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35} : \sqrt{21} \\ \text{seu } \sqrt{35} : \sqrt{21} = \sqrt{5} : \sqrt{3} \end{array}$$

Quodsi denuo $\sqrt{35}$ divides per $\sqrt{21}$ & $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$, prodibit utrobique exponens idem $\sqrt{15}$.

§. 161. Quodsi existimes, committi hoc pacto circulum vitiosum, cum fractionum reductio ad minores terminos supponat rationum doctrinam, & calculus quoque irrationalium eadem nitatur; non unum est, quod respondeo. Primum constat, calculum fractionum & irrationalium erui posse per Algebram, quemadmodum specimine quodam docuimus (§. 146 *Analys.*), & quod idem imitari detur in casibus aliis, etiam in algorithmo fractionum, monuimus (§. 147 *Analys.*). Sane per Algebram reperiri posse reductionem fractionum ad minores terminos, quod dubio careat, exemplo singulari hoc docere lubet. Sit fractio reducenda $\frac{9}{12}$ Fiat

$$\begin{array}{r} \frac{9}{12} = y \\ \hline \text{erit } 9 = 12y \\ \hline 3 = 4y \\ \hline \frac{3}{4} = y \\ \text{adeoque } \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{array}$$

E c 2

Quodsi

Quodsi pro $\frac{a}{12}$ substituas $\frac{a}{ma}$ vel si mavis $na: ma$; habebis regulam, quæ in Arithmetica ad fractiones ad minores terminos reducendos præscribitur. Cumque calculus hic nitatur axiomatis notissimis, intelligi etiam poterit ab iis, qui Algebram nondum didicerunt. Deinde notandum est, nos calculum fractionum & irrationalium jam tradidisse, independentem a problemate 32 (§. 124. *Analys.*), adeoque absque circulo vitioso a nobis illustrationis gratia adhiberi posse, quæ aliter jam demonstrata sunt, ut eorum, quæ traduntur, appareat consensus. Quamprimum vero scrupulus iste te angit, tollitur extemplo eo, quem diximus, modo. Quodsi quis Elementa Arithmeticæ & Geometriæ methodo analytica recentiorum demonstrare vellet; is calculum literalem cum numero in Arithmetica combinare poterat, & algorithmum fractionum, nullis suppositis de ratione quantitatum theorematis, per Algebram elicere tenetur, antequam per calculum literalem demonstret theoriam rationum. Ceterum hic notari velim, quam facile committatur circulosus vitiosus, qui non advertitur, ab iis, qui extra systema propositiones aliquas demonstrare volunt; ut agnoscatur necessitas systematum veri nominis in omni scientiarum genere, & ut principia, quibus utimur in demonstrando, desumantur ex systemate, in quo pro-

positiones demonstrandæ vel non occurrunt, vel saltem non anteriore loco, quam principia ista, collocantur. Videmus etiam per præcipitantiæ judicare eos, qui demonstrationi cuidam circulum vitiosum simpliciter imputant, qui nonnisi in relatione ad certum aliquod systema committitur; ubi nondum demonstraverunt, non posse condi systema, in quo veritates ita sibi invicem subordinentur, ut demonstrationi isti absque circulo vitioso sit locus. Ad talia omnino animum advertere tenentur, quotquot intellectus perficiendi curam gerunt.

§. 162. Inprimis etiam attentionem meretur problema 29 (§. 95 *Analys.*), quo theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evchendo investigatur, ope solius calculi literalis; quatenus scilicet ostendit, quomodo theoremata infinita ad unicum reduci possint, ita ut unum æquipolleat infinitis; ut præjudicium illud evellatur animo, quasi intellectus finitus non sit capax infiniti. Falsum enim esse hinc intelligitur, quod aliis quoque speciminibus comprobabitur in sequentibus, intellectum infinita comprehendere non posse; cum hic formulas numero infinitas sub una quadam contentas exhibeamus. Rationem, cur hoc fieri possit, perspiciet, qui attenta mente perpendere voluerit, quæ hic docentur. Nec minus idem problema singularem attentionem mere-

tur.

tur, ob artificia singularia, quibus in eodem solvendo utimur, & quorum usus etiam est in aliis, immo quæ artificia heuristica generalia suggerunt, extra Mathesin etiam usurpanda.

§. 163. Elementa nimirum Analyseos ita conscripsimus, ut paucas præscripserimus regulas, reliqua vero artificia ipso usu insinuentur: quibus cum utendum sit, non modo in eo problemate ubi primum adhibentur, verum etiam in aliis ubi adhiberi possunt; si reflectendo super iisdem distincta eorundem notio animo imprimitur, & facilius eadem memoria retinentur, & eorum statim meminimus, quando iisdem denuo opus habemus, nec tentatis demum frustra aliis in ea casu incidimus. Generalia vero Artis inveniendi præcepta ut inde abstrahat, qui artificia quibus utimur nondum distincte animo concepit, & in rationes eorum inquisivit, prorsus impossibile est. Quoniam generalia constituuntur similitudine latente in specialibus; ingenii quoque acumen mirifice augetur generalium ista abstractione, quam juvant regulæ de notione generis ex data notione speciei formanda (§. 710 *Log.*), & de notione generum superiorum ex notionibus inferiorum derivanda (§. 711 *Log.*), quemadmodum applicationem extra Mathesin adjuvant regulæ de notionibus specierum ex notione generis (§. 712 *Log.*), & de notionibus

specierum aliarum ex notione speciei unius deducenda (§. 714 *Log.*); quas singulas & ipsas a Mathesi abstrahi posse, exempla docent, quibus problemata hæc illustravimus in Logica.

§. 164. Nemo a nobis requisiverit, ut artificia specialia, quibus utimur, ad notiones generales revoce- mus, & alias speciales determinemus, quibus extra Mathesin in aliis veritatibus investigandis opus est. Hæ enim pertinent ad Artem inveniendi generalem, quam suo loco, si Devisum fuerit, explicaturi sumus: ubi in notis adjectis doceri poterit, quomodo ab artificiis analyticis Mathematicorum abstrahantur, quæ in ea ex notionibus ontologicis, & psychologicis, aliisque Philosophiæ principiis, demonstrantur. Sufficit excitate attentionem illorum, qui studium Philosophiæ cum mathematico conjungunt, ea methodo philosophantes, qua nos utimur.

§. 165. Enimvero progrediamur ad Algebram proprie sic dictam. Algebra primum non erat nisi regula arithmetica, quæ instar regulæ trium in eadem docebatur, & in numeris tantummodo exercebatur. Arithmetica literali a VIETÆ, Gallo, inventa, latior patebat ejus usus; cum sub literis, non solum numeri seu quantitates discretæ, sed & magnitudines seu quantitates continuæ comprehenderentur. Unde calculum literalem VIETÆ ad Geometriam elementarem applicabat

GHETALDUS Italus in *Libris de Resolutione & Compositione mathematica*. Cum HARRIOTTUS Anglus, Arithmeticam literalem ope characteristicae magis perfecisset, & CARTESIUS genuina characteristica potentiarum usus, (quemadmodum jam obiter monuerat KEPLERUS in *Harmonica*, & rationem designationis perspicue multo ante docuerat STIFELIUS in *Arithmetica integra*, numerorum cosmicorum naturam ex genuinis fundamentis eruens,) Algebram quoque ad Geometriam superiorem applicaret; illustrior adhuc ejus evasit usus. Nos igitur ut in tradenda Algebra gradatim progredieremur, primum eam exercere docuimus in problematis arithmetice determinatis; deinde etiam in indeterminatis; mox in problematis Geometriæ elementaris; tandemque in problematis Geometriæ sublimioris. Quoniam vero Geometria sublimior aliud adhuc calculi genus requirit, in quo quantitates supponuntur infinite parvæ, methodo a KEPLERO in *Stereometria* primum quasi obiter indicata, a CAVALERIO in *Geometria Indivisibilium magis promota* & a STEPHANO præsertim DE ANGELIS, atque GREGORIO A S. VINCENTIO ulterius exculta; hoc quoque calculi genus, cum reductione quantitatum ad series infinitas per divisionem MERCATORIS, & extractiones radicum *Newtonianas*, combinatum, explicavimus; & Al-

gebræ usum, adhibito hoc calculo in Geometria sublimiori, multo latiorrem exposuimus. Ceterum cum in Geometria elementari omiserimus theorematum nonnulla, quæ difficilius demonstrantur; qualia sunt de multiplicatione anguli, seu divisione circuli & arcus in partes quotcunque æquales, & de investiganda soliditate corporum regularium, nec non de inscriptione quorundam polygonorum in circulo ab EUCLIDE demonstrata; Geometriam vero sublimiorem methodo Veterum demonstratam prorsus non attigerimus; quæ hic desiderari poterant, per Algebram investigare docuimus, ut una eademque opera & Ars inveniendi exerceretur, & theorematum scitu necessariorum cognitio acquireretur. Quoniam enim non cujusvis est in numeris, & lineis, atque figuris consensescere, & ab omnibus studium Philosophiæ cum mathematico conjungi consultum sit; plerique etiam non alio fine Mathesin puram tractare debent, quam ut in Philosophia aliisque studiorum generibus feliciter progrediantur; Elementa Arithmetice ac Geometriæ abunde sufficere existimavimus, ut genuinam methodum, sine qua ad solidam rerum cognitionem in quocunque scientiarum genere perveniri minime datur, nobis familiarem reddamus; præsertim si demonstrationes nostro more resolvantur, & singula analytice represententur, quemadmodum capite primo

primo præcepimus ; & ceterarum veritatum mathematicarum facillimo modo acquirendam esse duximus cognitionem.

§. 166. Studium algebraicum ut facilitaremus , primas tantummodo exposuimus regulas (§. 141 , 143 *Analys.*) , easque statim applicavimus ad exempla ; problematis eo consilio electis , ut vel artificium aliquod analyticum animo insinuent , vel veritatem quandam cognitu necessariam doceant. Ita problemate statim 38 , quod in hoc genere primum est , (§. 144 *Analys.*) ostendimus , dari proprietates numerorum singulares , quibus ab omnibus aliis distinguuntur , & quæ differentiam eorum numericam constituunt. Hoc ipso illustratur doctrina de differentia numerica individuorum , in Ontologia a nobis tradita , & in Cosmologia , ac Psychologia demonstrata ; ex doctrina autem de origine idearum in intellectu divino , prorsus a priori deducta , ex ipsa natura & attributis Dei , entis omnium primi , multo clarius elucescens , scholæ autem non satis animadversa , multo minus expensa. Quoniam vero exemplum nonnisi singulare est , numeri nempe nonnisi duodenarii ; sequente statim problemate (§. 145 *Analys.*) theorema generale eruere docemus , tum ut pluribus exemplis confirmetur idea tam nobilis , multique per philosophiam omnem , tam practicam quam theoreticam , usus , tum ut uberius

explicetur artificium problemata particularia , immo singularia , ad universalitatem revocandi ; cuius jam specimina quædam dedimus in anterioribus , veluti cum problema generale de binomino ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analys.*) , de radice quacunque inde extrahenda (§. 98 *Analys.*) & de infinitinomio ad dignitatem quamcunque evehendo proponeremus (§. 102 *Analys.*) , & regulas de permutatione quantitatum , seu variatione ordinis earundem , ad universalitatem revocaremus. Similiter problemate 40 (§. 146 *Analys.*) , specimine quodam docui per Algebram investigari posse talia , quæ aliis etiam modis crui possunt , & in scholio (§. 147 *Analys.*) monui , idem in aliis quoque eodem modo procedere. Quod vero utilitate sua non destituatur , eandem veritatem pluribus modis diversis investigari , supra jam monuimus (§. 161). Illustravimus differentiam , quæ intercedit inter solutionem problematum in numeris abstractis & concretis (§. 161 & seqq. *Analys.*) , & artificia reductionis insinuavimus (§. 163 , 183 , 184 *Analys.*) . Cum de proportionem harmonica & contra harmonica , nec non de numero pronico , & numeris polygonis , aliisque figuratis nihil dixerimus in Arithmetica , ne ejus theoriam nimium extenderemus , & a studio Geometriæ nimis diu detineremus tyrones , studii mathematici facile effecturi desertores ; defectum istum

istum hic supplemus, dum theoremata præcipua ad theoriam istorum numerorum spectantia per Algebram eruere docemus (§. 186 & seqq. ac §. 206 & seqq. *Analys.*). Idem a nobis factum esse in reliquis capitibus, qui animum huc advertere libuerit, facile deprehendet.

§. 167. Inprimis autem singularem attentionem meretur artificium prorsus singulare, quo in summandis quadratis & cubis, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur, utimur (§. 200 *Analys.*), & quod mox ad summandas potentias quascunque numerorum naturalium transferimus (§. 203 *Analys.*), ac deinde ad summandos numeros polygonos (§. 212 *Analys.*), & ad summandos quoque pyramidales adhibemus (§. 216 *Analys.*). Quantum enim eodem præstetur, abunde intelliget, qui quæ hac methodo eruuntur conferre voluerit cum *Arithmetica infinitorum* WALLISII & inprimis BULLIALDI. Facile autem apparet, methodum hanc ad alia problemata arithmetica solvenda transferri posse, perinde ac calculus summatorius in Geometria amplissimum habet usum. Nec puto faciliiori modo potentias, & numeros figuratos summari posse. Loquuntur autem hæc ipsa problemata, & problema de binomio ad dignitatem infinitam evehendo, ac radice quacunque ex eodem extrahenda, ut alia taceamus, quam ardua problemata per calculum lite-

ralem, & Algebram solvi possint, etiamsi paucissima theoria fueris instructus; ut adeo methodi hæc, in Arte inveniendi, præ methodo Veterum sese maxime commendent. Per eas enim aditus ad ea patet, quæ a nostra cognitione intervallo quam longissimo adhuc sunt remota. Clarius idem elucescet in sequentibus. Unde si quis in Mathesi inventorem agere voluerit, ei *Analysis Mathematicorum* recentiorum nunquam satis commendari potest.

§. 168. Per universam *Analysin*, in solvendis problematis, calculum integrum distincte exhibuimus; ut quilibet tyro proprio Marte intelligat, quomodo problema fuerit solutum, & quomodo ordine in solutione sit progrediendum, quem præscribunt regulæ generales ab initio expositæ. Lincis quoque distinximus ea, quæ ex anterioribus concluduntur, ab iis, ex quibus colliguntur per communem algorithmum. Non tamen hoc ipso solutiones reddidimus prolixiores, quin potius in minus eandem spatium haud raro coarctavimus. Et qui citra confusionem, quæ errorem facile parit, absque ulla molestia, problemata solve- re voluerit; eo modo calculum instituere tenetur, quo eundem in contextu representamus. Quilibet adeo experietur, nullibi ipsi esse hærendum, modo attentionem afferre voluerit. Equidem, brevitatis gratia, nonnisi speciminibus quibusdam ostendimus, quo-

quomodo formulæ algebraicæ verbis explicentur, ut prodeant regulæ, per quas problema solvitur in dato quocunque casu particulari; nec non quomodo theoremata ex calculo eruantur. Suadendum tamen tyronibus, ut idem faciant in singulis problematis. Sentient utilitatem, ubi in hoc labore sese præstiterint diligentes. Explicavimus formulas per numeros; ut discant tyrones, quod eadem instar regulæ sint, quæ per calculum eruntur universalem. Initio tamen utilitate sua non caret, si solutionem algebraicam tentent in exemplis singularibus, numeris in locum literarum, quibus quantitates datæ designantur, surrogatis, quemadmodum exemplo aliquo ostendere lubet. In problemate 41 (§. 148 *Analys.*), datur duarum quantitatum summa & eorundem factum, quaruntur quantitates ipsæ. Quare si sit summa $a = 14$, factum $b = 48$; resolutio talis erit:

Sit summa $= 14$, semidiffer. $= x$
factum $= 48$, erit Quantitas

$$\begin{array}{r} \text{maj.} = 7 + x \\ \text{min.} = 7 - x \\ \hline - 7x - x^2 \\ \hline 49 + 7x \\ \hline \text{Factum} = 49 - x^2 \end{array}$$

Ergo

$$\begin{array}{r} 49 - x^2 = 48 \\ \hline 1 - x^2 = 0 \\ \hline 1 = x^2 \\ \hline 1 = x. \end{array}$$

Quare $7 + x = 8$, & $7 - x = 6$.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 169. Quodsi problemata quoque per Algebram numerosam solvas; non modo hinc elucescet discrimen inter Algebram numerosam & speciosam, & hujus præ illa præstantia agnosceretur; cum per istam nonnisi exempla computentur, per hanc vero solutiones, adeoque veritates universales detegantur; verum etiam calculus algebraicus reddetur familiarior & clarior. Hoc vero suademus nonnisi primis tyronibus. Qui enim in calculo jam fuerint versati, istiusmodi exercitiis non amplius habebunt opus. Consultum vero est exemplum calculi numerosi conferri cum calculo specioso; tum ut appareat, quantum convenient, quantum differant, tum ut numerosus lucem affundat specioso. Quodsi quis universalitatem in calculo numeroso conservare velit, haud difficulter idem præstabitur, quemadmodum exemplum modo allatum, & hic alia forma exhibitum, docet:

$$7^2 - x^2 = 48$$

$$7^2 = 48 + x^2$$

$$7^2 - 48 = x^2$$

$$\sqrt{7^2 - 48} = x$$

Vides nimirum, in quolibet casu, x quadrato semisummæ 7^2 subtrahendum esse factum & ex residuo extrahendam radicem, ut habeas semidifferentiam numerorum quæditorum.

Quodsi Veteres hoc animadvertis-

F f

sent;

scent, per Algebram numerosam, ante inventum calculum literalem, non minus veritates universales eruisent, quam nunc per speciosam erui solent. Si enim in calculo numeroso universalitatem conserves, specioso prorsus æquipollet, quemadmodum collatio utriusque calculi intuenti ex tempore prodit. Immo hoc pacto etiam, eodem successu, per Algebram numerosam solvi poterant problemata geometrica, quemadmodum nunc solvuntur per speciosam. Sed de hoc dicemus suo loco. Ratio in aprico est. Per calculum speciosum obtinentur solutiones universales, quia idem in omni casu particulari, & pro literis, quibus quantitates datæ designantur, numeri quilibet substitui possunt, salvo calculo integro. Idem vero succedere eodem modo in calculo numeroso, qui universalitatem conservat, per se patet. Quoniam signa primitiva, qualia sunt quibus exprimiuntur quantitates datæ, prorsus arbitraria sunt; notis autem numericis significatum universalem imponere licet; universum a singulari, quem habent, abstrahere licet: veluti ut 14 non significet summam ex duobus numeris determinatis, (quas hic esse 8 & 6 solutio prodit), sed summam ex duobus quibuscunque numeris, immo generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus compositam, veluti si significet lineam in duas quascunque partes divisam; & similiter 48 non denotet factum ex

duobus numeris determinatis iisdem cum anterioribus, quorum summa est 14, sed potius factum ex duobus quibuscunque aliis, cum illis tantummodo iisdem qui summam conficiunt, vel generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus, cum illis iisdem ex quibus summa componitur; veluti quando 14 significet lineam in duas quascunque partes divisam, si 48 denotet rectangulum ex parte una in alteram.

§. 170. Non difficile fuisset Veteribus hæc animadvertere; si quidem in universalibus in iis, quæ cognoscebant, latentia mentis aciem intendere voluissent, & a notatione numerorum notiones Artis characteristicae universales abstraxissent: ad quod faciendum non defuit ipsis acumen, sed defecit tantummodo attentio ad ea quæ, pro scopo præsentis, satis cognita atque perspecta deprehendebant. Discant hinc velim omnes, quibus puerilia, aut saltem superflua videntur, quæ ad tractandam Mathesin præcipimus; quantum non modo sibi, verum etiam scientiæ desint, qui, quæ se satis intelligere arbitrantur, ea nulla amplius attentione dignantur, & vulgari meditationem ad sublimia nitentibus non convenire arbitrantur. Multo luculentius hæc patebunt, ubi Artem inveniendi explicare licuerit. Nos experti, quantum valeat vulgarium meditatio, nulli dubitamus, quin in Philosophia universa, præsertim in Physica, & Philosophia morali, im-

mo ipsa civili, dudum principia certa, per quæ ad remotiora paratur aditus, constituissent Philosophi; siquidem ad notiones communes, ex maxime vulgaribus derivandas, sufficientem attentionem asferre voluissent. Neque vero existimandum est, convenire hæc iis, quibus ad sublimiora non conceditur aditus. Etenim non leve acumen requiritur, ut notiones communes, quas suppeditant obvia, non modo ad distinctas & determinatas revoces, sed & inde universales abstrahas. Quanam enim, quæso, ratio est, cur notiorum communium, admodum fertilem, quemadmodum vel EUCLIDIS Elementa testantur, immo ipsa quoque Algebra confirmat, non cum hætenus fecerint usum Philosophi, nec etiam in dirigendis actionibus viri prudentes, quem facere poterant, nisi quod negligantur ab iis, qui acumine alios vincunt. Sane cur Mathematici summi, quorum acumen accusari nefas, genuinam demonstrationis formam non apprehenderint, ratio alia non est, quam quod eandem attentione sufficiente dignati minime fuerint, sine qua distinctam ejus notionem consequi minime datur. Constat autem, quantum sibimetipsis defuerint, tum ubi demonstrationes more Veterum in ipsa Mathesi dare voluerunt, tum quando extra eandem veritates quasdam demonstrare conati sunt. Quo majore acumine maxime vulgaria

perlustrantur, eo profundiora in iis latentia in apricum proferuntur.

§. 171. Postquam usum Algebræ in solvendis problematis Arithmeticis determinatis ostendimus, ad problemata indeterminata progredimur capite secundo. Applicamus in eo Algebram ad problemata pleraque DIOPHANTI, a quo horum solutio *Analysis Diophantea* appellari suevit. Ex quo Algebra ad Geometriam, præsertim sublimiorem, & inprimis ad problemata physico-mechanica applicata fuit; Analysis Diophantea negligi cœpit, ita ut præter OZANAMUM in *Elementis Algebra*, vix quisquam fuerit alius, qui ultra *Diophanteos* limites eandem promovere conatus fuerit. Quam minus recte autem hoc fiat, jam LEIBNITIUS monuit, qui ejus præclarum usum in Analysis infinitorum observavit. Singularibus in iis artificiis hand raro opus est, tum si denominationem spectes, tum si reductionem consideres. Quamobrem suadeo, ut, qui horum problematum solutionem expendit, in rationem inquiret, cur denominatio hoc modo fuerit facta & reductio hoc modo instituat, ubi aliquid inusitati occurrit. Ex. gr. in problemate 92 (§. 230 *Analys.*), quo summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere jubemur, ubi latus quadrati majoris dicitur a , minoris b ; latus quæsitum unius appellatur x , latus alterius y & z . Ratio denominationis non patet per communes

regulas: per eas enim dicendum erat latus unum x , alterum y (§. 141 *Analys.*). Enimvero si denominatio hoc modo fiat, habebimus $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$, consequenter $x = \sqrt{a^2 + b^2 - y^2}$. Sed hæc solutio nulla est, cum in *Analysi* Diophantea solutio quæ-ratur in numeris rationalibus. Quamobrem in scholio (§. 231 *Analys.*) monuimus, cur ad vitandam irrationalitatem, latera quadratorum quæ-sitorum sumserimus $a-z$ & $yz-b$. Enimvero cum idem non fecerimus in ceteris, sed propriæ discantis meditationi reliquerimus; necesse est ut ad rationem generalem animum advertens specialem ex conditione calculi eruat.

§. 172. Quoniam in problematis indeterminatis facilius aberratur, ubi singularia artificia adhibenda sunt; tyronibus suadendum, ut problemata generaliter soluta etiam in numeris aliquoties solvant, quo artificia ista ipsis magis familiaria reddantur. Consultum etiam est, ut, ubi formulas generales per numeros explicaverint, examen addant, quo numeros repertos conditionem in problemate præscriptam habere innotescit. Ex. gr. in problemate 87 (§. 225 *Analys.*), reperiuntur numeri 11 & 6, quorum partes aliquotæ numeris suis additæ efficere debent eandem summam. Quoniam 11 est numerus primus, quem quippe sola unitas metitur (§. 75 *Arithm.*), præter unitatem partem aliquotam aliam

non habet (§. 30, 74 *Arithm.*). Unitas igitur si eidem addatur, summa efficitur 12. Ast senarii partes aliquotæ sunt 1, 2 & 3, quas ubi addas ipsi numero 6; habebis itidem summam 12. Similiter, per formulam generalem determinantur duo numeri 104 & 116. Illius partes aliquotæ sunt, 1, 2, 4, 8, 13, 26 & 52: hujus vero 1, 2, 4, 29 & 58. Est vero $1+2+4+8+13+26+52+104=210$, & $1+2+4+29+58+116=210$. Nec inconsultum est, ut etiam in hac *Analysi* formulæ algebraicæ verbis explicentur, quemadmodum supra præcepimus (§. 168); si quis præsertim Mathesin non sibi soli discit, sed intellectus potissimum perficiendi gratia eidem incumbit. Etenim non leve exercitio opus est, ut, quicquid animo concipis, verbis distincte enuncies. Nisi vero hac facultate polleas, in studio philosophico, & quocunque alio scientiarum genere, accurata methodo nunquam uteris. Extra Mathesin non habemus characteres & figuras, quibus imaginatio juvatur, & defectus distincte enunciandi, quæ concipiuntur vi intellectus, suppletur. Inprimis autem usui est, ut quam maxime abstracta verbis perspicuis accurate enunciare valeas; ubi tibi propositum fuerit, ex perceptionibus obviis erueret notiones universales quæ iisdem insunt, & veritatibus in casu particulari agnitis omnem suam tribuere ampli-

amplitudinem, quam habere possunt: id quod mirifice conducit ad omnem cognitionem promovendam, & prudentiam, qua ad recte agendum opus habemus, amplificandam. Immo augebitur eodem medio notionum distinctas formandi facultas, quæ non adeo facile acquiritur, quemadmodum vulgo putatur, præsertim ubi cum abstractis tibi fuerit negotium. Scholastici in distinguendis iis, quæ diversa sunt, satis fuerunt acuti; sed quæ confuse perceperunt distincte concipere, & verbis perspicuis accurate enunciare non valuerunt. Quamobrem Metaphysicam tenebris involverunt, nec ratiocinando quicquam ex notionibus confusis colligere potuerunt; ut scientia nobilissima in terminologiam versa fuerit, ac proinde a nonnullis perperam pro Lexico quodam philosophico habita. CARTESIUS vero, qui notionum distinctarum usum indispensabilem in scientiis perviderat, Ontologiam in eorum numerum retulit quæ contemni merentur; & in Physicis, imaginaria cum realibus confudit, ut ad veritatem liquidam pertingere non potuerit; Philosophiam vero practicam, quam excoli maxime interest, prorsus intactam reliquit; etsi ipsi propositum esset Philosophiam reformare, cujus defectus abunde agnoscebat.

§. 173. Sed dicta sufficiant de applicatione Algebræ ad problemata

arithmetica. Progrediamur itaque ad problemata geometrica, quæ capite tertio traduntur. Problemata geometrica duo singularia habent. Etenim plerumque artis est invenire æquationem; nec ea tam obvia est, quemadmodum in problematibus arithmeticis puris, ubi scilicet numeri dantur abstracti. Deinde non minoris artis est formularum algebraicarum, per quas determinatur quæsitum, constructio geometrica. Immo subinde difficultate non caret, ut reperias, quid quæri debeat, ut in commodam incidas solutionem. Quamvis vero problemate 110 (§. 250 *Analys.*) præscribantur regulæ generales de invenienda æquatione; eadem tamen non ita determinatæ sunt, ut in dato quolibet casu statim appareat, quam earum utendum sit ad æquationem invenendam, sed haud raro variis id tentandum est modis. Similiter in problemate 111 & 112 (§. 252, 253 *Analys.*) docuimus, quomodo construantur æquationes simplices & quadraticæ omnes; monuimus tamen in scholio (§. 254 *Analys.*), quod hoc modo raro incidamus in constructiones concinnas, quales sunt, quæ in Elementis Geometriæ extant, cum tamen concinnæ potissimum desiderentur. Quamobrem modus quo pervenitur ad æquationem, & quo æquatio ultima, per quam determinatur quæsitum, construitur, majorem attentionem meretur, quam qua in

problematis arithmetici usi fuimus; ut pateant artificia, quibus utimur, in aliis casibus similibus, quando occurrunt, imitanda. Ut autem constructionem concinnam reperias, primo tentanda est per regulas generales, quæ præscribuntur. Deinde dispiciendum, quomodo omnes linearum determinationes eidem schemati includantur, in quo lineæ singulæ commodum nanciscantur situm; ut prodeat schema, quod visum minime offendit, & in quo citra molestiam lineæ ex loco uno in alterum transportantur. Nulla adhuc datur constructionum elegantium theoria, in qua elegantia, quam ipsi tribuimus, ad notiones distinctas reducitur; quamvis ea non impossibilis sit. Pendet ea a principiis generalibus pulchritudinis entis compositi, quam & ipsam nemo hætenus explicavit. Insunt Architecturæ civili notiones quædam generales, quæ huc faciunt; sed nemo hætenus ad eas, quantum publice constat, animum advertit. Quamobrem hætenus, in casu omni, demonstrari nequit, constructionem, quam dedisti, esse eam, in qua nihil desiderari possit. Et haud raro, casui magis quam arti tribuendum, quod in constructionem incidas, quæ pulchritudine sua sese commendat. Neque vero existimandum est, si vel in nostris Analyseos Elementis, vel apud autores alios, occurrunt constructiones elegantes; eas ex formula algebraica juxta regulas generales re-

soluta primo statim conamine deductas fuisse. Quin potius pro certo tenendum, eas haud raro multum negotii fecisse inventoribus, antequam ad eam formam deducerentur, quam habent. Ceterum ut dicta intelligantur, specialia quædam addenda sunt.

§. 174. In problemate 113 (§. 255 *Analys.*), quo, ex data perimetro & area trianguli rectanguli, hypotenusam invenire, ipsumque triangulum construere docemus, non minus æquationis investigatio, quam trianguli constructio singularia quædam habent, quæ attentionem merentur. Quodsi in investiganda æquatione via ordinaria, quam monstrant regulæ generales, incedere voluissimus, hoc modo æquatio inventa fuisset.

$$\begin{array}{ll} AB + BC + CA = a & AC = x \\ \text{Area} = b^2 & AB = y \end{array}$$

erit

$$AB + BC = a - x$$

$$BC = a - x - y$$

Dux cum inveniendæ sint æquationes, alteram suppeditat theorema Pythagoricum, vi cujus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*), alteram vero area trianguli $= \frac{1}{2} AB \cdot BC$ (§. 392 *Geom.*). Habemus itaque

$$\begin{array}{rcl} x^2 = 2y^2 + a^2 - 2ax & b^2 = \frac{1}{2} ay - \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} y^2 & \\ + x^2 - 2ay + 2xy & \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} ay - \frac{1}{2} y^2 - b^2 & \\ \hline 0 = 2y^2 + a^2 - 2ax - 2ay & xy = ay - y^2 - 2b^2 & \\ + 2xy & & \\ \hline 2ax - 2xy = 2y^2 + a^2 - 2ay & x = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y} & \\ \hline x = \frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y} & & \end{array}$$

Quam-

Quamobrem

$$\begin{aligned} \frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a - 2y} &= \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y} \\ \hline 2y^3 + a^2y - 2ay^2 &= 2a^2y - 4ay^2 - 4ab^2 + 2y^3 + 4b^2y \\ \hline 0 &= a^2y - 2ay^2 + 4b^2y - 4ab^2 \\ \hline 2ay^2 - 4b^2y - a^2y &= -4ab^2 \\ y^2 - \frac{4b^2 + a^2}{2a}y &= -2b^2 \\ \text{Fiat } \frac{4b^2 + a^2}{2a} &= m, \\ \text{erit } y^2 - my &= -2b^2 \\ \frac{1}{4}m^2 &\quad \frac{1}{4}m^2 \\ \hline y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 &= \frac{1}{4}m^2 - 2b^2 \\ \hline y - \frac{1}{2}m \} &= \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)} \\ \frac{1}{2}m - y & \\ \hline y &= \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)} \end{aligned}$$

Vides hic, quam prolixus evadat calculus, si viam ordinariam ingrederis stricte inhærens regulis generalibus. Incidis in æquationem quadraticam affectam; cum in solutione, quam in textu dedimus, æquatio sit simplex, adeoque primi gradus. Quodsi y per constructionem geometricam determinare volueris, primo eruendus est valor ipsius m . Est vero $m = \frac{4b^2 + a^2}{2a} = \frac{2b^2}{a} + \frac{1}{2}a$. Unde patet, te eadem opera, si æquatione in contextu utaris, reperisse hypothensam, qua hic valorem m repe-

ris, quo in constructione geometrica æquationis ultimæ hic opus habes: ut adeo dubitari non possit, constructionem quoque fore multo prolixiorem, & intricatiorem ea, quam in contextu exhibemus. Abbreviatur calculus, & æquatio multo simplicior eruitur, quia problema ad æquationem reducturus uteris theoremate de compositione quadrati, cujus radix binomia (§. 261 *Arithm.*); adeoque plures veritates cognitæ supponis, quam si viam ordinariam ingrederis; & ad circumstantias particulares animum attendis, quarum viam ordinariam ingressus nullam habes rationem. Nihil itaque hic singulare occurrit, quod non eodem modo locum habeat in aliarum regularum generalium applicatione. Qui ea attentione utitur in addiscenda Mathesi, quam in capite primo inculcavimus; rationem hanc jam didicit in Practica Italica, ubi, ob circumstantias singulares, ope theorematum quæ tanquam cognita præsupponuntur, & quorum in regula trium opus non habemus, calculus abbreviatur. Discas hinc velim, quod, si nostro more in studio Arithmeticæ & Geometriæ versatus acumen quoddam tibi comparaveris, te in studio quoque algebraico fore acutiorem, & dum eidem incumbis, in majore luce versaturum. Acumen vero, hoc studio algebraico auctum, non uno nomine sese tibi commendabit, ubi ad Philosophiam & alia addiscendum

dum progredieris, immo in ipsa praxi vitæ. Enimvero constructio quoque trianguli rectanguli, ex perimetro & area datis, attentionem meretur. Vulgo triangula rectangula construimus ex datis cruribus, quibus ad angulum rectum junctis determinatur hypotenusa: quæ etiam ratio est, cur problema per regulas generales solventes investigamus cruris y valorem. Construi vero etiam potest triangulum rectangulum data hypotenusa & altitudine: quæ constructio denuo uberiores theorias supponit, quam communis; quod facile animadvertes, ubi fundamentum, quo nititur constructio, perpendere volueris. Unde vides cur, inventa hypotenusa, etiam quasi-verimus altitudinem. Et quoniam inventa in numerum cognitorum refertur, x non amplius spectatur tanquam magnitudo incognita, sed pro cognita habetur; ut adeo constructionem præter necessitatem efficeret prolixior & intricatior, si pro x valorem inventum in æquatione $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, $= 2b^2 : x$ substituere velles. Immo commodius accidit, si retineas $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, quam si, reductione modo ordinario facta, sumas $y = 2b^2 : x$. In quo denuo latet quoddam artificium, quod in geometricis constructionibus formularum algebraicarum utile est, & quo etiam in sequentibus utimur.

§. 175. Regulas arithmeticas non adscripsimus, brevitatis gratia; non

modo, quod geometricarum constructionum hic potissimum habetur ratio; verum etiam quod ex anterioribus satis manifestum supponimus, quomodo formulæ algebraicæ arithmetice explicentur, & regulæ arithmeticæ inde deducantur. Non tamen ideo tyrones negligere debent formularum per numeros explicationem, & regularum arithmeticarum enunciationem. Etsi vix opus esse videatur, exemplo præsentis rem declarari; ut tamen consulamus minus perspicacibus, id fecisse non nocebit. Æquatio itaque $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ hanc suppeditat solutionem arithmetice, adhibito artificio, quod sub finem paragraphi præcedentis commendavimus: 1. Quærat ad perimetro dimidiam $\frac{1}{2}a$, & latus quadrati areæ æqualis b , tertia proportionalis, quæ erit $\frac{2b^2}{a}$. 2. Hæc sub-

trahatur a semiperipheria $\frac{1}{2}a$, relinquatur hypotenusa quæsitæ. Arithmetice explicabis formulam hoc modo. Sit $a = 12$, $b^2 = 6$. Erit $\frac{1}{2}a = 6$, adeoque $x = 6 - \frac{12}{12} = 6 - 1 = 5$.

§. 176. Qui ex solutionibus problematum proficere voluerit, quantum datur; is negligere minime debet theoremata, quæ offerunt æquationes. Quamobrem in problemate, quod nunc perlustramus, docuimus, quomodo theorema ex æquatione secunda, seu penultima cruatur. Enimvero ipsa etiam æquatio ultima theorema

rema non inelegans suppeditat. Cum enim $2b^2 : a$ vel $b^2 : \frac{1}{2}a$ sit differentia inter semiperimetrum trianguli rectanguli $\frac{1}{2}a$ & hypothenusam x , extemplo patet theorema sequens: *Differentia inter hypothenusam & semiperimetrum trianguli rectanguli est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati area trianguli aequalis.* Non video quid obstat, quominus hoc theorema ceteris Geometriæ elementaris adscribi possit; nisi quod usum, quem habere possit, non prævideas: nullum enim esse demonstrare minime vales. Sane si hæc ratio sufficeret ad theoremata ex Mathesi eliminanda, multa ex eadem arcenda & olim fuissent, & nunc essent, quorum egregius prorsus, successu temporis, comparuit usus, & in posterum comparebit. Ecquis prævidere poterat usum, quem habet comparatio progressionum arithmeticarum & geometricarum, cui inventum logarithmorum longe utilissimum deberi constat, & qua STIFELIUS usus in algebraicis æquationibus intimius explicandis? Quodsi igitur hanc comparisonem tanquam inutilem rejicere voluissent Mathematici, locum in Mathesi eidem denegaturi, quod usum ejus minime præviderent; logarithmorum doctrina & ardua illa, quæ in Mathesi sublimiori ab eadem pendent, forsan hodiernum non essent detecta. Inventores non solliciti esse debent, num, quod investigandum sibi sumunt, utile sit, sed

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

num quod investigaverunt sit verum. Utilitas enim sua veluti sponte sese manifestabit, ubi in veritate investiganda progrediuntur, quam prævidere nullo modo poterant. Multum obest incremento scientiæ, si qui eam promovere possunt ac volunt, hoc præjudicio tenentur, quod de veritatis inveniendæ utilitate prima moveri debeat quæstio. Hæc enim cura tangere debet nonnisi eos, qui ab aliis inventa certo fine addiscunt; etsi cautione multa opus sit, ubi utilitatem ex vero æstimare voluerint; ne, quemadmodum plerumque accidit, quæ maxime utilia sunt pro inutilibus reputentur.

§. 177. Forfan non inconsultum judicaveris, ut constructiones ex calculo erutæ, itemque theoremata hinc derivata etiam more Veterum, seu synthetice demonstrantur. Non improbo consilium, ubi hoc facile fieri potest, & ea fini problemata quædam per leges rationum reduximus, quemadmodum problema 116 (§. 259 *Analys.*); ubi ipsa reductio demonstrationem quæsitam continet, modo singulæ analogiæ verbis enuncientur. Enimvero, cum per Algebram solvantur problemata, quæ a cognitione nostra adhuc procul sunt remota; defectu principiorum ad ratiocinandum requisitorum, per quæ ratiocinando colligi poterat quæsitum, quemadmodum in Geometria fecimus; multa haud raro theoremata interme-

G g

dia

dia essent invenienda, antequam demonstratio synthetica dari posset. Unde facile intelliges eam non esse in potestate tua. Sume exempli loco theorema, quod modo (§. 176) elicimus: In triangulo rectangulo differentia hypotenusæ a semiperimetro est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati triangulo æqualis. Si demonstrationem syntheticam dare volueris; hæc analogia ex aliis notis colligenda per theoremata de ratione quantitatum. Enimvero in Geometria elementari nihil adhuc demonstratum est de perimetro trianguli rectanguli. Quamobrem alia adhuc invenienda essent theoremata, antequam demonstrationem consummatam dare possis, quales dedimus in Geometria. Nobis jam non vacat eam in rem inquirere, ut exemplo dicta confirmaremus. Nemini igitur suademus, ut tempus in quærendis istiusmodi demonstrationibus fallat, quod longe utilius in exercenda Analyti consumere datur. Quodsi vero obvia fuerit demonstratio, eam addi non dissuademus.

§. 178. Si existimaveris demonstrationes syntheticas dari posse, si vestigiis calculi insistens verbis enunciis, quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugas; totus falleris: neque enim forma demonstrationis mutabitur, si characteribus expressa verbis enuncientur. Abunde hoc videre licet in *Phoronomia* HERMANNI, cujus

præsentæ demonstrationes syntheticæ seu lineares, quas vocat, quantum distent a demonstrationibus *Euclideis* nullo negotio deprehendet, qui cum fuerit in resolvendis demonstrationibus more nostro versatus resolutionem demonstrationum *Hermannianarum* tentare voluerit. Præstat igitur in analyti acquiescere, quam per eandem reperta minus recte demonstrare. Sane ipse NEWTONUS (quod citra injuriam in maxima Viri summi merita dictum esto,) multa, corollariorum instar, absque ulla demonstratione subjicit propositionibus, quæ subinde prolixam desiderant demonstrationem, si *Euclideo* more evincenda eorundem veritas; immo corollariorum loco habet quæ absque ulla demonstratione pateant lectori, quæ posita propositione minime ponuntur. Exempli loco est, quando problema inversum virium centripetarum in sectionibus conicis pro corollario directi habet, cum tamen conversio per se minime pateat; nec quis ferret, in Geometria elementari, si, ex parrallelismo linearum demonstrata angulorum æqualitate, per modum corollarii absque demonstratione inferret: Ergo etiam parallelæ sunt lineæ, si anguli alterni fuerint æquales. Non omnes propositiones posse converti; ex doctrina logica de conversione satis manifestum est. Quamobrem ubi conversio per rationes logicas non statim patet, conversa utique demon-

demonstranda est. Immo cum ex principiis logicis demonstrandum foret, propositionem converti posse; Geometris veteribus consultius visum ex principiis propriis, aliunde non supponendis, demonstrare conversam. Nos vero, qui omnibus justum statuere pretium solemus, demonstrationes logicas in numerum artificiorum heuristicorum referimus, per quas reperire, nonnunquam saltem conjectare licet, propositionem aliquam datam & demonstratam converti posse. Qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navat, is a rigore demonstrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur; ne methodi confusæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Mathesin: quod quam facile fieri possit, jam in superioribus monuimus (§. 100, 101).

§. 179. Ceterum, cum demonstrationibus syntheticis confundendæ non sunt demonstrationes, quibus evincitur constructionem juxta formulam per calculum erutam rite esse factam. In his enim supponimus quæsitum eo modo determinandum esse, quemadmodum exigit formula algebraica. Quoniam nos constructiones ad formulam retulimus, earundem demonstrationes in ipsa constructionum explicatione jam continentur. Quodsi vero illas verbis enunciare velles, demonstratio ubique adjicienda foret, de qua hic sermo est. Ita in exemplo nostro, ubi

triangulum rectangulum construendum ex formulis $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & $y = b^2 : \frac{1}{2}x$ (§. 255 *Analys.*); constructio pure enunciabitur hoc modo: 1°. Erigatur ad perimetrum BD perpendicularis AB, quæ sit ad latus quadrati areae trianguli æqualis in ratione dupla; fiatque BG ipsi lateri huic æqualis. 2°. Quærat ad BD, AB & BG quarta proportionalis BH. 3°. Fiat BC semiperimetro æqualis; & ex C in I transferatur modo inventa BH. 4°. Super BI describatur semicirculus; & ad BO dimidiam ipsius BI, & BE dimidiam ipsius AB, quærat tertia proportionalis BK. 5°. Ducatur denique ex puncto K diametro BI parallela KL. Quodsi 6°. punctum L cum extremis diametri B & I rectis BL & LI connectatur, prodibit triangulum rectangulum quæsitum BLI. Hoc modo si enunciaveris constructionem, ut prodeat resolutio problematis, quali forma exhibentur resolutiones in Geometria elementari; demonstratio sequens adjicienda utique est, ut manifestum evadat, suppositis formulis algebraicis tanquam veris, seu, uti loqui amamus, iisdem concessis, constructionem esse veram. Nimirum quoniam $BD = a$, $AB = 2b$, $BG = b$; erit quarta proportionalis $BH = 2b^2 : a$. Quare cum sit $BC = \frac{1}{2}a$ & $CI = BH$, erit $BI = x$, seu hypotenusa trianguli rectanguli construendi per formulam primam. Jam quia porro $BO = \frac{1}{2}x$, $BG = BE = b$, erit $BK = b^2 :$

$= b^2 : \frac{1}{2}x$, adeoque altitudo trianguli rectanguli construendi. Quoniam itaque recta KL est ipsi BI parallela & BLI semicirculus super hypothenusa trianguli descriptus; erit BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa $\frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & altitudo $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quod erat construendum. Suppono nimirum hic tanquam notum, quomodo triangulum rectangulum datae altitudinis supra hypothenusa sit construendum. Quodsi enim notum non sit, demonstratio ex principiis Geometriæ elementaris facile contextitur. Etenim angulus BLI, cum sit in semicirculo *per constr.* rectus est (§. 317 *Geom.*), adeoque BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa BI (§. 91, 95 *Geom.*). Linea KL est diametro BI parallela, & KB ad BC perpendicularis, *per construct.* consequenter perpendiculara inter eadem intercepta KB & ex L in BI demissum æqualia sunt (§. 226 *Geom.*). Enimvero KB est altitudini trianguli æqualis, *per construct.* & perpendicularum ex L in BI demissum ipsa trianguli BLI altitudo (§. 227 *Geom.*). Patet itaque si supra hypothenusa describatur semicirculus & in ejus altero extremo erigatur perpendicularis altitudini æqualis, per ejus vero summitatem ducatur recta diametro parallela & punctum, in quo hæc secatur semicirculum, connectatur cum extremis diametri; triangulum rectangulum datae altitudinis supra hypothenusa data esse constructum.

Problema hoc, cum sua demonstratione, Elementis Geometriæ inferi poterat; ex cujus quippe principiis eodem prorsus modo demonstratur, quo problemata cetera ibidem demonstrantur.

§. 180. Cum formulæ algebraicæ contineant regulas, per quas ex datis determinatur quæsitum; & per calculum ac demonstrationem æquationis, nisi hæc in conditione seu hypothesi problematis continetur, verum esse constet, quod sic determinetur quæsitum, quemadmodum vult formula; qui constructiones ex formulis erutas pure enunciat, & easdem deinde hisce convenienter factas demonstrat, in demonstrando sese non minus exercet, quam si in demonstrationibus Arithmeticæ & Geometriæ elementaris versetur. Quamobrem qui methodum demonstrandi sibi familiarem reddere intendunt, eadem extra Mathesin feliciter usuri; iis omnino suadendum, ut constructiones pure enuncient, & ad eam formam redigant qua resolutiones problematum in Geometria elementari exhibentur, atque deinde demonstrationes, cum quibus jam nobis negotium est, superaddant.

§. 181. Et quoniam problematum simplicium reductio per leges rationum, cujus exempla quædam dedimus (§. 259, 266, 289 *Analys.*), & reductio quadratici ordinis ad lineas reciprocas (§. 263, 265, 278 *Analys.*) propius accedit ad Analysin Verum,

terum, & demonstrationes ad formam Veterum componendas formaliter continet; eam negligere minime debet, qui methodum Veterum cum methodo Recentiorum conjungere voluerit. Probe nimirum notandum est, signorum usu non variari ipsam methodum, quæ in modo ratiocinandi consistit, sed tantummodo facilitari & clariorem reddi; quemadmodum demonstrationes Veterum eadem manent, si nostro more resolutæ, ope Artis characteristicæ, symbolice representantur. Sane per hoc, quod in Geometria elementari utamur signis, quorum in Algebra usus est, demonstrationes non fiunt algebraicæ, quemadmodum hebetiores judicant; sed tantummodo brevius & clarius exprimuntur. Vocabula non minus signa sunt, quam signa alia, quæ in locum eorum surrogantur. Quemadmodum itaque eadem manet demonstratio, si vocabula idem significantia sibi mutuo substituis, prouti in versionibus accidere solet, ubi v. gr. Latinis substituis Germanica, vel Gallica; ita nec alia evadit, si vocabulis alia signa substituis, quæ cum ipsis idem significant. Ita perinde est, siue dicas, triangulum BDE simile est triangulo BAC, siue scribas, $\triangle BDE \sim \triangle BAC$: etenim si verbis reddere volueris, quæ ita scripsisti, verbis istis eadem efferre teneris; perinde ac dicendum est, *das Dreyecke BDE ist dem Dreyecke BAC ähnlich*, ubi Germanice redde-

revolueris, quod Latine dictum fuerat.

§. 182. In problemate 114, (§. 257 *Analys.*) quo, data area trianguli rectanguli, cujus latera sunt in proportionem continua, inveniri jubentur latera; & reductio, & constructio singularia habet, quæ attentionem tyronum merentur. In reductioe notandus est modus, quo eliminatur quantitas alterutra incognita, utpotè a regula generali recedens (§. 141 *Analys.*). Notanda quoque est applicatio calculi irrationalium, qua formula efficitur simplicior. In constructione autem notatu dignum est artificium, quo numeri irrationales in lineis exhibentur, & radices quoque quadrato-quadratae per Geometriam elementarem construuntur. Quæ enim in aliquo problemate singularia occurrunt, ad ea advertendus est animus, cum eisdem insinuentur artificia, quibus utendum in casu simili, quoties is occurrit. Et selecta dicuntur problemata, quæ vel in veritatem cognitu necessariorum notitiam nos deducunt, vel artificia suggerunt, quibus Ars inveniendi locupletatur, ipso usu rectius discenda, quam per præcepta; cum hæc non satis intelligantur, nisi per exempla. Quamobrem qui in *Analysi* proficere voluerit, non sine singulari attentione circa singula problemata versari tenetur; ut, si qua nova occurrunt, ea comparatione cum regulis generalibus instituta advertat & memorie infingat.

§. 183. Non commemoramus hic alia, quæ in ceteris problematis annotabit attenta mente & solutionem & constructionem perlustrans; ne præter necessitatem justo prolixiores videamur. Unum tamen est, quod notasse non piget, scilicet ex problemate 124 (§. 275 *Analys.*) patere, per Algebram subinde prodire formulas, quæ statim dant constructionem, quam Veteres suo modo inveniunt. Patet in hoc problemate ratio, quod in æquatione investiganda insistamus iisdem principiis, quibus usi Veteres in eruenda constructione. Et quamvis problema sequens (§. 279 *Analys.*) de latere Pentagoni inveniundo contrarium insinuare videatur; videbis tamen, si attentius rem consideres, nos totos in eo esse, ut investigemus relationem lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni regularis eidem circulo inscriptorum simul, qua nititur constructio Veterum. Eam vero non dare regulas reductionis generales; sed utendum hic esse singulari artificio substitutionis; quo neglecto; per æquationem $x^2 = 4b^2 - b^4 : a^2$, vel per $\frac{20}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ longe alia prodiret constructio, quam dedere Veteres. Immo nisi relatio lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni simul, ex inventis Veterum, nobis cognita & perspecta fuisset; non facile adfuisset ratio, cur de ista substitutione cogitassetur. Duo igitur hic probe notari velim, cum in veritate investi-

ganda multum relictum sit tentaminibus, in problematum resolutionibus algebraicis & præsertim in formularum constructionibus, operam dandam esse ut problema & ejus constructio efficiatur dependens a veritatibus aliis jam inventis; quæ dependentia in methodo Veterum, qua usi sumus in Geometria elementari, & in demonstrationibus propositionum syntheticis, unice attenditur, & ut ea fini tententur substitutiones, quibus locus esse potest. Elucescit hinc usus, quo commendatur studium in veritatibus nobis jam notis analytice investigandis, si nempe proponantur tanquam quærendæ. Istiusmodi enim investigationes efficient, ut animum attendas ad artificia, quæ alias eundem non subirent, & quibus posthac felici successu usus es in investigandis iis, quæ nondum cognita, sed adhuc latent. Neque enim sufficit, artificia quædam esse in potestate nostra; verum etiam requiritur ratio, cur eadem mentem nostram subeant, quando iisdem commode utimur: id quod ex principiis nostris psychologicis abunde patet. Ratio autem ista non semper a nobis pendet, sed a casu, qui potestati nostræ subducitur. Quodsi vero artificia nobis fuerint familiaria, quoniam iisdem jam ante usi ea attentione conveniente memoriæ infiximus; probe conscii varia esse tentanda, ubi veritas latens eruenda; eadem nobis in memoriam revocamus: id quod

quod denuo per principia nostra psychologica manifestum est; ut nihil affirmetur, quod non ex iisdem demonstrari possit, si demonstratio exigatur; quamvis defectum demonstrationis hic suppleat experientia domestica, si quis dictis fidem habere voluerit.

§. 184. Forſan nec inconſultum erit quædam adhuc moneri circa examen Regulæ *Renaldiniana* polygonum regulare quodcunque circulo inſcribendi. Conſtat ex Elementis EUCLIDIS, conſtare modum, quo trigonum, quadratum, pentagonum, octogonum, decagonum, quindecagonum circulo inſcribitur, & idem patet ex anterioribus. Quamobrem totum examen huc redit, ut inveſtigetur valor lateris cujuſdam polygoni, aut ſaltem partis ejuſdem, per regulas demonſtratas; deinde vero idem valor cruatur per regulam RENALDINI; quæ ſi vera fuerit, valor per eam inventus erit alteri æqualis. Quodſi ergo hoſce duos valores æquales ponas, & exinde cruas contradiccionem; hinc patebit, regulam *Renaldinianam* eſſe falſam, cum alteram veram eſſe conſtet. Nimirum hinc agnoſcitur illam contradicere veritati manifeſtæ, adeoque, per principia logica, quibus nititur tota methodus demonſtrandi per indirectum, colligitur eam falſam eſſe debere. Examen adeo præſens pendet à principio contradiccionis, & in applicacione methodi de-

monſtrandi per indirectum conſiſtit. Eodem artificio utimur etiam in aliis; veluti ſi quis dederit Quadraturam circuli; ſumta diametro pro unitate, valorem peripheriæ cruimus in fractionibus decimalibus, quia conſtat numeros LUDOLPHI notiſſimos cum veritate conſentire. Quodſi enim ab his diverſi prodeant, prætenſam quadraturam circuli veritati contradicere, adeoque falſam eſſe colligitur. Novi equidem quod huic examini manus victas dare nolint, qui circuli quadraturam ſibi inveniriſſe videntur: ſed hi ſunt, qui ignorant, quomodo numeros ſuos cruerit LUDOLPHUS, & quales ſint methodi recentiorum, quibus inveſtigantur ſeries infinitæ pro circulo, unde iidem numeri deducuntur. Valeat hic per vulgatum iſtud: Cum ignorante principia non eſt diſputandum.

§. 185. Quantum interſit diſcriminis, inter conſtructionem elegantem & minus elegantem, clariffime eluceſcit, ubi utramque conſtructionem * trianguli rectanguli, ex data area una cum angulo uno obliquo, inter ſe conferre volueris. Ipaſa vero hæc collatio etiam manifeſtabit rationem, cur conſtructio ſecunda prima ſit elegantior. Conſtructio ſecunda ſimplicitate ſua ſeſe ita commendat, ut in Geometriam referri poſſit. Habet autem hoc ſingulare conſtructio, quod recta ſimul repreſentet ſinum totum, & rectam datam; ſicque loco quartæ proportionalis invenienda ſit

* Probl. 149.

fit tertia, singulari modo per constructionem trianguli rectanguli determinata, qui ab eo longius recedit, quem in Elementis Geometriæ docuimus; etsi hujus quoque fundamentum in illis ipsis contineatur. Quod si quis constructionibus æquationum in Algebra sedulam operam navaverit; is varias solutiones ex Elementis demonstrandas detegat, quæ in usum constructionum elegantium in Algebra, non sine tyronum commodo, posthac Geometriæ elementari inferentur; ut hæc ampliorem nanciscatur usum, & studium construendi formulas algebraicas faciliatur.

§. 186. Problema 152, cum duobus sequentibus (§. 325 & seqq. *Analys.*) inter difficilia referri solet. Ita autem eadem resolvimus, ut nec tyronibus quicquam difficultatis facessant. Præmittitur, in resolutione primi, theorema quod tanta facilitate ex principiis Geometriæ elementaris demonstratur, ut ipsum in iisdem Elementis locum mereatur. Hoc ipso autem exemplo docemur, quod in usum Analyticos & Geometriæ sublimioris, supplementum quoddam Elementorum Geometriæ conscribi posset, quo studium algebraicum & Matheseos mixtæ multum faciliteretur. Sane si hoc ipsum theorema, quod ad resolvendum problema præsens primus adhibuit NEWTONUS, ab EUCLIDE jam fuisset traditum; Mathematici alii non tantopere in resolvendo hoc problemate desudaf-

sent. Confirmat igitur problematis præsentis resolutio ea, quæ superius (§. 176) inculcavimus de non contemnendis theorematibus, quæ nullum usum habere videntur, seu quorum saltem usum prævidere minime licet. Vi hujus theorematibus, solo calculo literali, absque regulis Algebrae, ex sinu & cosinu anguli simpli eruuntur sinus & cosinus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, sextupli, septupli &c. ita ut hoc problema jam superius c. 3. exhibere potuissimus, ubi usus calculi literalis in inveniendis theorematibus explicatur. Apparet adeo denuo, quam ardua solo calculo literali eruantur, etiamsi Algebra prorsus ignota supponatur. Inprimis vero animum attendi convenit ad artificium, quo ex theorematibus particularibus eruitur universale. Consistit hoc in reductione ad theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo; & reductio ipsa nititur comparatione formularum particularium problematis præsentis cum formulis particularibus problematis superioris. Principium hoc reductionis amplissimum habet usum in omni Arte inveniendi, etiam extra Mathesin; quemadmodum jam in Psychologia me monuisse memini. Inprimis autem reductio problematis unius ad aliud, quod notius & simplicius, in Geometria sublimiori & in calculo integrali usum prorsus eximium habet. Quamobrem

con-

consultum est hoc artificium tempestive observari. Tollit reductio hæc, in casu præsentē, omnem laborem, cumque valde molestum, quo alias opus foret, si eodem modo legem progressionum in infinitum, quam formulæ particulares loquuntur, ex earundem comparatione elicere velles; quemadmodum supra fecimus, cum theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigaremus. Ostendi etiam, quomodo ex formula cosinus multipli, expungatur valor sinus simpli, per legem substitutionis, ut cosinus multipli determinetur per solum simplex atque sinum totum. Hoc modo eruuntur alia theorematum particularia; & universale quoque aliud prodiret, si eadem substitutione valores b^2 , b^4 , b^6 , b^8 , &c. eliminare velles. Quem calculi molestia non deterret, is eundem tentare potest; quamvis non opus habeamus hisce theorematibus, cum dato sinu facile reperiatur cosinus (§. 16 *Trigonom.*). Ceterum hic quoque elucet, quomodo infinita theorematum comprehendantur uno generali. Sed cum hic nihil occurrat, quod non jam animadversum fuerit in problemate 29 (§. 95 *Analyf.*); plura ea de re non addimus. Corollarium vero, quod adjicitur, attentionem meretur, ut notes alibi etiam profutura. In eodem scilicet ostendimus, quod idem theorema inserviat determinandis chordis arcuum multiplo-
Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

sinus angulorum multiplo-
 determinantur: immo quod hinc etiam pendeat multiplicatio arcus, & consequenter anguli per datum numerum. Notandum igitur hic est; in scientiis, problematum quoque æquipollentiam esse perpendendam; non modo, ne entia præter necessitatem multiplicentur, verum etiam ut, in solutione problematis investiganda, seligamus illud quod facilius solvi potest. Sane, in nostro casu, non adeo prona erat solutio, si loco sinus anguli multipli investigandam tibi proposuisses chordam arcus multipli. Neque enim meditatio te duxisset ad theorema geometricum, cui debetur solutionis problematis præsentis facilitas. Multum in philosophia usum habet, ut æquipollentia agnoscantur. Quamobrem qui, intellectus perficiendi gratia, Mathesi operam navant, ea probe notare tenentur, ad quæ hic attentionem excitamus.

§. 187. Problema de tangente arcus multipli ex data tangente simpli invenienda, quod operosissime solvitur ab aliis, hic nullo fere negotio solvitur, si nostram solutionem cum aliis solutionibus compares. Notanda igitur sunt artificia, quæ facilitatem solutionis pariunt. Primum artificium, idque palmarium, in eo consistit, quod problema hoc consideretur tanquam dependens ab altero de inveniēdo sinu anguli multipli ex dato sinu simpli. Unde intelligitur, quantæ sit utilitatis,

H h

ut

ut dependentiæ problematum a se invicem habeatur ratio. Quoniam vero hoc pacto prodit formula, tangentem anguli multipli ex datis sinu & cosinu simpli, non ex tangente simpli determinans, quod quærebatur; ideo, per legem substitutionis, valores sinus & cosinus simpli eliminamus, ut eorum loco introducatur tangens anguli simpli. Dux sunt quantitates exterminandæ, nimirum a & b . Singulari autem ratione hic accidit ut, cum una earundem a , eliminetur etiam altera b : quod nisi succederet, substitutione nihil efficeret, propterea quod valorem ipsius a , per tangentem t expressum, ingreditur simul b , & vicissim valorem b , per t expressum, simul a . Atque hæc forsan ratio fuit, cur problema nostrum independentem a problemate sinus & cosinus anguli multipli inveniendi solvendum esse visum fuerit. Unde patet veritatem investigaturum non nimis tribuere debere iis, quæ apparent; &, nisi impossibilitas fuerit demonstrata, non obstante apparentia tentandum esse, quod successu cariturum videtur. Tentaminibus enim in veritate investiganda multum esse tribuendum nemo diffitebitur, nisi qui eorum usum nondum fuit expertus. Ceterum hic quoque attentionem meretur artificium, quod utimur in abbreviando calculo, eo-que a perplexitate tardiosa liberando; dum pro coefficientibus substituimus literas majores, pro quibus deinde,

calculo absoluto, iterum reponuntur earundem valores. Etsi enim eodem artificio jam antea fuerimus usi, veluti in problematis 54 & 81 (§. 165, 213 *Analys.*); applicatio tamen in casu præsentem non statim cuilibet succurrit, nisi qui in anterioribus ad idem artificium animum attendit, & distincta notione comprehensum memoriæ infixit; quemadmodum ex natura animæ, vi principiorum nostrorum psychologicorum, facile demonstratur. Ea enim dedimus in Psychologia principia, per quæ ratio a priori dari potest, in casu dato, eorum quæ in anima contingere observamus. Denique notandum est, quomodo formula pure enunciatur, ut prodeat solutio facillima intellectu, in locum formulæ surroganda. Continet ea legem progressionis infinitum, qua nituntur formulæ particulares, qualem in anteriori problemate deduximus ex formulis particularibus in usum generalis eruendæ. Ceterum, quæ hic annotavimus de problemate tangentis multipli ex tangente simpli arcus inveniendæ, eadem etiam tenenda sunt de problemate secantis anguli multipli ex data secante simpli inveniendæ (§. 328; *Analys.*).

§. 188. Quæ hæcenus de Algebra tradidimus, non progrediuntur ultra terminos ab Arabibus assignatos, a quibus eandem accepimus; nisi quatenus ope Arithmeticæ literalis, seu calculi universalis, ad quem animum

non

non adverterunt Arabes, multo amplior efficitur illius usus, ut per eam pateat accessus ad ea, quæ inaccessa videbantur. Ante inventam vero Arithmeticam literalem, Algebram ulterius provehere studuerunt Itali; nec infelici prorsus successu. Cum enim Arabes in æquationibus quadraticis subsisterent; SCIPIO FERREUS, ulterius progressus, dedit regulas ex æquationibus cubicis extrahendi radicem, a CARDANO publici juris factas; LUDOVICUS vero *Ferrariensis* etiam ex æquatione biquadratica radicem extrahere docuit. Neque Algebra in hunc usque diem ulterius promota, ex quo, ope calculi literalis & calculi differentialis, adeo amplificatus est ejusdem usus, ut nihil videatur a cognitione nostra adeo remotum, quin ad ipsum aperiatur aditum. Etsi enim DE TSCHIRNHAUSEN invenisse sibi visus est methodum universalem quamcunque æquationem affectam reducendi ad puram; eamque Analyti suæ demonstratæ inferere nullus dubitavit CAROLUS REYNEAU; tentanti tamen apparebit, eam non succedere, nisi in æquationibus cubicis, ad quas etiam eandem tantummodo applicavit DE TSCHIRNHAUSEN & qui eandem approbavit REYNEAU: eandem enim methodum ad æquationes altioris gradus applicaturus, incidet in æquationes, quæ superioris gradus sunt quam resolvenda; id quod monendum utique fuerat, ne Algebra

complementum suum videatur nata, a quo tamen longissimo intervallo adhuc distat. Non difficile fuerat Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hoc observare, modo applicationem in superioribus æquationibus tentasset, nec nimia forsan in vires suas confidentia, quæ ipsum non in unum errorem seduxit, difficultates oblatas pro superabilibus reputasset, quæ omnino insuperabiles sunt, saltem hæcenus superari minime possunt. Quoniam itaque methodus universalis, extrahendi radicem exactam ex æquatione quacunque data, desiderabatur, nec adeo facile erat eandem reperire; ad extractionem radicis per approximationem confugerunt Analytæ, & methodum ingeniosam jam dedit FRANCISCUS VIETA. Alii alio modo idem tentarunt; quod prolixè recenseri nostri jam non est instituti: neque enim nobis propositum est historiam Algebræ scribere, sed ea tantummodo enarrare, quæ scitu necessaria sunt lectori Elementorum nostrorum Analyseos, ut majore luce fruatur, nec quasi in tenebris versetur, ignorans, cur ea de extractione radicum ex æquationibus altioribus tradamus, quæ capite quinto continentur. Nos hic retinimus methodum facillimam, (quam Arithmetici nostrates, *die Rechenmeister*, in Algebra numerosa *Cosscam mechanicam* appellarunt; & quam etiam adhibuit NEWTONUS, & RAPHSO in peculiari Tractatu multis exemplis

illustravit); sed nostro more captui tyronum magis accommodatam; qua radix æquationis reperitur in fractionibus decimalibus tam exacta, quantum desideratur. Et quoniam HALLEIUS regulas duas universales investigavit, alteram rationalem, alteram irrationalem, quæ merito commendatur; easdem eadem methodo investigare docuimus, qua in exemplis singularibus usi sumus, & quæ breviori ac trita magis via ad easdem ducit, quam qua HALLEIUS ad easdem pervenit. Methodus hæc in praxi satisfacit, nec ea ulteriorem Algebrae perfectionem desiderat. Neque enim in praxi desiderantur numeri irrationales, quales prodeunt per inventas generales formulas radicum in æquationibus cubicis (§. 358 *Analys.*); sed numeri rationales. Quando vero ex irrationali actu extrahenda radix; eam quærimus in fractionibus decimalibus, quales reperimus per methodum, de qua jam nobis sermo est. Applicatio autem formularum irrationalium plerumque plus pareret laboris quam methodus approximandi. Immo si in formula, substitutis numeris pro literis, extrahenda foret radix altioris gradus; non inutiliter recurreremus ad methodum approximandi, qua statim uti poteramus (§. 365 *Analys.*). Non tamen ideo damnamus, si quis in extrahendis radicibus ex æquationibus superioribus ulterius progrediatur: facit enim ad perfe-

ctionem theoriæ, seu incrementum scientiæ, & ad Artem inveniendi locupletandam. Enimvero, cum de commoda methodo extrahendi radicem ex æquatione quacunque data, sive exacte, sive per approximationem, laborarent Mathematici; in naturam æquationum inquisiverunt & quomodo eadem præparentur, sicubi opus est, investigarunt. Unde enata sunt problemata ista, quæ initio hujus capitis explicantur.

§. 189. Problemata ista intellectu facilia sunt ei, qui in anterioribus attentionem suam suumque acumen desiderari minime passus; ut adeo opus non sit quædam de iis moneri. Calculum in singulis adeo perspicue representavimus, ut in eodem versantes levi saltem attentione opus habeant ad problematum solutionem intelligendam. Usus autem eorum, quæ de natura æquationum docentur, elucescit ex problemate 165 (§. 351) de extrahenda radice rationali, si quam habet æquatio; id quod rarissime accidit. Duplicem proponimus methodum. Altera nititur principio substitutionis; altera vero principio de natura æquationum, quod scilicet æquationes altiores prodeant per multiplicationem simplicium. Atque hæc posterior ingeniosior est priori. Non amplius turbabit tyrones, quod alterum æquationis membrum hic ponatur 0, modo in anterioribus fuerint satis attenti; quoniam per reductionem aliquoties pro-

dit

dit talis æquationum forma. Quando primum tale quid occurrit, attoniti quasi hærent tyrones, quod aliquid nihilo æquale esse debere existiment, non advertentes ad diversitatem signorum, ut ipsis succurreret axioma, Si æqualia ab æqualia subtrahuntur, nihil relinquitur. Nimirum hic differentia nulla est: differentia autem nulla per fictionem quandam nihilo æqualis ponitur. Proprie enim loquendo ei, quod non est, nullum prædicatum positivum competere potest; juxta canonem tritissimum scholasticorum, Non entis nulla sunt prædicata. Æqualitas est prædicatum, quod quantitatibus convenit: quod vero nullum est, cum non sit in quantitatuum numero, nec æquale dici potest alteri. Fingitur adeo nihil quantitatis esse aliquam quantitatis speciem; ut de eo prædicatum, quod nonnisi quantitatibus convenire potest, enunciari possit fiducia axiomatis; Quamlibet quantitatem æqualem esse sibi metipsum. Nugari videretur, qui extra usum in calculo talia proponeret; veluti si demonstrare vellet, nihilum æquale esse nihilo. Hac tamen demonstratione subsistit fictio adeo utilis in calculo algebraico. Simile quid obtinet, si alterum æquationis membrum fuerit quantitas privativa; ubi tyrones perspicaciores, ad diversitatem signorum in altero æquationis membro non attenti, vel saltem ignari, quantitates privativas excedere posi-

tivas, hærent, existimantes aliquid poni minus nihilo, seu quod aliquid est æquale esse debere ei quod nihilo minus est; cum tamen revera minus nihilo ponatur ei quod minus nihilo est æquale; quatenus, in calculo, fingimus quantitatis defectum per eam, quæ deficit, æstimabilem esse veram quantitatem. Fisiones istiusmodi plurimum habent utilitatis in calculo, nec iisdem carere possumus. Nodum in scirpo quarit, qui contra eas difficultates facessit. Ad fisiones recurrendum est etiam extra Mathesin, nisi nescire velis, quæ scitu maxime necessaria sunt. Ita, in Jure naturali, Civitatem fingimus instar personæ liberæ, quæ sui juris est, & cui per naturam suam certa competunt jura; immo individuum unum physicum in pluramoralia dividimus, & individuum morale physico contradistinguimus, tanquam personam diversam ab eo; immo unum eundemque hominem distinguimus a se ipso, quasi duæ sint personæ, quarum una alteri obligatur, & uni in alteram competunt certa jura: qua fictione utitur ipse Apostolus, dum hominem novum veteri contradistinguit. Nec ignotæ sunt istiusmodi fisiones in Jure Romano. Exemplo sit postliminium; ut taceamus alia, ubi fisiones non adeo manifestæ sunt, alio loco a nobis commemorandæ. Quod si dicas, in explicanda æquationum natura poni $x = -b$, adeoque quantitatem positivam æqua-

lem privativæ: id quod utique contradictorium sit; cum quantitates privativæ positivis heterogeneæ sint, adeoque ratio æqualitatis, qualem supponit æquatio, inter eas intercedere nequeat (§. 24 *Analys.*). Enimvero cum, in æquationibus compositis, radix non minus quantitas negativa, quam positiva esse possit; ea autem designetur litera x ; quamdiu valor ejus ignoratur, signum eidem adjiciendum dubium est: in casu autem dubio signo $+$ afficitur: id quod etiam in sequentibus fiet, ubi utile est non attendi signorum diversitatem. Quando itaque in formatione æquationum sumitur $x = -b$, non supponitur, quantitatem positivam privativæ æqualem esse, sed tantummodo sumitur, eadem litera x indigitari posse non minus quantitatem positivam, quam negativam; cum signa primitiva sint prorsus arbitraria; & quantitatem privativam subinde utiliter considerari instar positivæ, quando fictionem istiusmodi fert natura rei, nec ea in errorem seducit.

§. 190. In resolutione problematis 168 (§. 358 *Analys.*), quo ex æquatione cubica extrahi jubetur radix, singulare occurrit artificium, quo quantitas incognita x dividitur in duas partes indeterminatas y & z , & harum ope æquatio data transmutatur in aliam, quæ duas incognitas indeterminatas continet. Etenim hoc ipso obtinetur, ut lege comparationis terminorum utraque determi-

tur, & sic inveniatur quæsitum per partes. Nimirum, quia y & z indeterminatæ sumuntur, ideo licet ponere $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ & $y^3 + z^3 = q$; non alia de causa, quam quia commodum accidit, ut per primam æquationem eruatur valor unius indeterminatæ z , qui in æquatione altera substitutus dat valorem ipsius y atque z determinatum. Æquatio $y^3 - qy^3 = -\frac{1}{27}p^3$ duas habet radices; quarum altera quod sit $= y$, altera vero $= z$, ex eo liquet, quia ex æquatione prima $3y^2z + 3z^2y = py + pz$, reperitur $y = p:3z$, perinde ac $z = p:3y$, & valor ipsius y in altera $y^3 + z^3 = q$ substitutus dat æquationem $z^3 - qz^3 = -\frac{1}{27}p^3$, eandem cum anteriore. Manifestum enim est æquationem, quæ ducit ad valorem determinatum quantitatis cognitæ, duas habere debere radices, quarum una denotat y , altera vero z ; etsi perinde sit quam ipsi y , quam vero ipsi z tribuere velis; cum quantitates y & z pro arbitrio assumantur, ut pro majore & minore habere possis, quam volueris. Hoc artificio jam usi sumus in investiganda regula tollendi secundum terminum ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), ut nempe coëfficiens secundi termini propter indeterminatam x poni possit nihilo æqualis. Diversa tamen in præsentī casu ejus applicatio est.

§. 191. Limites æquationum modo investigare docuimus, (§. 356 *Analys.*), qui in *Commentariis ad Geometriam*

metriam CARTESII proponitur. Habet enim hoc singulare ea methodus; quod Algebram, quæ tota nititur ratione æqualitatis, extendat ad rationem inæqualitatis, ubi inæqualia, mediante signo $>$ vel $<$, eodem modo inter se comparantur, quo in Algebra æqualia mediante signo $=$, & reductio per similia axiomata instituitur, quo eadem in Algebra fieri consuevit. Hanc ipsam vero methodum, etsi hætenus attentione sua indignam eam judicaverint Analystæ, etiam alibi usui esse posse, exemplo aliquo facili monstrare lubet. Ponamus quæri, qualis sit ratio, quam habent duæ quantitates inæquales ad eandem tertiam. Resolutio problematis ita sese habet:

Sit major $= x$ Data tertia $= a$
 minor $= y$

erit

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

$$ax > ay$$

Fiat $x : a = t : v$

$$\text{erit } x = \frac{at}{v}$$

adeoque $\frac{at}{v} > ay$

$$\frac{at}{v} > ay$$

$$\frac{t}{v} > \frac{y}{a}$$

Ergo ob $\frac{t}{v} = \frac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

hoc est $x : a > y : a$

Habemus adeo theorema: *Majus ad idem majorem rationem habet, quam minus*, istiusmodi analysi investigatum, qua problemata algebraice solvuntur. Non alio fine proponimus hoc problema, quam ut ideam quandam hujus methodi animo tyronum ingereremus. Consultum igitur erat, ut exemplum eligeremus facile, & ex anterioribus jam notum. Videbimus deinceps applicatione methodorum, quæ nobis innotescunt, ad exempla notissima & maxime vulgaria haud raro detegi maxime ardua: sit ita, quod methodorum inventores, ne ardua nullo fere negotio detexisse videantur, eas applicent ad exempla, quæ sublime quid spirant & intellectu difficilia deprehenduntur.

§. 192. Extractio radicis ex serie infinita (§. 366 *Analys.*), etiam artificium quoddam singulare habet; quod consistit in diversa applicatione assumptionis quantitarum indeterminatarum lege comparisonis determinandarum; quo supra jam usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), & in extrahenda radice ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*). Series enim assumptitia, qua exprimitur valor ipsius x , qui quæritur, coefficientes habet

indeter-

indeterminatos, lege comparationis determinandos. Ut vero determinari possint, perinde ac superius lege substitutionis; æquatio proposita, cujus coëfficientes determinati sunt, transmutatur in aliam, quam coëfficientes indeterminati cum determinatis simul ingrediuntur; quemadmodum fecimus in extractione radicis ex æquatione cubica (§. 358 *Analys.*); etsi alio principio hic nitatur coëfficientium indeterminatorum determinatio, cujus ratio ex ipso contextu liquet, & quod affine est ei, quo eodem fine uti sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), quamvis ob aliam rationem. Patet hinc, quam utile sit ut artificia analytica, quibus in resolutione problematum utimur, inter se conferantur, quo pateat eorum, quæ eadem sunt, diversa applicatio. Quodsi enim in rationem applicationis inquisiveris; id non modo efficiet, ut eadem in casu eodem recurrente facilius memoriam subeat; verum etiam hoc ipso consequeris, ut eandem, prout casus exigit, ipsemet variare possis. Istiusmodi autem disquisitiones apprimè necessariae sunt ei, qui in Arte inveniendi generali proficere vult studio Algebrae, & intellectui conciliare gestit eam habitudinem, qua ad artificia heuristica diversimode applicanda opus habet. Problema, de quo jam loquimur, maximæ utilitatis est: continet enim methodum,

quæ *Regressus serierum* nomine venit, & cujus maxima est utilitas in Geometria sublimiori; quemadmodum suo loco ostendemus. Equidem problema hoc tanta perspicuitate exposuimus, ut tyro in anterioribus cum laude versatus idem absque ulla difficultate intelligat, nisi calculi molestias fugiat; quodsi tamen quis ab iisdem abhorreat, idem tamdiu seponat, donec regressu serierum ad solvenda problemata opus habuerimus.

§. 193. Extractions radicum ex æquationibus, de quibus diximus in capite præsentè, usum tantummodo habent in solutionibus problematum arithmetice. Quamobrem docendum quoque erat, quomodo æquationes altiores geometricè construantur. Per rectas & circulum eadem construi nequeunt: sed confugiendum hic est ad lineas curvas. Quamobrem cum de lineis curvis, præter circulum, nihil doceatur in Geometria elementari; nostrum erat ante docere, quomodo Algebra ad Geometriam sublimiorem, quæ de curvis agit, applicetur; ut ejus ope curvarum descriptiones, & proprietates, ac symptomata, hoc est, prædicata absoluta & conditionata, inveniantur. Applicationem hanc debemus CARTESIO, qui eam docuit in Geometria, sed non ad captum tyronum. Facile tamen reperiri poterat, si quis ad vulgaria animum attendere voluisset. Tota enim in hoc

hoc consistit, ut curva definiatur per æquationem, & ex ea, adhibitis artificijs in Algebra usitatis, eliciantur curvarum constructiones, proprietates, & symptomata. Ecce igitur tibi facillimam ad hanc methodum, quæ inexhaustæ utilitatis est in Geometria sublimiori, viam. Constat ex elementis Geometriæ (§. 327 *Geom.*), semiordinatam PM esse mediam proportionalem, inter abscissam AP & complementum diametri PB; si utamur terminis in doctrina de Curvis receptis, & initio capitis sexti explicatis. Quare si sit diameter AB = a , abscissa AP = x , semiordinata PM = y , erit complementum diametri PB = $a - x$; consequenter

$$AP : PM = PM : PB$$

$$x : y = y : a - x$$

$$\text{adeoque } y^2 = ax - x^2$$

Habemus adeo æquationem, quæ circulum definit. Quodsi jam ponamus, nos nescire, qualis sit hæc curva; ea, quæ de eadem nobis innotescere possunt, hoc modo eruimus.

$$\begin{array}{l} \text{Sit } y = 0 \\ \text{erit } ax - x^2 = 0 \\ \hline ax = x^2 \\ \hline a = x \end{array}$$

Patet itaque 1°. curvam secare rectam AB in B.

$$\begin{array}{l} \text{Sit } x = 0 \\ \hline \text{erit } y^2 = 0 \\ \hline y = 0 \end{array}$$

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Unde liquet 2°. curvam secare rectam AB in A.

$$\begin{array}{l} \text{Sit } x = \frac{1}{2}a \\ \hline \text{erit } y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ \hline \quad = \frac{1}{4}a^2 \\ \hline y = \frac{1}{2}a \end{array}$$

Videmus itaque, 3°. si ex medio rectæ AB erigatur perpendicularis CD, æqualis AC, curvam transire per punctum D.

Quoniam eadem curva transit per A & B (*vi num. 1 & 2*); evidens est, 4°. eam concavitatem rectæ AB obvertere. Et quoniam patet, singula sese eodem modo habere debere, si semiordinatæ ex altera parte sumantur; porro liquet, 5°. curvam esse in se redeuntem. Quærat jam magnitudo rectæ MC, ex puncto C, in medio rectæ AB assumpto, ad extremitatem semiordinatæ PM, seu punctum in curva M ductæ.

$$\begin{array}{l} \text{Sit } AC = \frac{1}{2}a \quad MC = z \\ AP = x \end{array}$$

$$\text{erit } PC = \frac{1}{2}a - x$$

$$\text{adeoque } PC^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2 \text{ per naturam curvæ.}$$

$$\text{Ergo ob } MC^2 = MP^2 + PC^2, z^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$z = \frac{1}{2}a$$

6°. Recta igitur ex puncto C in quolibet peripheriæ punctum M ducta æqualis est rectæ AC, seu dimidiæ rectæ AB; consequenter rectæ omnes ex eodem puncto C in periph-

I i riam

riam ductæ æquales sunt (§. 87 *Arithm.*): quæ est proprietas circuli, per quam definiri solet in Geometria elementari.

Hinc vero porro 8º liquet, Curvam hanc describi, si recta CA circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ est definitio circuli realis.

$$\text{Ponamus } y = \frac{1}{2}a$$

$$\text{erit } y^2 = \frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a - x \end{array} \right\} = 0$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

Quoniam superius (n. 3) reperimus $y = \frac{1}{2}a$, si fiat $x = \frac{1}{2}a$; ideo patet, 9º. In nullo alio puncto, quam in C semiordinatam rectæ dimidiæ AB æqualem esse posse.

Si sit $PM = y$, $PC = v$, $CM = \frac{1}{2}a$ (n. 6); erit per theorema Pythagoricum:

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$$

$$\text{adeoque } \frac{1}{4}a^2 > y^2$$

$$\frac{1}{2}a > y$$

$$y < \frac{1}{2}a$$

Quamobrem 10º. ubivis extra centrum; semiordinata minor dimidia rectæ AB: consequenter cum minor sit semiordinata in centro erecta CD (n. 3), semiordinatæ autem sint chordarum dimidiæ; 11º. diameter chordarum maxima est.

Sit distantia semiordinatæ a centro $PC = v$, $PM = y$, erit

$$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2 \text{ (n. 6).}$$

Et si alia $PC = t$, PM alia $= z$,

$$\text{erit } \frac{1}{4}a^2 = z^2 + t^2$$

$$\text{Quare } z^2 + t^2 = y^2 + v^2$$

$$\text{sit } t > v$$

$$\text{erit } z^2 < y^2$$

$$z < y$$

12º. Semiordinata itaque z tanto minor alia quacunque semiordinata y , quanto magis a centro distat; consequenter chordæ tanto minores, quanto a centro remotiores.

Sit $AB = a$, $AP = x$, erit PB Tab. II; Fig. 18.
 $= a - x$, adeoque

$$AP^2 = x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2, \text{ ex natura Curvæ}$$

$$AM^2 = ax$$

$$\text{Similiter } PB^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$PM^2 = ax - x^2$$

$$MB^2 = a^2 - x^2$$

$$AM^2 = ax$$

$$MB^2 + AM^2 = a^2 = AB^2$$

Quoniam $AB^2 = AM^2 + PB^2$, triangulum AMB rectangulum est, consequenter 13º. angulus AMB in semicirculo rectus.

Et quia $AM^2 = ax$, $BM^2 = a^2 - ax$;

$$\text{erit } a : AM = AM : x$$

$$a : BM = BM : a - x$$

hoc est $AB : AM = AM : AP$

$$AB : BM = BM : PB$$

Est

Est igitur 14°. Chorda media proportionalis inter diametrum AB & segmentum adjacens.

Tab. II. Fig. 19. Quodsi quærat^rur recta TM ex puncto quocunque T intra circulum assumto in peripheriam ducta; ducatur, per centrum C & punctum T, recta AB, quæ erit diameter circuli, & ex puncto peripheriæ M demittatur perpendicularis MP, quæ erit semiordinata. Sit jam

$$\begin{array}{ll} AC=CB=a & AP=x \\ BT=b & \text{erit } PC=a-x \\ \text{erit } CT=a-b & PT=2a-b-x \end{array}$$

Porro

$$\begin{array}{l} PM^2 = 2ax - x^2, \text{ ex natura circuli} \\ PT^2 = (2a-b)^2 - 4ax + 2bx + x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} TM^2 = (2a-b)^2 - 2ax + 2bx \\ = (2a-b)^2 - 2(a-b)x \\ = TA^2 - 2CT \cdot AP \end{array}$$

Est adeo 15°. Quadratum rectæ TM æquale excessui quadrati rectæ TA supra rectangulum ex duplo distantia puncti T a centro C in abscissam AP puncto M respondentem. Hoc theorema in Elementis non extat: ex eo tamen consequuntur, quæ in iis demonstrantur. Nimirum quia 2CT constans est; decrescente abscissa AP decrescit quoque rectangulum ex AP in 2CT; & cum quadratum rectæ TA non minus constans sit, quo minus fuerit rectangulum ex 2CT in AP, eo major evadet excessus quadrati rectæ TA supra hoc rectangulum; consequenter eo majus erit quadratum rectæ TM, quippe

eidem æquale, adeoque etiam ipsa recta TM. Et quando TM incidit in diametrum, seu punctum M in A, quadratum ipsius TM æquale evadit quadrato ipsius TA; consequenter TA major est qualibet TM, adeoque maxima rectarum, quæ ex puncto T in peripheriam duci possunt. Incidimus adeo 16°. in theorema 63 (§. 303 *Geom.*)

Ante invenimus (n. 14) $AM^2 = AB \cdot AP$. Tab. II. Fig. 18. hoc est, quod quadratum chordæ sit æquale rectangulo ex diametro in abscissam. Quamobrem, cum crescente abscissa AP crescat arcus AM, crescat etiam rectangulum ex diametro AB in abscissam AP; ideo patet 17°. quadratum chordæ majoris esse majus quadrato chordæ minoris; consequenter chordam majorem subtendere arcum majorem, quam minor, seu chordam arcus majoris majorem esse, chordam minoris minorem.

Alia ex æquatione ad circulum deducuntur, in ipsa Analyfi præsertim infinitorum, qua in Geometria sublimiori carere minime possumus. Ex hætenus dictis abunde patet, quomodo applicatione Algebræ ad ea, quæ ex EUCLIDE notissima sunt, methodus definiendi curvas per æquationes, & ex iis deducendi earum geneses ac constructiones, proprietates, aliaque symptomata, innotescere poterit. De sectionibus conicis APOLLONIUS similiter demonstravit theoremata, quorum ope per æquatio-

nes definiuntur, quemadmodum in hoc capite fecimus. Quamobrem apparuit, eandem methodum ad conicas quoque sectiones applicari posse. Atque sic enata est methodus tractandi curvas per æquationes, seu Algebram ad Geometriam sublimiorem applicandi. Hæc non eo fine a nobis adducuntur, ut inventorum laudi detrahamus; sed ut discamus, vulgarium meditationem ducere ad maxime ardua; & ea neglecta inventores sibimetipsis obesse, si quando per ambages quærunt, quæ obvia sunt recta via incedentibus; utque tyrones ideam hujus methodi animo concipiant, quæ in ejus applicatione ad altiora facem præfert. Qui recta via in inveniendi progreditur, ex iis, quæ cognita atque trita sunt, colligit quæ nondum patent, parum sollicitus, quamnam utilitatem sint habitura, quæ deteguntur. Sed de his dicemus, ubi Artem inveniendi ex instituto exposituri sumus.

§. 194. Diximus superius (§. 169), nondum invento calculo universalis, Algebram numerosam jam applicari potuisse ad Geometriam, ut per eam detegerentur theoremata & problematum constructiones. Immo ipsa etiam applicatio ad Geometriam sublimiorem fieri poterat non sine successu. Dicitis igitur fidem facere nostrum est uno alteroque exemplo. Ponamus ex. gr. quæri relationem rectarum AT & TE, ex eodem puncto T extra cir-

culum dato, ductarum; quarum altera AT circulum tangit in A, altera TE eundem secat. Tab. II.
Fig. 20.

Sit diameter BE=1, TB=x

erit AC= $\frac{1}{2}$, TC= $\frac{1}{2}+x$

sit porro AT=2, TE=1+x

Quoniam AT perpendicularis ad AC (§. 308 *Geom.*), erit

TC²=AC²+TA² (§. 417 *Geom.*)

adeoque $(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + x^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2^2$

$$2 \cdot \frac{1}{2}x + x^2 = 2^2$$

sed $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, per cond. probl.

ergo $1x + x^2 = 2^2$

hoc est $(1+x)x = 2^2$

sive TE.TB = AT²

Quamobrem TE:AT=AT:TB

Habemus itaque duo theoremata:

1°. Quadratum tangentis, in hypothesis problematis, est æquale rectangulo ex secante in ejus portionem extra circulum. 2°. In eadem hypothesis tangens est media proportionalis inter secantem & ejus portionem extra circulum.

In Algebra speciosa diametrum appellamus *a*, tangentem *b*. Cum hæc signa sint primitiva, perinde est sive diametrum *a*, sive 1, & num tangentem *b*, an vero 2 dicas, modo in calculo universalitatem conserves, ut in locum 2 quemcunque numerum alium surrogare possis, sive rationalem, sive irrationalem, sive integrum, sive fractum, qui in dato casu exprimit rationem ad diametrum tanquam unitatem.

Ponq.

Tab. I.
Fig. 3.
Analys. Ponamus porro problema 13 (§. 255 *Analys.*) solvendum esse per Algebram numerosam, sed universaliter, quemadmodum solvitur per speciosam. Solutio hæc erit:

$$\begin{aligned} \text{fit } AB + BC + CA &= 6 \quad AC = x \\ \text{Area } \triangle &= 2^2, \text{ erit } BC + BA = 6 - x \\ AC^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Cum sit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2 AB \cdot BC$ (§. 216 *Arithm.*); erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2 AB \cdot BC$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero $(AB + BC)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6x + x^2$ & $2 AB \cdot BC = 4 \cdot 2^2$ (§. 392 *Geom.*). Quamobrem

$$x^2 = 6^2 - 2 \cdot 6x + x^2 - 4 \cdot 2^2$$

$$0 = 6^2 - 2 \cdot 6x - 4 \cdot 2^2$$

$$2 \cdot 6x = 6^2 - 4 \cdot 2^2$$

$$x = \frac{6}{2} - 2 \cdot \frac{2^2}{6}$$

Patet itaque hypothenusam trianguli rectanguli x esse æqualem excessui semiperimetri $\frac{6}{2}$ supra tertiam pro-

portionalem ad semiperimetrum $\frac{6}{2}$ & latus quadrati 2 areæ trianguli æqualis. Unde liquet, problema geometricæ construi, si ad semiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis quæraturn tertiam proportionalis, & hæc ex semiperimetro auferatur.

Æquatio pro circulo erat $y^2 = ax - x^2$, ubi a diametrum denotat, sive igitur diametrum dicas a , sive 1 aut 2, modo observes ea, quæ ad

universalitatem calculi conservandam præcepimus; ex æquatione $y^2 = 1x - x^2$, vel $y^2 = 2x - x^2$ eadem crues, quæ paulo ante ex altera cruimus (§. 194).

Immo nondum invento calculo literali poterant quoque quantitates datæ exprimi literis, quibus in Geometria lineas indigitamus, veluti in exemplo primo.

$$\begin{aligned} \text{Diameter} &= BE & TB &= x \\ \text{radius} &= AC & TC &= AC + x \\ \text{tangens} &= AT & TE &= BE + x \end{aligned}$$

Tab. II.
Fig. 20.

$$\begin{aligned} \text{Unde resultat æquatio} \\ AC^2 + 2AC \cdot x + x^2 &= AC^2 + AT^2 \end{aligned}$$

$$2AC \cdot x + x^2 = AT^2$$

$$(BE + x) x = AT^2$$

$$\text{h. e. } TE \cdot TB = AT^2$$

vel in problemate altero

$$\text{Periph. } \triangle = AB + BC + CA \quad AC = x \quad \text{Tab. I.}$$

$$\text{Area } \triangle = DE^2 \quad AC^2 = x^2 \quad \text{Fig. 3.}$$

$$BC + CA = AB + BC + CA - x \quad \text{Analys.}$$

Unde reperitur ut ante æquatio:

$$\begin{aligned} x^2 &= (AB + BC + CA)^2 - \\ 2(AB + BC + CA)x + x^2 &- 4DE^2 \end{aligned}$$

$$0 = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x - 4DE^2$$

$$2(AB + BC + CA)x = (AB + BC + CA)^2 - 4DE^2$$

$$x = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) - 2DE^2 : (AB + BC + CA)$$

I i 3

Simi-

Tab. II.
Fig. 17. Similiter si diameter circuli dicatur AB, semiordinata PM, abscissa AP; æquatio ad circulum est $PM^2 = AB \cdot AP - AP^2$: unde eadem deducuntur, quæ ex æquatione $y^2 = ax - x^2$ deduximus.

Talia monemus, ut appareat Vetricibus plura in potestate fuisse, quam existimavere, propterea quod ad studium mathematicum non eam attentionem attulerunt, quam in superioribus commendavimus, ut methodos intimius perspiciamus, ea discernentes, quæ sunt legum methodi, ab iis, quæ characteristica tribuenda, & ut characteristica ubivis commodum faciamus usum: neque enim iidem characteres æque satisfaciunt in omni casu, sed alii aliis non sine utilitate haud raro substituuntur. Neque vero est, quod excipias, nos in calculo universalis numeroso, & substitutis linearum appellationibus communibus, adhibere artificia ex characteristica, qua in Algebra speciosa utimur, petita; veluti dum potentias linearum designamus per exponentes, numeris vel literis majoribus quibus lineæ denotantur adscriptos instar apicum. Etenim hanc denotationem jam indicavit KEPLERUS in *Harmonica*, calculo literali adhuc ignorato, & per ea eadem patere poterat, quæ de natura numerorum cofficorum, quos vocat, tradidit STIFELIUS in *Arithmetica integra*, multo ante, quam VIETA de *Arithmetica literali* cogitaret, & HARIOT-

TUS atque CARTESIUS eandem ulterius perficerent. Et quamvis recentior characteristica commodior sit; ipsa tamen methodus per eam non variatur, quæ etiam absque omni characteristica subsistit: sit ita, quod, deficiente characteristica commoda, subinde tantæ suboriantur molestiæ, quas devorare non est cuiusvis, & ea requiratur attentio, ut ab errore immunem te præstes, quam non quivis afferre valet. Hæc ignorare non potest, qui ad characteristicam, qua hodie in Arithmetica utimur, eam attentionem attulerit, quam in superioribus commendavimus; & quæ acumen istud, quo ea quæ sunt legum methodi, ab iis quæ characteristica debentur separantur, confert.

§. 195. Circulus per æquationem algebraicam definiri potest, quia punctorum omnium M ad diametrum AB constans quædam relatio est, quæ exprimitur per relationem semiordinatæ ad abscissam; demittendo scilicet ex puncto quolibet M perpendiculum PM in diametrum AB, ut abscindatur AP. Unde facile intelligitur idem succedere debere in aliis curvis ubi similis relatio obtinet. Quamobrem cum constet, APOLLONIUM de parabola, hyperbola, & ellipsi, seu sectionibus conicis, tale quid demonstrasse; statim prævidere licet methodum, qua in circulo usi sumus, in iisdem quoque adhiberi posse. Enimvero possunt puncta cur-

Tab. II.
Fig. 18.

Tab. II.
Fig. 21.

væ referri ad quamcunque aliam rectam positione datam: id quod cum usui sit in sequentibus, exemplo circuli hoc ipsum declarare lubet. Ducatur recta AL, quæ circulum in C tangat; erit ea ad radium GC perpendicularis (§. 308 *Geom.*). Ducatur quoque DA, quæ circulum tangit in D, adeoque ad radium DG perpendicularis (§. cit.); cum etiam CG sit perpendicularis ad GD (§. 143, 78 *Geom.*), erit AL diametro DE parallela (§. 258 *Geom.*), & AD ad eandem perpendicularis (§. 230 *Geom.*), adeoque semiordinata (§. 370 *Analyf.*). Ducatur semiordinata alia quæcunque PM, continuanda donec diametro DE in Q occurrat; erit MQ ad DE perpendicularis. Sit AC=DG=a, AP=x, PM=y; erit QM=a-y; adeoque per naturam circuli, cum sit

$$QM^2 = DQ \cdot QE$$

erit, $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$
Quæ æquatio circulum definit respectu tangentis AL.

Fiat jam $x=0$, erit

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ay + y^2 = 0 \\ \hline a - y = 0 \\ \hline a = y \end{array}$$

hoc est, in origine abscissæ A semiordinata AD est radio circuli æqualis.

Sit $x=a$, erit

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ay + y^2 = 2a^2 - a^2 \\ \hline = a^2 \\ \hline y^2 - 2ay = 0 \\ \hline y - 2a = 0 \\ \hline y = 2a \end{array}$$

hoc est, semiordinata CN diametro circuli æqualis, seu perpendicularis CN ad AC curvæ in N occurrit.

Sit $x=2a$, erit

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ay + y^2 = 4a^2 - 4a^2 \\ \hline = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a - y = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$a = y$$

hoc est semiordinata LE radio circuli æqualis.

Quodsi quærat recta GM, cum sit per theorema Pythagoricum

$$GM^2 = MQ^2 + QG^2$$

$$\text{erit } GM^2 = 2a^2 - 2ay + y^2 - 2ax - x^2$$

est vero ex natura curvæ

$$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$$

$$\text{Ergo } GM^2 = a^2$$

$$GM = a$$

Quare si ponamus, nos ignorare, ad quam curvam sit æquatio; patet hinc eam esse ad circulum.

Nimirum quando ex æquatione data eruuntur, quæ de curva cognosci possunt, tum semper supponitur, non constare, ad quamnam curvam sit æquatio. Quodsi semicirculus DNE ad rectam AL referretur, semiordinata PO foret y, adeoque QO=y-a. Quamobrem cum eadem prodiret, quæ ante æquatio; alterum ejus membrum $a^2 - 2ay + y^2$ duas habet radices a-y & y-a: id quod indicio est, semiordinatam recta AC & minorem, & majorem esse posse; consequenter ex ipsa æquatione intelligitur.

gitur, curvam a semiordinata secari in duobus punctis. Quoniam itaque in C eandem nonnisi in uno puncto N secat; id indicio est, quod in C eandem tangat. Similiter quia in A & L semiordinata nonnisi unum valorem habet; hinc conficitur, quod semiordinatæ AD & LE curvam similiter tangere debeant. Unde liquet curvam esse in se redeuntem, & ejus puncta referri ad lineam, quæ tota extra curvam cadit, ab ea tamen non distat. Distantia enim a tota curva æstimatur ex perpendiculari minima, quæ hic nulla est.

Suadendum omnino est, ut tyrones notent, quomodo curvæ agnoscantur, & a se invicem distinguantur; nimirum relatione punctorum ad rectam quandam positione datam, & circulum referant ad varias rectæ positiones, ut totius methodi vim ac potestatem rectius ac intimius perspiciant. Hoc enim pacto non modo nihil difficultatis habebit, quod in capite præsentis occurrit; verum etiam doctrina de Locis geometricis, quæ omnem rectæ illius positionem possibilem supponit, non perturbabit tyronem. Immo in genere notandum est, si ad maxime obvia & notissima applicentur methodi novæ, in quas incidimus; haud raro talia offerri, circa quæ hærent etiam exercitiores, ubi in applicatione methodi ad nondum cognita occurrunt. Exemplum suppeditat æquatio, quam

modo dedimus pro circulo $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$. Etenim si sumis, eam explicare relationem quadrantis DMC ad rectam AC, & ponis $AP = AC$, seu $x = a$, per ea, quæ vidimus in æquatione præcedente (§. 193), prodire debere videtur $y = 0$. Unde miraris, ubi prodit $y = 2a$. Verum enimvero ubi consideras, æquationem $a^2 - 2ay + y^2$ habere duas radices, alteram nimirum $a - y$, alteram $y - a$, & priori respondere QM, posteriori autem QO; hinc discas, per æquationem $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$ tam semicirculi superioris DNE, quam inferioris DCE ad rectam AL relationem exprimi; consequenter in puncto C, ubi valor unus ipsius PM sive $y = 0$, etiam prodire debere valorem alterum ipsius $y = 2a$, recta nimirum PO in CN degenerante. Quodsi tale quid occurreret in tractatione æquationis, cui, quænam curva respondeat, adhuc ignoratur; unde hoc fiat, non adeo facile animadverteres, & multum omnino olei ac operæ perderes, antequam ex perturbatione eluctari valeres. Similiter ubi ponis $x = 0$ & $x = 2a$, prodit $a^2 - 2ay + y^2 = 0$, adeoque $y - a = 0$ & $a - y = 0$, quæ utraque æquatio dat eundem valorem nempe $y = a$. Unde vides, in contactu D & E, duas radices æquales habere æquationem; quemadmodum deinceps supponitur in methodo tangentium, & sine quo principio CARTESIUS ad methodum suam tangentium non pervenisset.

Non

Non addimus plura, cum hætenus dicta abunde sufficiant ad persuadendum utilitatem meditationis eorum, quæ nobis notissima sunt, ut eorundem ope detegantur alia, quorum alias cogitatio animum nunquam subiisset.

§. 196. Quodsi hanc methodum, quam adeo fecundam experiris in circulo, etiam ad curvas alias, quas tractarunt Veteres, applicare volueris; non omnes promiscue per æquationes definiri posse animadvertes, ubi eodem modo puncta eorum refert ad rectam quandam positione datam. Non succedet in Spiralibus ARCHIMEDIS, nec in Quadraticis DINOSTRATIS, quemadmodum sub finem capitis videbimus. Quoniam itaque ex iis, quæ de circulo diximus, & per sectiones conicas confirmantur, didiceris, quod æquatio curvam definiens supponat constantem relationem puncti cujuscunque ad eandem rectam positione datam; hinc utique patet, non dari posse æquationem ad curvam, cujus puncta ad rectam positione datam constantem relationem minime habent. Atque adeo non miraberis, nec hærebit aqua, ubi curva offertur, quæ per istiusmodi æquationem explicari nequit. Et patet ratio, cur CARTESIUS curvas distinxerit in algebraicas & non algebraicas, quarum illas vocat geometricas, has vero mechanicas; propterea quod existimavit, illas solas in Geometriam recipi posse,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

has vero ex eadem excludi debere; quod ignoravit æquationes differentiales, de quibus dicemus in Analyfi infinitorum, & quarum ope non minus algebraice tractantur curvæ, quæ a CARTESIO mechanicæ appellantur, quam quas geometricas appellat. Et sic patet ratio divisionis Curvarum in algebraicas & transcendentis, quam tradimus (§. 377, 380 *Analyf.*)

§. 197. Notandum vero est artificium, quo æquatio curvæ particularis reducitur ad generalem, quæ infinitas curvarum species sub se comprehendit: id quod fit exponentium indeterminatorum surrogatione in locum determinatorum; quo artificio jam usi sumus in anterioribus, veluti in theoremate generali de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analyf.*). Probe quoque notandum est, quod in istiusmodi æquationibus observanda sit lex homogeneorum, quæ præcipit, ut termini singuli æquationum habeant dimensiones numero æquales, hoc est, ut unus valor prodeat, ductis tot rectis in se invicem, quot in se invicem sunt ducendæ, ut prodeat quilibet alter. Etsi enim in Geometria non detur magnitudo, quæ ultra solidum, quod trium dimensionum est & tribus rectis in se invicem ductis resultat, assurgit; in Algebra tamen fictione non inutili admittuntur hypersolida, quæ ductu quotlibet rectarum in se invicem in infinitum resultant. Nititur hæc fictio princi-

Kk

prio,

pio, quod inter duas lineas infinitæ cadere possint lineæ mediæ continue proportionales, quemadmodum ex genesi potentiarum in infinitum progredientium liquet; veluti si ponas numeros in progressionē geometrica 1, 2, 4, 8, 16, 32, &c. in infinitum, hoc est 1, 2¹, 2², 2³, 2⁴, 2⁵ &c. in infinitum, ubi inter 1 & 2² una, inter 1 & 2³ duæ, inter 1 & 2⁴ tres, inter 1 & 2⁵ quatuor cadunt numeri mediæ continue proportionales, & sic porro in infinitum. Etsi enim hic numeri omnes, quorum ductu in se invicem resultant termini posteriores, sint inter se æquales; constat tamen, vel ex Geometria elementari, (in qua v. gr. rectangulum reducitur ad quadratum eidem æquale, & parallelepipedum ad cubum sibi æqualem,) ea, quæ ductu linearum inæqualium in se oriuntur, reduci posse ad talia, quæ oriuntur ductu totidem æqualium in se invicem. Sufficiant hæc in gratiam tyronum dicta, ut ipsis aliqua lux affundatur in considerandis hypersolidis, quæ Algebra admittit. Inprimis autem attentionem meretur æquatio, quæ eminenter continet omnes æquationes ad algebraicas curvas. Etenim in eo latent tria artificia, nimirum 1^o. quod æquationis alterum membrum sit nihilum, de quo artificio jam supra diximus (§. 189); 2^o. quod terminus unus repræsentet in casu particulari plures, ut adeo coëfficientes explicandi sint non uno, sed diversis modis, 3^o. quod

in æquatione nulla habeatur ratio signorum, quæ in particularibus variant æquationibus, sed termini omnes afficiantur signo +, ne opus sit plures formare æquationes generales, ubi omnes particulares sub una comprehendi possunt, quod sane artificium maximi faciendum. Enimvero ut applicatio formulæ generalis manifesta evadat, lubet eam applicare ad circulum. Æquatio generalis est:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$$

Æquatio ad circulum:

$$y^2 + ax - x^2 = 0$$

Vides hic abesse xy , nec ullum adest membrum constans ex mere cognitis, adeoque $cy^r x^s + df = 0$, consequenter formula generalis contracta hæc relinquitur:

$$ay^m + bx^n = 0$$

Est igitur

$$ay^m = y^2$$

$$\text{adeoque } a = 1$$

$$m = 2$$

Porro

$$bx^n = +ax \quad bx^n = -x^2$$

$$\text{adeoque } b = a, n = 1 \quad b = -1, n = 2$$

Docet adeo hoc ipsum exemplum, quomodo terminus unus in generali comparetur cum pluribus in particulari, ut coëfficientes indeterminati in generali determinantur ex particulari. Patet etiam, quomodo signum + in formula generali non obstat, quo minus coëfficiens negati-

us determinetur ex particulari, dum hic reperitur $b = -1$. Habet nimirum b in casu præsentis valorem duplicem, alterum positivum $+a$, alterum negativum -1 .

§. 198. Qui quæ de circulo diximus probe perpendit, ei non hærebit aqua circa ea, quæ de sectionibus conicis aliisque curvis in præsentis capite, & de locis geometricis in sequente demonstrantur. Incepimus a parabola, quæ est sectionum conicarum simplicissima. Æquatio ejus $y^2 = ax$. Quodsi fiat

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ \hline \text{erit } y^2 & = & 0 \\ \hline y & = & 0 \end{array}$$

Tab. II. Atque adeo patet 1°. in origine
Fig. 22. abscissæ A curvam secare rectam datam, ad quam refertur, AX.

Sit alia abscissa $AP = v$, eidem respondens semiordinata $PM = z$, erit $z^2 = av$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Ponamus } v & > & x \\ \hline \text{erit } av & > & ax \\ \text{adeoque } z^2 & > & y^2 \\ \hline z & > & y \end{array}$$

2°. Crescentibus adeo abscissis, semiordinatæ quoque crescent; consequenter curva in infinitum continuari potest, & ab axe AX continuo magis magisque recedit.

$$\begin{array}{rcl} \text{Si fiat } x & = & a \\ \hline \text{erit } y^2 & = & a^2 \\ \hline y & = & a \end{array}$$

3°. Quando igitur abscissa parametro æqualis, etiam semiordinata eidem æqualis est, consequenter si abscissa parametro æqualis, semiordinata & abscissa æquales sunt.

$$\begin{array}{rcl} \text{Sit } y & = & \frac{1}{2}a \\ \hline \text{erit } ax & = & \frac{1}{4}a^2 \\ \hline x & = & \frac{1}{4}a \end{array}$$

4°. Si ergo semiordinata semiparametro æqualis, quarta diametri parte a vertice A seu origine sua distat.

Quodsi æquationem ad parabolam cum æquatione pro omnibus curvis algebraicis conferre volueris; cum hæc sit:

$$ay^m + bx^n + cy^r + df = 0$$

pro parabola vero

$$y^2 - ax = 0$$

& in hac deficiat xy & terminus constans ex mere cognitis respondens ipsi df , æquatio generalis contrahitur in

$$\begin{array}{rcl} ay^m + bx^n & = & 0 \\ \text{estque } ay^m = y^2 & & bx^n = -ax \end{array}$$

adeoque; $a = 1, m = 2, b = -a, n = 1$

Hæc addere libuit, ut appareat, eodem modo tractari posse æquationem ad parabolam, qua tractavimus æquationem ad circulum. Cetera enim patent per resolutionem problematum in hoc capite propositorum.

§. 199. De methodo tangentium, qua utimur problematis 181, 189, 208, (§. 410, 440, 491 *Analys.*), quædam adhuc annotanda sunt. Tangentes curvarum facillime determinantur per calculum differentialem, quemadmodum in *Analysi* infinitorum docemus. Quoniam vero sectiones conicas referre minime licet ad diametrum, nisi præsupposita tangente, cui semiordinatæ sunt parallelæ & quæ ex puncto contactus ducitur; ideo necessarium fuit tangentem determinari per Algebram communem. Adhibuimus itaque methodum CARTESII, quæ nititur hoc principio, quod in contactu duæ radices evadant æquales: id quod superius in circulo reperimus (§. 195). Pona-

Tab. II.
Fig. 23.

mus enim rectam TR secare curvam in M & N; evidens est, quod, si abscissæ AP & AQ dicantur x , eisdem respondere duas semiordinatas PM & QN, per quas y in æquatione explicari potest. Ducatur alia tr , quæ eandem curvam secat in punctis m & n : habebimus denuo duas semiordinatas pm & qn , per quas explicatur y in æquatione data. Patet autem abscissam unam PM continuo crescere, & alteram QN continuo decrescere, donec punctis M. & N in contactu coincidentibus, in æquatione data una alteri fiat æqualis. Ad hæc qui animus advertit, nullo negotio deprehendet, quomodo ad methodum istam pervenire licuerit. Patebit autem suo loco, subtangentem per hanc

methodum prodire eandem in sectionibus conicis, quæ invenitur per calculum differentialem. Etsi autem hæc methodus videatur universalis, ad tantas tamen in curvis altioribus calculi perplexitates deducit, quæ vix videntur superabiles. Unde in ea perficienda plurimum defudarunt Geometræ, donec tandem ope calculi differentialis obtentum fuerit quod quærebatur.

§. 200. In Ellipsi $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420 *Analys.*). Quodsi hic ponas

$$\begin{array}{r} x = 0 \\ \hline \text{erit } ay^2 = 0 \\ \hline y^2 = 0 \\ \hline y = 0 \end{array}$$

Quamobrem patet, 1º. in origine abscissarum curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

Si fiat $x = a$

$$\begin{array}{r} \text{erit } ay^2 = a^2b - a^2b \\ \hline = 0 \\ \hline \end{array}$$

adeoque denuo $y = 0$

Unde liquet, 2º. curvam quoque secare rectam, ad quam refertur, si abscissa fit datæ a æqualis, adeoque concavitatem obvertere eidem rectæ: ex quo porro sequitur, cum ex altera parte eodem modo sese habeant, quæ modo reperimus, curvam esse in se redeuntem.

Eiat

$$\begin{array}{l} \text{Fiat} \quad b = a \\ \hline \text{erit} \quad ay^2 = a^2x - ax^2 \\ \hline y^2 = ax - x^2 \end{array}$$

3°. Æquatio adeo ad ellipsin degenerat in æquationem ad circulum, ut circulus pro specie quadam ellipseos haberi possit, nactus nomen ellipseos æquilateræ, nisi jam antea nomine circuli insignita fuisset hæc curva.

Quodsi a ponatur infinita, erit in æquatione ad ellipsin

$$\frac{bx^2}{a} = 0$$

$$\text{adeoque} \quad y^2 = bx$$

Cum adeo æquatio ad ellipsin degeneret in æquationem ad parabolam, ideo liquet 4°. In locum ellipseos, cujus axis infinitus est, surrogari posse parabolam eandem cum ellipsi parametrum habentem.

Quodsi quis hæreat in infinitate axis elliptici, & in eo, quod hinc colligatur $\frac{bx^2}{a} = 0$; is evolvat, quæ in Ontologia de infinito mathematico demonstravimus.

§. 201. Eodem modo in hyperbola quoque generalia quædam ex æquatione ejus colliguntur. Æquatio ad hyperbolam est: $ay^2 = abx + bx^2$, seu

$$y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$

$$\begin{array}{l} \text{Sit} \quad x = 0 \\ \hline \text{erit} \quad y^2 = 0 \\ \hline y = 0 \end{array}$$

Patet ergo 1°. in origine abscissarum curvam secare rectam positione datam, ad quam ea refertur.

$$\begin{array}{l} \text{Sit} \quad x = a \\ \hline \text{erit} \quad y^2 = ab + a^2b : a \\ \hline \quad \quad = ab + ab = 2ab \\ \hline y = \sqrt{2ab} \end{array}$$

Unde liquet 2°. si abscissa fuerit axi transverso æqualis, semiordinatam fore mediam proportionalem inter axem transversum & duplam parametrum.

$$\begin{array}{l} \text{Sit} \quad x = b \\ \hline \text{erit} \quad y^2 = b^2 + \frac{b^3}{a} \\ \hline y = \sqrt{b^2 + \frac{b^3}{a}} \end{array}$$

Patet adeo 3°. si abscissa fuerit parametro æqualis, semiordinatam esse mediam proportionalem inter parametrum & compositam ex parametro & tertia proportionali ad axem transversum & parametrum.

Sit alia abscissa v , alia semiordinata eidem respondens z ; erit per naturam curvæ

$$z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Quare si } v > x \\
 \text{erit } bv > bx \\
 \frac{bv^2}{a} > \frac{bx^2}{a} \\
 \hline
 bv + \frac{bv^2}{a} > bx + \frac{bx^2}{a} \\
 \hline
 y^2 > z^2 \\
 y > z
 \end{array}$$

Patet itaque 4°. crescente abscissa crescere semiordinatam; adeoque curvam continuo magis magisque ab axe recedere; consequenter in infinitum continuari:

Quodsi æquationem pro hyperbola cum generali pro omnibus algebraicis conferre volueris; cum sit

$$ay^m + bx^n + cx^r y^s + df = 0$$

$$ay^2 - abx - bx^2 = 0$$

$$\text{erit } cx^r y^s + df = 0$$

$$\frac{ay^m}{a} = \frac{ay^2}{a}$$

$$a = a, m = 2$$

$$\frac{bx^n}{bx^n} = \frac{-abx}{-abx} \quad \frac{bx^n}{bx^n} = \frac{-bx^2}{-bx^2}$$

$$\frac{b}{b} = \frac{-ab}{-ab, n=1} \quad \frac{b}{b} = \frac{-b}{-b, n=2}$$

Reliqua in ipsa Analyfi reperiuntur.

§. 202. Enimvero applicemus eandem methodum ad æquationem pro hyperbola intra asymptotos. Quoniam $xy = ab$,

$$\text{erit } x = \frac{ab}{y}$$

$$\text{Fiat, } x = 0$$

$$\text{erit } \frac{ab}{y} = 0$$

adeoque, $y = \text{infin.}$

Patet itaque 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam.

$$\text{Similiter cum sit } y = \frac{ab}{x}$$

$$\text{Si ponamus } x = \text{infin.}$$

$$\text{erit } \frac{ab}{x} = 0$$

$$\text{adeoque } y = 0$$

Unde liquet 2°. rectam, in qua sumuntur abscissæ cum curva non concurrere nisi intervallo infinito, seu ab eadem non distare nisi intervallo infinite parvo; quatenus ab quantitas ordinaria per infinitam divisa dat particulam infinite parvam, quæ respectu nihilum est.

Sit jam alia abscissa v , semiordinata alia z ; erit per naturam curvæ

$$z = \frac{ab}{v}$$

$$\text{Ponamus } v > x$$

$$\text{erit } \frac{ab}{v} < \frac{ab}{x}$$

$$\text{adeoque } z < x$$

Videmus ergo 3°. crescente abscissa decrescere semiordinatam; consequenter lineam curvam continuo magis magisque ad eam appropinquare rectam, in qua sumuntur semiordinatæ.

Quoniam itaque hæc cum curva non concurrat nisi infinito intervallo, aut potius ab eadem non distat nisi quantitate infinite parva, quando illa

illa in infinitum continuatur (*vi num.* 2); & in origine abscissarum semiordinata infinita (*vi num.* 1); curva continetur inter duas rectas, quæ in infinitum excurrunt, & ad quas curva continuo propius propiusque accedit, nunquam tamen easdem secat. Continetur adeo inter asymptotos. Ex hoc exemplo apparet, quomodo ex æquatione colligatur, quod curva, quæ per eam definitur, habeat asymptotos.

§. 203. Sed demus etiam exemplum in curva quadam superioris generis, cujus æquatio perplexa videtur. Sit itaque $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$, quam invenimus pro Conchoide prima sive superiore (§. 538 *Anal.*); erit

$$y^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2 - x^4 - 2bx^3 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

$$\text{Fiat } x = 0$$

$$\text{erit } x^2 - 2bx = 0$$

$$\frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} = \frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0} = \text{infin.}$$

$$\text{adeoq; } a^2 - b^2 = 0, \text{ respectu } \frac{a^2b^2}{0^2} + \frac{2a^2b}{0}$$

$$\text{Quare } y^2 = \text{infin.}$$

$$y = \text{infin.}$$

Patet itaque 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam, consequenter curvæ asymptotum.

$$\text{Fiat } x = a$$

$$\text{erit } y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2} + \frac{2a^2b}{a} + a^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$= b^2 + 2ab + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= 0$$

$$y = 0$$

$$y = 0$$

Quando igitur 2°. abscissa fit ipsi a æqualis, semiordinata nulla est, adeoque curva rectam, in qua sumuntur abscissæ, secat.

Quoniam y ex infinita nulla evadit, dum x ex nihilo degenerat in a ; necesse est 3°. crescente abscissa decrescere semiordinatam.

$$\text{Quia } y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + 2\frac{a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

$$= \left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x + b)^2$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x + b)^2}$$

Est igitur y latus trianguli rectanguli, cujus hypotenusa componitur ex $\frac{ab}{x}$ & a , crus unum vero ex b & x . Unde liquet, 4°. Si semiordinata infinita dicatur regula, recta b distantia poli a regula, recta vero a distantia verticis a regula, quemadmodum termini in Conchoide recepti sunt (§. 535 *Anal.*); semiordinatam esse crus trianguli rectanguli, cujus hypotenusa componitur ex tertia proportionali ad abscissam (ejus origine in regula constituta), distantiam regulæ a vertice & ejusdem

a po-

a polo distantiam, atque distantia ejusdem regulæ a vertice, crus vero alterum ex abscissa & distantia regulæ a polo.

Tab II.
Fig. 24.

Hinc 5^o. ex data abscissa BP, distantia regulæ a polo BC, & a vertice BA, reperitur semiordinata PM, si ex P intervallo BA interfecetur regula in O, & recta PO producat, donec perpendiculari CH in polo erecta in H occurrat; tandemque intervallo CH interfecetur PM ad AB perpendicularis in M.

Quoniam enim $PB = x$, $PO = a$, $BC = b$; erit $OH = \frac{ab}{x}$ consequenter

$PH = \frac{ab}{x} + a$, trianguli rectanguli

PCH hypotenusa. Quamobrem cum porro sit $CP = b + x$; erit $CH = \sqrt{\left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (b + x)^2} = y$,

consequenter quia $PM = CH$; erit PM semiordinata quæsitæ. Quodsi fiat $CL = PB$ & $CN = BA$, ac LN ad BC perpendicularis; recta CN producta statim refecabit semiordinatam PM.

Manifestum itaque est, quomodo ex æquatione eruatur modus determinandi geometricæ punctum curvæ respondens cuilibet abscissæ, quamvis æquatio primo intuitu videatur admodum perplexa. Ceterum in applicatione methodi generalis adhibentur varia artificia, ex anterioribus æquidem nota, quæ tamen tyroni

non statim succurrunt. Quamobrem hinc elucescit, quod jam sæpe inculcavimus, artem exercendam esse per exempla, non per regulas particulares: etsi particulares annotandæ sint, ubi occurrunt; ut tanto facilius succurrant, quando denuo iisdem opus habemus. Non addimus de conchoide alia, quæ ex ejus æquatione deduci poterant, ne simus justo prolixiores.

§. 204. Etsi ex dictis appareat, ductum curvæ hac methodo facillime indagari posse, ut de reliquis taceamus; non tamen existimandum est, idem in qualibet promiscue curva eadem facilitate succedere. Etenim si in æquationibus altioribus occurrunt termini, quos duæ indeterminatæ ingrediuntur, nec earum separatio in promptu est, quemadmodum vidimus in conchoide (§. 203); hærebit aqua. Sit ex. gr. $y^3 - axy = x^3$. Quodsi ponamus $x = a$, prodibit $y^3 - a^2y = a^3$, æquatio cubica affecta, ex qua radice extractio difficilis & cujus constructio geometrica per inferiora demum patet. Similiter, quamvis per calculum algebraicum, quæ quærentur, haud raro mira facilitate eruantur, quemadmodum supra vidimus in circulo (§. 193), & plurima capitis præsentis problemata loquuntur, quæ de sectionibus conicis proposuimus; subinde tamen calculus prolixus & intricatus evadit, prouti videre licet in probl. 193, 195, 209, (§. 449, 454, 492 *Analys.*)

§. 205.

§. 205. Nos sectiones conicas consideravimus in plano & æquationes assumimus, quæ eas definiunt. Hinc vero nondum constat, curvas istas esse sectiones coni, nisi supponas theoriâ sectionum conicarum a Veteribus traditam, tanquam cognitam. Quamobrem consultum esse duximus analytice demonstrari, sectione coni prodire has ipsas curvas, quas in plano consideravimus, & quarum descriptiones, proprietates aliaque symptomata ex æquationibus assumtis deduximus (§. 511 & seqq. *Anal.*). Poteramus æquationes, quas assumimus, eruere ex proprietatibus, quas ex sectione coni derivavimus: sed cur hoc minime fecerimus, jam monuimus (§. 514 *Anal.*). Ex. gr. pro parabola ex sectione coni deduximus

$$y^2 : q^2 = x : z$$

ubi y & q denotant semiordinatas, x & z autem ipsis respondentes abscissas.

Quoniam etiam est

$$y^2 : x = q^2 : z$$

$$\text{erit } y^2 : ax = q^2 : az;$$

Quare si ponamus, constantem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$; evidens est fore etiam $q^2 = az$, atque adeo in omni puncto curvæ esse quadratum semiordinate æquale rectangulo ex abscissa in eandem rectam constantem. Posse autem a talem assumi, ut sit $y^2 = ax$ patet, quia a tertia proportionalis est ad abscissam & semiordinatam. Idem etiam hoc

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

modo patere poterat. Si alternando esse debet $y^2 : x = q^2 : z$ (§. 173 *Arithm.*) cum ratio non sit nisi homogeneorum (§. 126 *Arithm.*) x & z denotare debent rectangula, quorum latus unum unius est x , latus unum alterius z , latus vero alterum unitas seu recta, quæ pro unitate sumitur (§. 375 *Geom.*), utique eadem utrobique (§. 178 *Arithm.*). Quod si ergo hæc recta efficere debet rectangulum x , æquale quadrato y^2 , unitas ista degenerare debet in tertiam proportionalem ad x & y , quam fore eandem cum tertia proportionali ad q & z per modo demonstrata patet. Unde manifestum est, æquationem ad sectionem coni præsentem esse $y^2 = ax$, aut, si $a = 1$, $y^2 = x$. Notandum adeo hic est, si in æquationibus non appareat lex homogeneorum observata, termini pauciorum dimensionum coefficientem esse unitatem, seu rectam quandam determinatam, quæ pro unitate sumitur. Cum autem quælibet recta pro unitate assumi possit, unitatem esse eandem non sumendum, sed demonstrandum est. Ita sumere licet $y^2 = x$, ubi coefficientens ipsius x est 1; sumere quoque licet $q^2 = z$, ubi coefficientens ipsius z est 1. Enimvero non licet sumere coefficientes ipsarum x & z esse æquales; sed hoc demonstrandum, quemadmodum ex modo dictis claret. Nihil hic supponitur, quod non sit ex notione numeri rationalis integri manifestum, quem in communi Arith-

metica practica consideramus; modo ad communia perpendenda omnem attentionem afferamus: qua neglecta, haud raro haerent tyrones, ubi sumuntur quæ per ea patent, & ad ardua magis applicantur; nisi fide Mathematicorum tanquam vera admittere velint, quorum rationem minime capiunt.

§. 206. Id quoque notandum est, in æquationibus, per quas definiuntur curvæ, originem abscissarum non semper assumendam esse in aliquo curvæ puncto, etiam si recta, ad quam curva refertur, eandem secat vel tangit; sed eandem esse posse quodvis punctum aliud in eadem recta assumptum. Ita ex. gr. in circulo, si peripheriæ puncta referuntur ad diametrum AB, origo abscissarum statui potest in centro C, ut sit $PC = x$, $PM = y$ & radius $AC = MC = a$. Quoniam enim $MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebimus $a^2 = y^2 + x^2$, adeoque $y^2 = a^2 - x^2$; quæ æquatio non minus circulum definit, quam altera, quam supra dedimus, & unde circuli genesis atque proprietates, cum aliis symptomatis, deduximus (§. 193). Atque ex hac æquatione eadem deducere licet, quæ ibidem ex altera deduximus, si tanquam data supponatur, ut adhuc ignoretur, ad quamnam curvam ea sit. Etenim si hic ponas

$$\begin{array}{rcl} & x^2 & = 0 \\ \text{erit} & y^2 & = a^2 \\ & y & = a. \end{array}$$

Unde liquet 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse constanti a æqualem.

Si vero ponas $x = a$

$$\begin{array}{rcl} \text{erit} & y^2 & = a^2 - a^2 \\ & & = 0 \\ & y & = 0 \end{array}$$

Unde patet 2°. si abscissa fiat semiordinatæ, quæ in origine abscissarum est (*vi num. 1*), æqualis, curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

Quoniam $a^2 = y^2 + x^2$; ideo liquet, 3°. Hypothenusam trianguli rectanguli, cujus crura sunt abscissa & semiordinata, ad quodvis punctum curvæ esse eandem; consequenter cum hæc hypothenusa constanter ex origine abscissarum ducatur, rectas omnes ex origine abscissarum ductas ad curvam esse inter se æquales. Æquatio adeo nos deducit ad genesis circuli non minus, quam ad definitionem ejus nominalem; &, ubi definitio circuli ex elementis nota supponitur, hinc discimus, æquationem esse ad circulum. Immo potest origo abscissarum etiam extra centrum statui, veluti in L, ubi AL Tab. II. constans est, & abscissa LP. Fig. 25. Sit enim $AL = b$, $AB = a$, $LP = x$, $PM = y$, erit $AP = b + x$, $PB = a - b - x$, consequenter ob

$$PM^2 = AP \cdot PB$$

$$y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$$

Quodsi

Quodsi hic ponas

$$x = 0$$

erit

$$y^2 = ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(ab - b^2)}$$

Unde liquet, 1°. in origine abscissarum semiordinatam esse mediam proportionalem inter rectam quandam constantem b & differentiam ejus a constante alia a .

Quodsi fiat

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 + a^2 - 2ab - a^2 \\ = -ab - b^2$$

Patet itaque 2°. abscissam nunquam fieri posse ipsi a æqualem, sed semper eadem minorem esse debere.

Sit

$$x = a - b$$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 - 2ab + 2b^2 + a^2 \\ - ab - a^2 + 2ab - b^2$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Patet adeo, 3°. si abscissa fiat differentia quantitatum constantium æqualis, curvam secare rectam positione datam.

Sit

$$x = \frac{1}{2}a - b$$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 - ab + 2b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \\ - \frac{1}{4}a^2 + ab - b^2$$

$$y^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

Videmus itaque 4°. si abscissa fiat $\frac{1}{2}a - b$, semiordinatam esse $= \frac{1}{2}a$.

Quodsi ponamus

$$b = 0$$

$$\text{erit } y^2 = ax - x^2$$

Æquatio igitur degenerat in æquationem ordinariam pro circulo (§. 193).

Licet etiam originem abscissarum statuere extra circulum, veluti in N , ut sit, $NP = x$, adeoque si $NA = b$, $AP = x - b$. Et similiter abscissas computare licet in aliqua a centro C distantia, ut earum origo vel sit inter A & C , vel inter C & B . Hæc si notent tyrones, in doctrina de locis geometricis & constructione æquationum altiorum nihil prorsus sentient difficultatis. Patebit etiam, quomodo ad formulas generales plana sit via. Quæ vero hic annotamus de relatione curvarum ad rectam, quæ curvam in puncto quodam secat, eadem quoque locum habent, ubi eandem referre libuerit ad rectam extra curvam quomodocunque sitam. Nec oleum atque operam perdunt tyrones, si in omni casu possibili æquationem ad circulum investigent, ut methodum definiendi curvas per æquationem intimius inspiciant beneficio exempli omnium facillimi & notissimi, idem imitaturi in curvis aliis, quod in circulo fecere.

§. 207. Enimvero abunde ea docuimus, quæ in hac methodo lucem accendunt tyronibus, ne in tenebris

Tab VI.
Fig. 67.
Algeb.

bris palpitent ad magis ardua progressi, quemadmodum vulgo accidere solet. Sed dicenda quoque nonnulla sunt de lineis non algebraicis, quarum nonnullæ sub finem capitis definiuntur. Definimus Quadraticam DINOSTRATIS, per $ay = bx$, ubi x denotat arcum AN, a Quadrantem AB, b radium AC, & y portionem radii AP, quæ ad radium eandem rationem habet, quam habet arcus AN ad Quadrantem. Quamobrem etsi æquatio alias definiat triangulum rectangulum æquicrurum; consequenter in ea spectetur relatio rectæ, quæ hypothenusa est ad crus unum, in quo sumuntur abscissæ; præsentem tamen in casu æquatio, quæ eadem videtur, prorsus diversa est. Etenim in casu priori, quando est ad triangulum rectangulum æquicrurum, a & x denotant lineas rectas; in posteriori autem, quando ad Quadratricem est, a designat quadrantem, x arcum circuli quadrante minorem. Æquatio igitur algebraica non est; nisi cum in ea singulæ literæ denotent totidem rectas. Hoc tamen non obstante æquationes istiusmodi, quas curvæ lineæ ingrediuntur, tractari possunt eodem modo, quo ante tractavimus algebraicas: quod succedere ipsa præsens æquatio docere potest. Etenim

$$\begin{array}{l} \text{Si fiat} \\ \text{crit} \end{array} \quad \begin{array}{r} x = 0 \\ ay = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

Atque adeo patet, quadratricem concurrere cum radio in origine abscissæ.

$$\begin{array}{l} S \quad x = a \\ \hline \text{crit} \quad ay = ab \\ \hline y = b \end{array}$$

Unde liquet, quamprimum x fit quadranti æqualis, rectam AP, quæ designatur per y , degenerare in radium.

$$\begin{array}{l} \text{Si} \quad x = \frac{1}{2}a \\ \hline ay = \frac{1}{2}ab \\ \hline y = \frac{1}{2}b \end{array}$$

Evidens igitur est, dimidio quadranti respondere radium dimidium.

Eadem adeo eliciuntur, quæ per genesin Quadratricis manifesta sunt.

Quod vero etiam alia ignota hinc deduci possint, suo patebit loco (§. 55 *Anal. infin.*): id quod omnino notandum, ne nullum in usum æquatio ista data videatur.

Singulare quid habet æquatio, quod non exprimat relationem ipsius curvæ ad rectam positionem datam per se, sed relationem potius curvæ alterius, nimirum Quadrantis circuli, cuius ope determinatur punctum M; quod rectæ AP & arcui AN, hoc est duabus indeterminatis y & x respondet. Exprimit scilicet relationem arcus AN ad rectam AP, qualis esse debeat, ut ipsi AP respondeat punctum M in Quadratrice. Data enim hac relatione datur etiam punctum M.

Quo-

Quoniam vero $y = \frac{ab}{x}$, adeoque AP quarta proportionalis ad arcum AN, quadrantem AB & radium AC; determinatio puncti M dependet a rectificatione indefinita circuli, consequenter a circuli quadratura. Ceterum Quadratrix insinuat artificium reductionis constructionis curvarum ad curvas simpliciores, supposita harum quadratura vel rectificatione: neque enim in omnibus curvis rectificatio pendet a quadratura, prouti in circulo obtinet (*vi. theor. 3. §. 128 Anal.*), quemadmodum suo loco videbimus, ubi de quadratura & rectificatione curvarum agitur. Artificium hoc maximi momenti est in Analyfi infinitorum ad Geometriam sublimiorem applicata, quemadmodum patet per problemata physico-mechanica, qualia in Elementis Mechanicæ occurrunt. Quamobrem consultum est, ut tyrones, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, tempestive avertant, quomodo inventa Veterum recentioribus Geometris insinuaverint artificia, aut saltem insinuare potuerint, siquidem attentionem suam deficere non fuerunt passi.

§. 208. Notandum adhuc est, posse etiam curvas referri ad curvas alias positione datas, quemadmodum referuntur ad rectas positione datas, ita ut abscissæ sumantur in curvæ positione data, quemadmodum su-

muntur in recta positione data: quod ut facilius intelligatur, dabo exemplum. Sit AMO parabola *Apollo-* Tab. II.
niana seu primi generis. Produca- Fig. 22.
tur semiordinata PM in N, donec recta MN habeat ad arcum parabolicum AM eam relationem, quam habet semiordinata PM ad ejus abscissam AP; evidens est, si arcus AM $= x$, MN $= y$ & recta quædam constans $= a$, fore $y^2 = ax$. Æquatio hæc ab æquatione ad parabolam in eo differt, quod x denotet arcum parabolicum AM, cum in æquatione ad parabolam denotet rectam AP. Ceterum eadem ex æquatione hac deducuntur, quæ ex æquatione ad parabolam, nisi quod theoremata ingrediatur arcus parabolicus. Nimirum cum sit $y = \sqrt{ax}$; semiordinata MN est media proportionalis inter arcum parabolicum datum AM & rectam quandam datam constantem a , quæ tertia proportionalis est ad quemvis arcum parabolicum & ipsi respondentem semiordinatam. Et quemadmodum in parabola quadrata semiordinatarum habent rationem abscissarum, ita semiordinatæ curvæ ANR sunt in ratione arcuum parabolicorum ipsis respondentium. Hoc artificio jam usus est ARCHIMEDES in spirilibus qui eas retulit ad peripheriam circuli tanquam ad axem. Facile autem apparet, relationem semiordinatæ MN ad arcum AM exprimi posse per æquationem curvæ algebraicæ cujuscunque alterius.

rius. Ita si arcus $AO = a$, $AM = x$, & $MN = y$; curva AMR definiri potest per æquationem $y^2 = ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum (§. 193).

Si ponamus $x = a$

$$\begin{array}{r} y^2 = a^2 - a^2 \\ = 0 \\ \hline y = 0 \end{array}$$

Unde liquet punctum R cum puncto O coincidere, adeoque curvam AR parabolam AO secare in O .

Si fiat $x = \frac{1}{2}a$

$$\begin{array}{r} y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 \\ = \frac{1}{4}a^2 \\ \hline y = \frac{1}{2}a \end{array}$$

Patet itaque, si arcus parabolicus AO bisecetur, fore MN arcui dimidio æqualem.

Ponamus ex adverbo $y = \frac{1}{2}a$

$$\begin{array}{r} \text{erit } \frac{1}{4}a^2 = ax - x^2 \\ x^2 - ax = -\frac{1}{4}a^2 \\ \hline x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = 0 \\ x - \frac{1}{2}a = 0 \\ \hline x = \frac{1}{2}a \end{array}$$

Unde manifestum est, in nullo alio puncto, quam in medio arcus AO arcum parabolicum AM rectæ MN æqualem esse.

§. 209. Præter sectiones conicas definivimus potissimum eas curvas, quæ a Veteribus fuerunt inventæ, & quas

recentiores Geometræ addiderunt; antequam Algebra ad Geometriam sublimiorem applicaretur & doctrina curvarum amplificaretur. Veteres præter circulum, parabolam, hyperbolam & ellipsin considerarunt conchoidem, cissoidem, quadratricem, atque spirales, & recentiores addiderunt logarithmicam & cycloidem, cui deinceps accessit epicyclois. Tenendum nimirum est, Veteres non animum advertisse ad curvas, nisi quatenus problematis geometricis solvendis inserviebant. Duo autem apud ipsos celebrabantur problemata; alterum scilicet de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas datas; alterum de quadratura circuli. In usum prioris problematis solvendi NICOMEDES invenit conchoidem, DIOCLES cissoidem: posterius autem problema per spiralesolvere tentavit ARCHIMEDES, per quadratricem DINOSTRATES. Recentius quadratura circuli tentata per cycloidem, ad cujus imitationem, si genesin illius spectes, inventa epicyclois. Cum vero logarithmi essent inventi & tanta utilitate in Mathesin practicam recepti; in usum logarithmorum recepta est logarithmica, ad cujus imitationem deinceps excogitata logistica spiralis. Nostrium erat lineas curvas veteribus celebratas non prætermittere silentio, qui lectorem nostrorum Elementorum ad Matheseos universæ cognitionem manuducere intendimus præfer-

præsertim cum inventis recentioribus ansam dederint, quæ a Veteribus inventa fuerunt, quemadmodum jam hinc inde annotavimus. Logarithmica autem & cyclois usum præclarum nactæ sunt in problematis physico-mechanicis, prouti suo loco in Elementis Mechanicæ ostendimus. Earundem itaque mentionem injicere debuimus. Habet quoque usum prorsus eximium epicyclois in Mechanica practica, & aliis inventis recentioribus ansam dedit. Quamobrem nec hancce silentio præteriri fas erat. Quadratricem *Tschirnhausianam* & Lineam sinuum, tangentium atque secantium non alio fine adjecimus, quam ut constaret, quomodo curvarum geneses excogitari possint: quem in finem etiam adjecimus problemata ultima hujus capituli (§. 579 & seqq. *Anal.*). Ex duobus tamen ultimis (§. 581, 583 *Anal.*) simul discimus, quomodo curvæ superiorum generum describi possint ope curvarum generum inferiorum. Ecce igitur tibi rationem, cur hæc potissimum curvas in præsentē capite consideraverimus.

§. 210. Postquam ostendimus, quomodo Algebra utamur in erendis curvarum descriptionibus, proprietatibus, aliisque symptomatibus; ad earum usum in construendis problematis exponendum progredimur. Primum itaque docemus, quomodo problemata indeterminata construantur. Atque eo fine capite sexto

agitur de locis geometricis. Doctrinam hanc invenere veteres Geometræ; sed Recentiores ad eandem Algebram applicare cœperunt; ubi constabat intersectione duorum locorum construi æquationes altiores. Problemata indeterminata, quemadmodum vidimus superius cap. 2, sect. 2, duas habent quantitates incognitas, quarum, una pro arbitrio assumpta; determinatur altera; quemadmodum vidimus in curvis algebraicis assumpta abscissa pro arbitrio determinari semiordinatam: id quod etiam obtinere, si recta quædam positione data referatur ad rectam aliam itidem positione datam, ex iis liquet, quæ in Geometria de lineis proportionalibus inveniendis demonstrata sunt. Ita in triangulo rectangulo *ABC*, habet *PM* ad *AP* rationem constantem ipsius *BC* ad *AB*; atque adeo sumpta *AP* pro arbitrio, per rectam *AC* determinatur *PM*. Dum itaque problema indeterminatum construimus, omnes reperimus rectas possibiles, quæ eandem datam relationem ad se invicem habent. Unde si ad rectam positione datam applicentur parallelæ, & quaeritur in recta positione data punctum, quod sit origo unius indeterminatæ, atque linea secans omnes istas parallelas, ut ad ipsas respondentes portiones in linea positione data habeant eandem relationem datam; problemati satisfactum. Hinc vero patet, cur linea ista dicatur Locus;

Tab. II.
Fig. 16.

cus ; quia nempe continet omnes lineas rectas , quæ in problemate in locum indeterminatarum substitui possunt ; seu quia in ea sunt singula puncta , quibus terminantur rectæ , una indeterminatarum pro arbitrio assumpta , determinandæ. Ex. gr. in triangulo rectangulo hypotenusæ AC est locus omnium rectarum proportionalium cruribus AB & EC : etenim continuatis rectis AB & AC in infinitum , intra crura hujus anguli continentur omnes istæ proportionales , quarum una sumitur in AB , altera vero determinatur per rectam AC ; & in recta AC sunt omnia puncta M , quibus terminantur indeterminatæ ad AB normales , ut fiant assumptis AP in data ratione proportionales. Ratio est relatio simplicissima , quam exhibet recta ad rectam aliam relata. Relationes vero ceteræ constantes repræsentantur per lineas curvas ; qualis est in circulo , ut quadratum semiordinatæ sit æquale rectangulo ex segmentis diametri. Videmus adeo æquationes , quæ duas involvunt lineas incognitas , geometrice construi posse ; quatenus eadem exprimunt relationem constantem , quam habent singula lineæ curvæ puncta ad rectam positione datam , seu quatenus eadem sunt æquationes ad curvam quandam lineam , quam definiunt. Atque ideo æquationes , quas ante diximus æquationes ad curvam , hic vocantur locales.

§. 211. Monuimus in anterioribus , curvam referri posse ad quamlibet rectam positione datam , sive ea curvam secet in vertice , sive in alio quocunque puncto , sive eandem non secet , sed tota extra eam cadat intervallo vel nullo , vel dato ab eadem distans , & sive axi fuerit parallela , sive ad eundem obliqua. Hinc determinantur omnes casus possibiles æquationum localium : quæ quomodo reperiantur , ex iis patet , quæ de circulo paulo ante ostendimus. Cum SLUSIUS æquationum localium usum in construendis æquationibus cubicis & biquadraticis docuisset ; PHILIPPUS DE LA HIRE Algebram ad loca geometrica applicavit , & in omni casu æquationes locales ad rectam , circulum , & sectiones conicas investigare docuit : quod idem fecit OZANAMUS. Enimvero cum sic plures prodirent æquationes particulares ad eandem lineam ; JOANNES CRAIGIUS æquationes generales investigavit ad sectiones conicas , quæ omnes particulares eminenter continent : cujus exemplum secutus HOSPITALIUS. Nobis quoque placuit generalia invenire theoremata construendi omnes æquationes locales ad rectam & sectiones conicas ; cum per ea constructiones problematum indeterminatorum , via vere analytica , crui possint. Rem penitus examinanti constabit , non aliis hic opus esse artificiis , quam quæ paulo ante insinuavimus , cum de æquationi-

tionibus ad circulum ageremus. Theoremata generalia inveniuntur, si investigentur theorematum in casu maxime composito; in quo linea, ad quam refertur curva, ponitur esse ad axem obliqua, & origo abscissarum distare a vertice, vel centro curvæ, si quod habet, aliquo intervallo. Etenim si hic quædam lineæ constantes supponantur nullæ, in æquatione termini evanescent, qui in eas ducuntur, sicque prodit æquatio in casu simpliciori. Hoc fieri debere observavimus superius, cum in circulo origo abscissarum statuere-
 tur in L intra verticem A & centrum
 C. Vidimus enim si ponatur $AL=0$, æquationem in eo casu repertam $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$, degenerare in æquationem ad circulum $y^2 = ax - x^2$, in casu simplicissimo, quando origo abscissarum est in A. Enimvero non modo æquatio magis composita, hoc pacto, reducitur ad simpliciore; verum etiam schema, quod exhibet constructionem illius æquationis, degenerat in schema, quod hujus repræsentat constructionem. Ex. gr. si fuerit $LH=0$, linea DH incidit in DL, adeoque pars schematis, quæ relinquitur, casum istum repræsentat, in quo recta positione data DL, ad quam refertur curva AMB, est axi AS parallela. Quodsi porro fiat $KD=0$, relinquitur pars schematis, quæ repræsentat casum, in quo abscissæ computantur in axe ultra verticem continuato KS,

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

& origo earum statuitur in aliqua a vertice distantia K. Denique si etiam ponatur $AK=0$, prodit schema casum ordinarium exhibens, in quo abscissæ sumuntur in axe AS, & origo abscissarum in vertice. Methodus adeo qua utimur, non modo æquationes locales omnes ad eandem curvam una æquatione includit, eodem artificio, quo æquationes omnes ad curvas algebraicas ad æquationem unicam generalem reduximus (§. 385 *Analys.*); sit ita quod ibidem aliud præterea artificio adhibendum erat, quo hic non habemus opus; quia ibidem æquationes omnes una formula comprehendendæ, non erant ejusdem gradus, quemadmodum in præsentis obtinet; sed etiam unico schemate omnium æquationum localium constructiones comprehendit. Quænam hæc sit prærogativa præ methodo communi, qua singuli casus sigillatim expenduntur; facillimo negotio animadvertet, qui, quæ de locis geometricis tradimus, cum iis conferre voluerit, quæ de iisdem docet DE LA HIRE, vel OZANAMUS.

§. 212. Unum adhuc superest; quod de theorematibus hisce generalibus observandum, ne eorum applicatio turbet tyrones. In schemate nostro supponimus, originem abscissarum removeri ultra verticem, ita ut abscissa linea quadam data excedat abscissam ordinariam. Enimvero vidimus supra, originem earundem

M m

etiam

Tab. II.
Fig. 25.

Tab.
VII.
Fig. 75.
Algeb.

Tab. II.
Fig. 25.

etiam statui posse ex parte altera, veluti in L, ita ut abscissa LP deficiat ab abscissa ordinaria linea quadam data AL. Similiter rectam axi parallelam, vel ad eam obliquam ponimus ultra eundem, ut augeat semiordinatam ordinariam PM recta quadam data; cum tamen etiam hæ lineæ ita duci possint ex parte opposita, ut semiordinata QM vel RM deficiat ab ordinaria PM, linea quadam data PQ, vel PR. Aequatio igitur localis generalis non videtur omnes æquationes particulares continere, nec schema illi respondens comprehendere omnia schemata, quæ harum constructionem exhibent. Dubium hoc ut tollatur, nostrum est docere, qua ratione innotuerit, quomodo iidem quoque casus in eo, ad quem computavimus æquationem, contineantur. Supra reperimus æquationem ad circulum, si origo abscissarum fuerit in L, $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$. Ponamus jam originem abscissarum esse in N, ut sit $NA = b$, $NP = x$, sitque $AB = a$, $PM = y$; erit $AP = x - b$, $PB = a + b - x$.

Ob $PM^2 = AP \cdot PB$

prodibit

$$y^2 = ax - x^2 + 2bx - ab - b^2$$

Æquationem hanc a superiori non differre videmus nisi signis & hanc diversitatem hinc oriri observamus, quod ibi abscissa ordinaria AP sit $x - b$, hic vero $b - x$. Quodsi ergo æquationes istæ redigantur ad nihilum, quemadmodum in hac

doctrina fieri solet; habebimus in eo casu, ubi abscissarum origo in N,

$$y^2 + x^2 - ax + ab = 0 \\ - 2bx + b^2$$

in casu autem opposito, ubi origo abscissarum in L,

$$y^2 + x^2 - ax - ab = 0 \\ + 2bx + b^2$$

Quare si duas haberes formulas, valor ipsius b in casu particulari dato semper eliceretur positivus, cum in priori coëfficiens negativus comparandus esset cum negativo $-2b$, in posteriori coëfficiens positivus cum $+2b$. Quodsi vero æquationem, quæ cum formula posteriori conferri debebat, cum priori componis, adeoque quantitatem positivam cum negativa, necesse est ut valor ipsius b prodeat negativus. Si $-b$ substituas in locum $+b$ in æquatione altera; pro $+2bx$ habebis $-2bx$, pro $-ab$ vero $+ab$; ducendo scilicet $-a$ in $-b$: at b^2 retinet signum suum, quia $-b$ in $-b$ efficit $+b^2$. Atque sic æquatio posterior degenerat in priorem; ut adeo prior in utroque casu adhiberi possit; modo notes, quoties in casu particulari lege comparisonis valor ipsius b elicitur negativus, toties sumendam esse rectam eidem respondentem ex parte opposita, ut sit $AL = b$. Idem cum eodem modo obtineat quoad distantiam parallelæ axi ab eodem PQ; manifestum est, cur una formula satisfaciat in casu utroque, modo observetur, quod de valore negativo in

in æquationis particularis cum generali comparatione prodeunte annotavimus. Idem adhuc clarius patet in parabola. Etenim si fuerit $SA = b$, $SP = x$, adeoque $AP = x - b$; erit ex natura Parabolæ, si parameter fuerit a ,

$$y^2 = ax - ab$$

seu $y^2 - ax + ab = 0$

Quodsi fuerint omnia ut ante, sed $AL = b$, adeoque $AP = b + x$, erit

$$y^2 = ax + ab$$

seu $y^2 - ax - ab = 0$

Hic denuo patet, æquationem posteriorem non differre a priori, nisi diversitate signorum in iis terminis, quorum coëfficiens est b ; in priori enim habemus $+ab$, in posteriori $-ab$. Quamobrem ubi in applicatione formulæ generalis, quæ ad casum priorem spectat, confers terminum negativum æquationis ad casum posteriorem spectantis cum positivo, qui ex formula casus prioris sumitur; valor utique prodire debet negativus pro AL . Patet etiam hic, si in æquatione posteriori pro $+b$ substituas $-b$, ducendo $-b$ in $-a$, prodire $+ab$, adeoque æquationem posteriorem degenerare in priorem; quemadmodum ex adverso prior abit in posteriorem, si in priori substituas $-b$ pro $+b$. Quodsi enim ducas $+a$ in $-b$, prodibit $-ab$, quemadmodum habet formula posterior. Videmus adeo, quomodo innotuerit, eandem formulam subire posse

vicem duarum, si valoris negativi quantitas sumatur ex parte opposita. Immo videmus, perinde esse, sive in formula generali abscissam & semiordinatam statuas ordinariis AP & PM majorem, sive minorem; ut adeo nulla ratio intrinseca fuerit electionis, sed tantummodo extrinseca: quod ideo monemus, ne quis in Philosophia hinc petat argumentum contra principium rationis sufficientis in electionis casu. Utimur eodem artificio, non sine maxima utilitate, in Analyfi infinitorum seu calculo differentiali & integrali, quemadmodum suo loco videbimus; ubi ex eadem ratione valorem negativum sumimus pro magnitudine ex parte opposita sita. Absit itaque ut tibi persuadeas, hoc fieri ex natura quantitatum privativarum; & hinc colligas, quantitates privativas esse veras quantitates, seu in numero positivarum; cum satis constet eas non denotare nisi defectum quantitatis veræ, seu positivæ, per positivam, quæ deficit, æstimabilem; quemadmodum pecunia, quæ debetur, non est parata pecunia, quam habes, etsi per paratam pecuniam æstimetur, quæ solvenda, ut debitum tollatur. Nullæ revera sunt quantitates negativæ, etsi utiliter in usum calculi universalis fingantur. Cavendum omnino est, ne entia ficta Mathematicorum confundantur cum realibus in detrimentum scientiæ philosophicæ.

§. 213. Hinc simul patet ratio,

Tab. II.
Fig. 25.

cur in casu particulari demonstraturi constructionem ex formula generali elicita; eruendo ex hac æquationem ad construendum propositam; non utamur valoribus negativis, qui per comparisonem cum formula generali prodeunt, sed iis substituamus positivos: id quod fieri non licebat, si per naturam quantitatum valor esset negativus. Valor negativus v. gr. rectæ AL nonnisi fictitius est; quatenus æquatio, unde elicitur, repræsentare fingitur casum, quem non repræsentat; cum revera non exhibeat nisi cum, in quo origo abscissarum est in N; propterea quod, hac fictione, eadem formula sufficere deprehenditur in utroque casu, quam absque ea nonnisi in uno adhibere liceret, nimirum quando origo abscissarum est in N. Extra hanc fictionem utique contradictorium est, quantitatem positivam esse æqualem privativæ; quemadmodum etiam in ipsa Analyfi contradictionem inde colligimus, atque ex ea porro, notioni impossibilis convenienter, (§. 97 *Ontol.*) impossibilitatem inferimus. Habemus exemplum in æquatione ad circulum $y^2 + x^2 - ax + 2bx - ab + b^2 = 0$.

Quodsi enim ponas

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 + a^2 - a^2 + 2ab - ab + b^2 = 0$$

$$y^2 = -ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(-ab - b^2)}$$

Ex eo itaque, quod valor ipsius y ,

prodit negativus, qui producit pro y radicem imaginariam; infertur, impossibile esse, ut abscissa fiat diametro æqualis; recte omnino, cum idem per se pateat, ubi supponis notum esse, quod æquatio sit ad circulum, & origo abscissarum in L, cum abscissa major esse nequeat recta $LB = a - b$. Nimirum hic colligitur, hypothesein $x = a$ esse absurdam; quia hinc sequitur, quantitatem positivam esse æqualem privativæ, aut radici imaginariæ; quod absurdum esse supponitur.

§. 214. Ut usus formularum generalium in construendis æquationibus problematum indeterminatorum clarius elucesceret, aliquot exemplis eundem illustrare lubuit (§. 593 & *seqq. Anal.*). Patet per ea, ope istarum formularum, nos via vere analytica deduci ad problematum indeterminatorum constructionem, ac constructiones semper obtineri concinnas, quales in Geometria desiderantur; ut adeo non solius brevitatis gratia easdem prætulerimus methodo communi, qua usi sunt DE LA HIRE & OZANAMUS. Dedimus quoque exempla, (§. 597, 600 *Anal.*), quibus ostenderemus, quomodo, ex constructione locorum, deriventur æquationes locales; ut appareat ad quamnam curvam sit locus constructus. Quoniam vero id intendimus, ut, dum artificia Analyseos inculcamus, simul doceamus veritates mathematicas cognitu utiles; ideo selegimus constructiones curva-

curvarum, quas pro fornicibus commendant Architecti, ut constaret, eas esse ellipses *Apollonianas*. Æquationem primam (§. 597 *Anal.*) $y^2 + \frac{d^2 x^2}{a^2} = 0$

$-\frac{d^2 x}{a} = 0$ esse ad ellipsin, constare poterat ex collatione cum formula generali pro ellipsi (§. 588 *Analys.*). Quodsi consueto more hanc æquationem cum formula ista compares, deprehendes a esse axem majorem, d vero minorem ellipsicos. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{2r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \quad 2n = 0$$

$$q = f$$

$$-\frac{2tp}{2m} = -\frac{d^2}{a}$$

$$m^2 = p^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{2d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

$$m = \frac{1}{2}a$$

$$\frac{2p}{a} = 1$$

$$p = \frac{1}{2}a$$

Habemus adeo

$$a^2 : d^2 = a : t$$

$$t = \frac{ad^2}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

Quoniam parameter t est tertia

proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Analys.*); cum a sit axis major, erit d minor, & ob $p = \frac{1}{2}a$ abscissæ computantur a vertice.

Similiter æquationem alteram $y^2 + \frac{ddx^2}{a^2} - \frac{2ddx}{a} = 0$ esse ad ellipsin, ejus cum formula generali collatio prodit; & illius cum hac comparatione facta patet, quod a sit axis dimidius major, d vero dimidius minor. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \quad \frac{2tp}{2m} = \frac{2dd}{a}$$

$$\text{h. e. } \frac{d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

$$m^2 = \frac{p^2}{a^2} = \frac{a^2}{4}$$

$$m = \frac{a}{2}$$

$$a^2 : d^2 = 2a : t$$

$$t = \frac{2ad^2}{a^2}$$

$$= \frac{2d^2}{a}$$

Quoniam a est dimidius axis major, & parameter t tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423 *Anal.*), seu quarta ad dimidium axem majorem, minorem dimidium, & minorem integram (§. 124 *Analys.*); ideo patet, d esse axem minorem dimidium, & ob

$p = a$ originem abscissarum esse in vertice ellipseos.

§. 215. Utraque æquatio localis, etsi ex diversis constructionibus eruatur, eadem est; nisi quod in posteriori a & d denotent semiaxes, in priori autem integros axes conjugatos. Forsan non inconsultum erit hic docere, quomodo constructio utraque eruatur ex æquatione ordinaria ad ellipsin. Æquatio hæc est $y = bx - \frac{bx^2}{a}$, in qua b parametrum, a vero axem majorem denotat. Quoniam parameter est tertia proportionalis ad axem majorem a & minorem d (§. 423 *Anal.*); erit $b = d^2 : a$. Quodsi ergo in æquatione ordinaria hunc valorem in locum ipsius b surroges; habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} - \frac{d^2 x^2}{a^2} \\ = \frac{d^2 ax - d^2 x^2}{a^2}$$

Quare

$$a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2 \\ a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Patet adeo semiordinatam in ellipsi esse quartam proportionalem ad axem majorem, minorem & semiordinatam circuli super axe majore descripti eadem cum semiordinata ellipseos abscissæ respondentem. Quamobrem cum pro a & d sumi etiam possit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124 *Anal.*); igitur patet, si super axe majore describatur semicirculus & in P erigatur perpendicularis PN, ductaque ex centro C radio CN

in eum transferatur CR semiaxi minori æqualis, ac tandem ex R demittatur perpendicularis RM; fore punctum M in ellipsi: quæ est ipsa constructio SERLII ex æquatione ordinaria elicita. Cum enim sit MR parallela ipsi PC; erit (§. 268 *Geom.*)

$$NC : RC = NP : PM$$

$$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Poteramus itaque constructionem *Serlianam* ellipseos jam ex æquatione ordinaria elicere in superioribus, cum doctrinam de ellipsi traderemus. Etsi autem æquatio ex altera constructione elicita eadem sit cum anteriore; ex ea tamen non minus deduci poterat constructio altera. Etenim sit ellipsis ADB, cujus axis major AB, semiaxis minor EF. Describatur, radio CD, semicirculus EDF, & erecta perpendiculari PM ducatur axi AB parallela MN, ex N vero demittatur perpendicularis NQ, quæ erit ipsi PM æqualis. Si sit AC = a , DC = d , AP = x , erit æquatio ad ellipsin $y^2 = \frac{2ad dx - d^2 x^2}{a^2}$, adeoque;

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$$

Sit jam EQ = z , erit QF = $2d - z$, adeoque QN² = PM² = $y^2 = 2dz - z^2$. Habemus itaque

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : 2dz - z^2$$

adeoque (§. 124 *Anal.*)

$$a^2 - 2ax + x^2 : a^2 = d^2 - 2dz + z^2 : d^2$$

$$a - x : a = d - z : d$$

$$x : a = z : d$$

$$x : z = a : d$$

hoc

Tab. II. Fig. 26. cum pro a & d sumi etiam possit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124 *Anal.*); igitur patet, si super axe majore describatur semicirculus & in P erigatur perpendicularis PN, ductaque ex centro C radio CN

hoc est, $AP : EQ = AC : EC$

Quare si ad semiaxem majorem, & minorem ellipsos, atque abscissam AP pro arbitrio assumtam, quærat^r quarta proportionalis; erit ea abscissa EQ, cui respondet semiordinata QN in circulo semiordinatæ ellipsos PM æqualis.

Quodsi displicet resolutio per analysin rationum; analogiam, qua nititur constructio, per Algebram quoque reperire licet. Etenim

$$\frac{2ad^2x - d^2x^2}{a^4} = 2dz - z^2$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x}{a^2} = z^2 - 2dz$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2}{a^2} = z^2 - 2dz + d^2$$

$$\frac{ad - dx}{a} = d - z$$

$$\frac{dx}{a} = z$$

Habemus itaque, ut ante:

$$a : d = x : z$$

Notanda hic sunt artificia, quibus constructiones ex æquatione ordinaria eliciuntur. Nimirum in æquatione ordinaria substitui^mus valorem parametri, quam ex eadem elici^mus, ut eandem ingrediantur nonnisi lineæ in ipsa contentæ. Ita enim prodibat æquatio, cujus in analogiam resolutione constructio prior erat

manifesta. Ex eadem æquatione in analogiam resoluta prodit quoque altera; substituendo valorem quadrati semiordinatæ ellipsos ex circulo circa axem minorem descripto. Equidem prævidere non licet, quid per substitutionem sit proditurum; non tamen ideo ea negligenda est. Ubi enim veritatem quærimus; tentanda sunt omnia, donec incidamus in theoremata & constructiones problematum. Principii substitutionis magna vis est in Analy^si: efficit enim æquationem dependentem a pluribus veritatibus, ut jam ex ea per reductionem eadem erui possint, quæ ex iisdem more Veterum ratiocinando colliguntur.

§. 216. Enimvero ut intelligant^{Tab.III.} tyrones, idem artificium etiam in aliis^{Fig. 28.} curvis adhiberi posse, lubet hoc ipsum applicare ad hyperbolam. Pro hyperbola æquatio ordinaria est $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$. Est etiam hic, si axis

conjugatus $= d$, parameter $b = \frac{d^2}{a}$.

Quodsi ergo hunc valorem in æquatione ordinaria substituas, habebis

$$y^2 = \frac{d^2x}{a} + \frac{d^2x^2}{a^2} = \frac{d^2ax + d^2x^2}{a^2}$$

Quare $a^2 : d^2 = ax + x^2 : y^2$

$$a : d = \sqrt{ax + x^2} : y$$

$$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = \sqrt{ax + x^2} : y$$

Quodsi

Quodsi ergo ex centro hyperbolæ C erigas $CD = \frac{1}{2}d$, & super BP, abscissa AP pro lubitu assumpta, describas semicirculum secantem perpendicularem in A erectam in N, & $PN = \sqrt{(ax + x^2)}$ transferas ex B in L, tandemque in L erigas perpendicularem LI, occurrentem rectæ per B & D ductæ in I; erit LI semiordinata y abscissæ AP respondens. Quamobrem, si fiat recta PM ad BP perpendicularis = LI; erit punctum M in hyperbola. Cum in praxi non opus sit semicirculum describi, sed ex medio BP, tantummodo interfecanda recta AN in N, & intervallum PN ex B in L transferendum; quodvis in hyperbola punctum M hoc modo facillime determinatur, ut constructio pro non ineleganti haberi possit. Notent igitur hic tyrones, quod ad artificia, quibus in solutionibus problematum utuntur Autores, animum attendere debeant, eadem statim adhibitori ad alia, quantum ipsis datur. Nec inconsultum erit, ut Autores, qui de sectionibus conicis commentati sunt, evolvant, & ubi theorematum & problematum elegantia occurrunt, ea analytice investiganda sibi proponant. Ad hoc studium ut eos incitarem, iisdemque viam, qua eundem, commonstrarem, ea in medium proferre libuit, quæ de ellipsi & hyperbola dicta sunt. Unicum adhuc addendum. In hyperbola æquilatera $a=d$, adeoque $y = \sqrt{(ax + x^2)}$, consequen-

ter $PM=PN$. Quamobrem punctum M in eadem nullo fere negotio determinatur, scilicet si ex medio BP, intervallo $\frac{1}{2} BP$, interfecetur AN in N, & intervallo PN interfecetur PM in M; ut adeo non opus sit, nisi in A erigi perpendicularem infinitam.

§. 217. Nos non progredimur ultra loca solida, in quibus acquieverunt Veteres: neque enim hæc doctrina ultra hosce limites multum promota. NEWTONUS enumeravit lineas tertii ordinis, seu curvas secundi generis, quarum æquationes ad tres dimensiones ascendunt. Eam esse completam demonstravit STIRLINGIUS, simulque ostendit, quomodo, æquatione curvæ tertii ordinis data, invenitur locus, hoc est, species curvarum dignoscatur, ad quam eadem est. Enimvero hæc non sunt ad captum tyronum, in quorum usum conscripsimus Elementa nostra; neque adhuc ea ratione pertractata, ut eadem facilitate intelligantur, qua a nobis proposita capiuntur. Neque etiam opus est, ut hac doctrina sis instructus, ubi ea, quæ in sequentibus tradimus, intelligere volueris; immo eadem ignorata non impeditur progressus in Analyti recentiorum, qua Geometria ad naturam applicatur. Hoc non eo fine monemus, ut præclaris inventis laudem suam detrahamus; sed ne tyrones remorentur progressum ad ulteriora; affectantes scientiam eorum, quorum ignorantia eadem

dem minime obstat. Monitum igitur nostrum exigit præsens institutum. Ultra enumerationem linearum tertii ordinis, seu curvarum secundi generis, nemo adhuc progressus. Atque adeo doctrina de speciebus curvarum algebraicarum tanto adhuc intervallo distat a perfectione sua, quanto ab eadem distare Algebram monuimus. Abunde tyronibus ad altiora adspirantibus sufficiunt ea, quæ de locis geometricis tradidimus. Et ubi ad artificia, quibus in doctrina hac explananda utimur, animum attulerint attentum, ut eadem animo distincte comprehendant; iisdem plurimum juvabuntur in altioribus, quæ deinceps sequuntur. Hoc auxilio methodus comparationis æquationum particularium, in quibus coëfficientes indeterminatarum sunt determinati, cum assumptiis, in quibus coëfficientes isti indeterminati sunt, familiaris redditur. Ejus autem in Analyfi multus est usus.

§. 218. Doctrinam de locis geometricis non solum proposuimus in usum constructionis problematum indeterminatorum, cujus ideo dedimus aliquot exempla; sed & in usum constructionis æquationum altiorum, præsertim cubicarum & biquadraticarum. Quamobrem capite septimo docemus primum in genere, quomodo æquationes superiores construantur, & mox in specie, quomodo construantur æquationes cubicæ & biquadraticæ. Methodus autem, qua

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

hic utimur, tota huc redit, ut construantur duo loca, quorum intersectione determinatur radix æquationis, seu linea recta, quæ eidem respondet. Invenit eandem SLUSIUS. Etsi enim non desint, qui eam jam CARTESIO perspectam fuisse contendunt; certo tamen, quod affirmant, probare minime possunt; cum alia quoque via in regulam suam incidere potuerit, quam in Geometria pro construendis æquationibus cubicis & biquadraticis, per parabolam & circulum, præscribit. Quemadmodum vero inventa Veterum profuerunt Recentioribus ad inveniendâ suâ, quibus ad ulteriora progressuris usui sunt inventa anteriora; ita dubium non est, quin Veterum quoque inventa faciem protulerint SLUSIO ad methodum suam construendi æquationes cubicæ & biquadraticas inveniendam. Etenim cum Veteres multum defudarent in duabus lineis EF, GH, mediis continue proportionalibus inter duas datas AB, CD, inveniendis; MENECHMUS via vere analytica pervenit ad solutionem problematis tantopere celebrati, ope intersectionis duarum parabolarum. Atque in hac ipsa constructione continetur idea ejus methodi, quam SLUSIUS primus reperit: id quod ut appareat, analysis MENECHMI paulo disertius explicanda. Quoniam GH tercia proportionalis ad AB & EF, itidemque CD tercia proportionalis ad EF & GH; habemus

Na

AB:

Tab.III.
Fig. 12.

$$AB:EF=EF:GH \quad EF:GH=GH:CD$$

$$EF^2 = AB \cdot GH \quad GH^2 = CD \cdot EF$$

Patet itaque, quadratum primæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex data prima AB in quæsitam alteram, seu mediarum continuæ proportionalium secundam; quadratum vero secundæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex datarum altera in primam quæsitam seu continue proportionalium. Quoniam in parabola quadratum semiordinate est æquale rectangulo ex parametro in abscissam; igitur patet si, parametro data una AB, describatur parabola; secundam quæsitam GH fore in numero abscissarum, & eidem respondentem semiordinatam fore primam quæsitam EF: contra si, parametro data altera CD, describatur parabola; secundam quæsitam GH fore in numero semiordinatarum ejusdem, & eidem respondentem abscissam fore primam quæsitam. Quamobrem patet eandem rectam esse abscissam in parabola una & semiordinatam in altera, & quæ in una semiordinata est, eandem esse abscissam in altera. Obtinet hoc si duæ parabolæ, AMR & AMO, circa axes AD & AE, ad angulos rectos junctos, describantur; in puncto enim intersectionis semiordinata PM parabolæ AMR æqualis est abscissæ AQ parabolæ alterius AMO, & vicissim semiordinata QM parabolæ

AMO æqualis est abscissæ AP parabolæ AMR. Patet itaque si rectæ datæ sumantur pro parametræ parabolarum AMR & AMO; rectas AP & PM fore duas medias continue proportionales inter duas istas rectas datas. Hic est modus inveniendi duas lineas medias continue proportionales inter duas datas. Quod si $AB = a$, $CD = b$, $EF = x$, $GH = y$; erit

$$x^2 = ay$$

$$y^2 = bx$$

$$\frac{y^4}{b^2} = ay$$

$$\frac{y^2}{b} = x$$

$$y^4 = ab^2y$$

$$y^3 = ab^2$$

Unde liquet, æquationem cubicam $y^3 - ab^2 = 0$ construi per duos loca $x^2 - ay = 0$, & $y^2 - bx = 0$; quorum intersectione determinatur semiordinata PM, quæ radici æquationis $y^3 - ab^2 = 0$ respondet. Constructio adeo MENECHMI insinuat ideam methodi SLUSIANÆ.

§. 219. Inventum MENECHMI ansum quoque dare poterat inveniendæ regulæ *Cartesiane*, quæ æquationes cubicæ & biquadraticæ construuntur. Nimirum cum ex illo constet, æquationem cubicam construi per duas parabolas, quarum mutua intersectione determinatur radix; in Arte inveniendi autem tentaminibus multa relinquantur; facile animus subit cogitatio tentandi, num circulus

Tab.III.
Fig. 29.

Tab.III.
Fig. 30.

Tab. III.
Fig. 31.

culus quoque per verticem parabolæ ductus in puncto interfectionis extra verticem determinet radicem æquationis cubicæ. Sit itaque centrum circuli, per verticem parabolæ A descripti, in C; si ex eo in axem parabolæ demittatur perpendicularis CD, evidens est per rectas AD & DC determinari & centrum C, & radium AC. Sit itaque $PM = y$, parameter $= a$, $AD = b$, $DC = c$. Demittatur ex C perpendicularis CR ad semiordinatam PM; erit $RM = y - c$, & ex natura Parabolæ $AP = \frac{y^2}{a}$ (§.

391 *Analys.*), adeoque $DP = CR = \frac{y^2}{a} - b$. Quoniam $AC^2 = AD^2 + DC^2$ & $CM^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $AC^2 = b^2 + c^2$ & $CM^2 = \frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} + b^2 + y^2 - 2cy + c^2$, consequenter ob $CM^2 - AC^2 = 0$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} - 2cy = 0$$

$$+ y^2$$

$$y^3 - 2aby - 2a^2c = 0$$

$$+ a^2y$$

Patet itaque, interfectione circuli per verticem parabolæ transeuntis & parabolæ, construi posse æquationem cubicam, in qua secundus terminus deficit.

Ut jam determinetur valor ipsius b , seu rectæ AD, & valor ipsius c ,

seu rectæ DC; sit æquatio alteri æquivalens

$$y^3 - py - q = 0$$

$$\text{erit } -2ab + a^2 = -p$$

$$b - \frac{1}{2}a = \frac{p}{2a}$$

$$AD = b = \frac{p}{2a} + \frac{1}{2}a$$

$$\text{Similiter } -2a^2c = -q$$

$$DC = c = \frac{q}{2a^2}$$

Quodsi cum CARTESIO sumas parametrum pro unitate, & fiat in axe AH = semiparametro, erit

$$HD = \frac{1}{2}p$$

$$DC = \frac{1}{2}q$$

hoc est, recta HD est æqualis coefficienti dimidio termini tertii, & DC coefficienti dimidio quarti, secundo deficiente; quemadmodum habet regula CARTESII.

Non aliis hic utimur artificiis, quam quibus usi sumus in determinanda tangente sectionum conicarum juxta methodum CARTESII (§. 410, 440, 491 *Analys.*). CARTESIO itaque constructio MENECHMI, qua utitur in inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas, ansam dare potuit inveniendi regulam construendi æquationes cubicæ, in quibus secundus terminus deficit; & artificia ipsi familiaria, quibus hic utitur, animum avertere potuerunt ab idea con-

structionis per combinationem duorum locorum in constructione MENECHMI contenta, ad quam eundem advertit SLUSIUS; ut adeo certo asseverari non possit, methodum *Slusianam* cognitam jam fuisse CARTESIO, & eadem hunc pervenisse ad regulam suam. Quicquid sit, utile tamen est tyronibus perpendisse, quomodo inventum MENECHMI analytice expensum, & ideam constructionis æquationum superiorum per combinationem duorum locorum, & ansam inveniendi regulam construendi æquationes cubicas, in quibus secundus terminus deficit, ad biquadraticarum constructionem deinceps extensam, præbere potuerit; siquidem ad tertium cognitionis gradum aspirant. Quoniam ex qualibet æquatione secundus terminus auferri potest (§. 343 *Analys.*) & hoc pacto æquationes cubicæ omnes reducuntur ad tres casus (§. 345 *Analys.*); regula CARTESII, quæ secundum terminum deficere supponit, omnibus omnino æquationibus cubicis construendis sufficit; etsi haud difficile sit eandem quoque extendere ad eas æquationes, quæ secundum terminum habent, quemadmodum operose ostendit BAKERUS; nos brevius docuimus (§. 622 *Anal.*). Cur vero methodum *Slusianam* præferamus regulæ *Cartesiane* a BAKERO extensæ, rationem reddimus in scholio probl. 245. (§. 608 *Analys.*).

§. 220. Notandum vero est, quod

constructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum vere analyticas tradiderimus; ut adeo in iis industriam suam utiliter exercent, qui ad tertium cognitionis gradum aspirant. Tanta autem perspicuitate doctrinam hanc exposuimus, ut, qui in anterioribus industriam suam desiderari non fuerunt passi, nihil prorsus difficultatis sentiant. Inprimis autem hinc discere licet, quomodo tollatur omnis difficultas, quæ ex nimis longa rerum meditandarum serie nascitur. Quamobrem huc animum advertant, quotquot meditationibus longis adsuescere voluerint. Quod qui faciunt, hunc utique percipient fructum, ne longitudine meditationum defatigentur. Id tantummodo adhuc monemus tyrones, ut, ubi locus construendus, formula generalis, cum qua particularis data conferenda, ex superioribus exscribatur, & eidem æquatio localis construenda subscribatur, ut termini comparandi sibi invicem respondeant. Ex. gr. in problemate 245 (§. 607 *Anal.*) locus ad circulum est $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Formulæ igitur generali ea ita subscribitur, quemadmodum hic factum esse vides:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$

$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} - m^2$$

$$y^2 * + x^2 - cy + bx * = 0$$

$$- ax$$

Loca vacua replentur stellula, ut appa-

appareat, quinam termini sint nihilo æquales in casu particulari dato. Hoc nimirum pacto statim videmus, quinam coëfficientes sint invicem comparandi, & quinam poni debeant nihilo æquales; ne ex confusione oriatur error. Quamvis vero, prolixitatis evitandæ gratia, non omnia combinavimus loca, quorum æquationes ex æquatione cubica vel bi-quadratica eliciimus; qui tamen ingenium & industriam suam exercere voluerint, hoc non inutiliter facient. Ubi vero, comparatione æquationum particularium, cum formula generali facta, valores omnes linearum ad constructionem loci requisitarum fuerunt determinati; oculi convertendi sunt in schema formulæ generali respondens & delendæ lineæ, quarum valores reperti sunt nihilo æquales: ita enim relinquitur schema æquationi particulari respondens. Quamobrem si lineis remanentibus adscribas valores modo repertos; statim videbis, quomodo locus sit construendus. Et ubi schemata duobus locis respondentia inter se conferas; illico patebit, quomodo unum alteri sit imponendum, ut lineæ, quæ utrobique eadem sunt, sibi mutuo congruant; consequenter quomodo æquatio data sit construenda. Hac via si incedere volueris, non modo aberit molestia, quæ ex nimis diu continuanda meditatione suboritur; verum etiam constructione ad finem perducta voluptate perfundetur ani-

mus, quæ studium Matheseos continuo magis magisque tibi commendabit, & ardorem in eodem progrediendi accendet. Inprimis etiam sensum evidentie acquires; statim posthac animadversurus, ubi distincte perceptis quædam permiscentur, quæ adhuc confuse percipiuntur: id quod inprimis usui est extra Mathesin, ubi confuse perceptorum cum distincte perceptis commixtio magis nocet, quam in Mathesi; præsertim iis in casibus, in quibus intellectus ab imaginatione avocandus totus, ut veritatem liquidam perspicias. Hoc etiam obtinebis, ne nimia festinatione te præcipites; & ut inter multos strepitus attentionem conserves; eamque interrompere possis, quotiescunque volueris, certo semper tramite progressurus, quando visum fuerit; quemadmodum viator recta via incedens ab eadem minime aberrat, nec iter jam emensum repetere tenetur, ubi gradum sistit, quotiescunque libuerit. Neque verendum est, ut diuturna meditatione defatigetur animus & sanitati corporis insidiæ struantur. Non opus est, ut in hisce assereendis multum studii collocemus, quamvis ad singula demonstranda a priori principia suppeditet Psychologia nostra. Qui enim dictis obediens fuerit, in seipso experietur, veritati consentanea esse, quæ dicimus non loquentes nisi experta.

§. 221. Quoniam idem problema multis modis construi potest, cum

v. gr. eidem æquationi cubicæ satisfaciatur non modo cujusvis loci solidi cum loco ad circulum, verum etiam cujusvis loci solidi cum quovis loco solido combinatio; quæri omnino poterat, quam curvæ sint ceteris præferendæ. CARTESIUS æquationes cubicas & biquadraticas non construit nisi per parabolam & circulum; etsi non ignoraverit, easdem quoque construi posse per ceteras sectiones conicas, atque circulum. Videtur utique hoc fecisse, quod æquatio parabolæ & circuli sit simplicior æquationibus ceterarum sectionum conicarum. Cum enim vitium *ἀνισομετρίας* ipsi sit, si æquatio construatur per lineas superioris cujusdam generis, quæ construi potest per lineas generis inferioris, veluti si æquatio cubica vel biquadratica construatur per curvas secundi generis, cum construi possint per curvas primi generis; ex ejusdem omnino generis curvis eas præferre debuit, quæ per æquationes simplices definiuntur. Recte autem monuit NEWTONUS, in constructione problematum geometricorum non respiciendum esse ad æquationes curvarum, sed potius ad earum descriptionem; ita ut hæ præferantur aliis, quæ sunt facilioris descriptionis. Unde ad construenda problemata solida adhibet conchoidem, etsi ea sit tertii generis. Immo non improbat, si quis ad datum angulum in data ratione secundum utatur cycloide, quæ motu ro-

tæ, vel circuli, super recta facillime describitur; etsi ea per nullam æquationem algebraicam definiri possit. Etsi autem æquationes cubicæ ac biquadraticæ omnes per circulum & parabolam construi possint; non tamen ideo consultum est, ut non aliis etiam sectionibus conicis in istis æquationibus construendis utamur. Etenim ubi problemata algebraice solvimus, haud raro incidimus in æquationes locales alterius sectionis conicæ, quam parabolæ; ut adeo sua veluti sponte sese offerat ad constructionem, cum parabola demum anxie quærenda esset; & per aliam sectionem conicam quam parabolam, haud raro multo concinnius construi potest. Quædam adeo lineæ quibusdam problematis videntur quasi propriæ, ita ut destinentur eorundem constructioni; quia pariunt elegantem, & simpliciolem, si linearum rationem habeas, ex quibus datis quæsitæ determinanda; cum constructiones ceteræ evadant intricatiores, & schemata pariant confusa, si omnes constructiones subsidiariæ eidem simul inferendæ, nec curva supponatur tanquam data, nec lineæ ex coefficientibus terminorum repertiundæ tanquam jam repertæ.

§. 222. Apud Veteres celebrabantur problemata, de inveniendis lineis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, & de trisectione anguli. Cum enim per Geometriam elementarem facillime invenia-

veniat media proportionalis inter duas datas, & angulus non minus facile biseccetur, per solas rectas & circulum, seu per Geometriam elementarem; Veteres primum horum problematum solutiones intersectione rectarum & circuli quoque tentarunt, sed frustra. Unde ad constructiones per alias lineas curvas confugiendum tandem erat. Quamobrem nostrum quoque erat, ut, constructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum illustraturi, horum inprimis problematum rationem haberemus. Distinxerunt vero ideo Veteres problemata in plana, solida, & linearia. Plana appellarunt, quæ per rectas & circulum construi possunt, quia hæ lineæ supponuntur in plano descriptæ; solida, ad quorum constructiones adhibendæ sunt sectiones conicæ, quæ, cum per conî dati sectionem prodeant, tanquam in solido datæ supponuntur. Cumque præter rectam, circulum, & sectiones conicas, lineas alias in Geometriam recipere nollent; problemata plana & solida sola geometrica appellarunt, quemadmodum etiam lineas istas solas geometricas dixerunt. Per alias vero lineas construenda problemata, mechanica vocarunt; ipsasque, quarum opẽ construuntur, lineas mechanicas nuncuparunt. Ast CARTESIUS, connubium Arithmeticæ cum Geometria introducens, cum videret sectiones conicas per æquationes definiri posse algebraicas, & præter

cas dari curvas innumeras alias, quæ per istiusmodi æquationes definiuntur; hæc omnes illis æquiparavit & in Geometriam recipiendas esse intulit; in numerum mechanicarum reiecit, quæ æquationes istiusmodi respuunt. Invento autem calculo differentiali; cum curvæ, CARTESIO mechanicæ dictæ, non minus per æquationes differentiales definiantur, quam ceteræ per ordinarias, & ad constructiones problematum utilissimorum adhibeantur, quemadmodum in Mechanicis videbimus; his quoque aditus, in Geometriam factus. Unde multo amplior evasit speculationum geometricarum campus, qui a Veteribus intra nimis arctos limites coerceretur. Sane inventa longe præclarissima ex Mathesi exularent, si recentiores Geometræ vestigiis, vel Veterum, vel CARTESII, insistere voluissent.

§. 223. Non omnia problemata per rectam & circulum construi posse, inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium inter duas datas, & trisectionis anguli docuit; & ex æquationibus algebraicis, ad quas ducunt solutiones problematum, patet ratio. Quemadmodum enim æquationum quadraticarum constructio pendet ab invenienda una linea media proportionali inter duas alias quomodocunque datas; ita constructio cubicarum supponit duas medias continue proportionales.

tionales, constructio biquadraticarum tres inveniendas & ita porro. In æquationibus puris hoc ipsum obvium est; in affectis non minus ostendi potest. Sufficiat nobis in gratiam tyronum id ostendisse in æquationibus puris. Æquatio quadratica pura est $x^2 = ab$. Patet hic esse

$$a : x = x : b$$

adeoque constructurus æquationem invenire debet mediam proportionalem inter a & b .

Æquatio cubica pura est

$$x^3 = a^2 b$$

adeoque $x^4 = a^2 b x$

$$a^2 : x^2 = x^2 : b x$$

$$\text{Sit } b x = y^2$$

$$\text{erit } x : y = y : b$$

$$\& a^2 : x^2 = x^2 : y^2$$

$$a : x = x : y = y : b$$

Igitur a, x, y, b sunt continue proportionales. Æquationem ergo cubicam puram constructurus, invenire debet duas medias continue proportionales inter datas a & b , quarum prima x est radix æquationis cubicæ puræ

Similiter æquatio biquadratica pura est

$$x^4 = a^3 b$$

$$\text{Quare } a^3 : x^3 = x : b$$

$$= x^3 : b x^2$$

$$\text{Sit } b x^2 = y^3$$

$$\text{erit } a^3 : x^3 = x^3 : y^3$$

$$a : x = x : y$$

$$\& x^2 : y^2 = y : b$$

$$= y^2 : b y$$

$$\text{Sit } b y = z^2$$

$$\text{erit } x^2 : y^2 = y^2 : z^2$$

$$x : y = y : z$$

$$\& y : z = x : b$$

Habemus adeo

$$a : x = x : y = y : z = z : b$$

consequenter a, x, y, z, b sunt continue proportionales; & æquationem biquadraticam puram constructurus, invenire debet tres medias continue proportionales inter duas datas a & b , quarum prima x est radix æquationis. Intersectio rectæ & circuli nonnisi unam exhibet lineam mediam continue proportionalem inter duas. Quamobrem si plures inveniendæ supponuntur, sola rectæ ac circuli intersectione obtineri minime possunt. Hinc duarum inventio deduxit MENECHMUM ad intersectionem duarum parabolarum, quemadmodum vidimus supra (§. 218).

§. 224. Forſan autem non inutile erit, si hic exemplo aliquo ostendamus, quomodo inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium ad æquationes cubicas affectas deducat; ne quæ de extremis quomodocunque datis diximus obscura videantur, nec satis a tyronibus intelligantur. Sit igitur problema tale: *Data quatuor quantitatum continue proportionalium prima & differentia quarta a secunda; invenire singulas.* Resolutio hæc erit.

$$\text{Sit Quant. I} = a \quad \text{Quant. II} = x$$

$$\text{Differ. II \& IV} = b$$

$$\text{III} = y$$

$$\text{erit IV} = x - b$$

& per

& per conditionem problematis

$$a : x = x : y \quad a : x = y : x - b$$

$$\frac{x^2}{a} = y \quad xy = ax - ab$$

$$\frac{x^2}{a} = y \quad y = \frac{ax - ab}{x}$$

adeoque

$$\frac{x^2}{a} = \frac{ax - ab}{x}$$

$$x^3 = ax^2 - a^2b$$

$$x^3 - ax^2 + a^2b = 0$$

Videmus itaque constructionem æquationis cubicæ affectæ dependere ab inventione duarum mediarum proportionalium inter duas extremas, quarum prima simpliciter datur, altera autem per differentiam a prima mediarum. Ad constructionem vero sese offerunt æquatio ad parabolam $x^2 - ay = 0$, & æquatio ad hyperbolam intra asymptotos $xy - ax + ab = 0$. Cum vero etiam sit $x : y = y : x - b$ adeoque $y^2 = x^2 - bx$, consequenter $y^2 - x^2 + bx = 0$; loco hyperbolæ intra asymptotos offert etiam sese hyperbola æquilatera.

Eodem modo ex sequente problemate liquet, quomodo inventio unius mediæ proportionalis ducat ad æquationem quadraticam affectam. Scilicet, *data quantitatum continue proportionalium prima & differentia tertiæ a secunda, invenienda sit secunda.* Sit itaque

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Quantitas I = a Quant. II = x
Differ. II & III = b erit III = $x - b$
adeoque per conditionem problematis

$$\frac{a : x = x : x - b}{x^2 = ax - ab}{x^2 - ax + ab = 0}$$

Non sine ratione addimus exemplum æquationis quadraticæ affectæ, propterea quod harum æquationem constructionum reduximus ad inventionem linearum reciprocarum (§. 265 *Anal.*); ne existiment tyrones veritati consentaneum non esse, quod eadem pendeat ab inventione mediæ proportionalis inter duas extremas quomodocunque datas. Poterant casus omnes æquationum cubicarum per inventionem duarum, casus vero omnes æquationum biquadraticarum per inventionem trium mediarum continue proportionalium illustrari; siquidem prolixioribus esse licuisset.

§. 225. Doctrina de numeris irrationalibus illustratur problemate 259 (§. 630 *Anal.*), in quo ostendimus, quomodo numerus irrationalis quicunque per lineam exprimitur; ut intelligatur, cur Veteres quantitates irrationales non in numeris, sed in continuo considerarent, unde oriuntur, adeoque eas ad Geometriam retulerint. Attentionem denique meretur usus constructionis æquationum ad curvas datarum, per combinationem locorum; cum hoc

O o

paſſo,

pacto, ope curvarum inferioris generis, construi possint curvæ superioris; quemadmodum, ope parabolæ & circuli, construximus parabolam cubicam & circulum secundi generis. Etsi enim hæ constructiones sint molestiores, quam ut in usum recipiantur; sufficit tamen quod per easdem in curvâ, quæ descripta supponitur, quodvis punctum datum ad examen revocari possit, num rite fuerit determinatum; & saltem ex possibilitate constructionis pateat curvæ possibilitas.

§. 226. Satis ostendimus, quomodo in Elementis nostris Analyseos finitorum versari debeat, qui artem hanc intimius perspicere sibi que familiarem reddere voluerit; quamvis longe plura annotare poteramus, si singula accuratius perpendenda proponere visum nobis fuisset, nec acquiescere voluissimus in speciminibus, quæ in aliis imitari poterit attentione sufficiente usus. Restat igitur ut doceamus, quomodo in Analyse infinitorum sit versandum. Initio tyrones non scrupulosiores esse debent in notione quantitatis infinite parvæ expendenda; modo notent eas non in se esse nihilum, sed tantummodo respectu aliarum pro nihilo haberi: quo facit scholion def. 2 (§. 5 *Analys. infin.*). Quodsi enim difficultates quædam supersunt, quæ assensum remorantur; eadem in progressu evanescent: tollentur autem penitus, ubi ea perpendideris, quæ in

Metaphysicis de ente infinito Mathematicorum imaginario demonstrantur (§. 796 & *seqq. Ontol.*) Dudum Mathematici ex differentiis quæsiwere quadrata & cubos; quemadmodum docuimus in applicatione calculi literalis ad Arithmeticam (§. 81 & *seqq. Anal.*). Inventum hoc ansam dedit LEIBNITIO investigandi methodum ex differentiis colligendi terminos seriei cujuscunque continue crescentis, vel decrescentis; cum ignoraret, id jam in literas fuisse relatum a D. MOUTON, Canonico Lugdunensi, ex observatione FRANCISCI REGNALDI, Lugdunensis; quemadmodum constat ex epistola LEIBNITII ad OLDENBURGIUM scripta, quæ legitur in *Commercio epistolico* D. JOANNIS COLLINS & *aliorum de Analyse promota*, jussu Societatis Regiæ Britannicæ in lucem edito, p. 32 & *seqq.* Calculum adeo differentialem primum exercuit in numeris, ubi differentiæ sunt finitæ, seu assignabiles. Cum deinde opus præclarum de *Quadratura circuli & sectionibus conicis* GREGORII A S. VINCENTIO, ab HUGENIO sibi commendatum, legeret, in quo differentiarum magnitudinum infinite parvæ considerantur, quarum summæ exhibent ipsas magnitudines; hæc observans in calculum differentialem incidit, de quo hic nobis sermo est; methodo *Cavalieriana*, qua felicissime usus GREGORIUS A S. VINCENTIO, ad calculum perducta. In hoc calculo

zulo omnia pendent a differentiatio-
ne rectanguli xy . Quamobrem ad
eam omnem attentionem asferre de-
bent tyrones; ne in ceteris supersit
ulla difficultas. Etenim si supponas,
quomodo differentiale rectanguli xy
invenitur; nullo negotio cetera
erues per Algebram communem;
quemadmodum ostendimus tum in
ipso problemate primo *num. II. &*
seqq. tum in problemate secundo at-
que tertio. Constat lineam generari
motu continuo puncti ab uno termi-
no ad alterum, qualis est motus li-
quidi fluentis; unde a NEWTONO
appellatur *Fluxus*. Constat etiam
superficies istiusmodi motu linearum;
solida vero motu superficierum gigni.
Quodsi ergo ad genesin magnitudi-
num animum advertas; per ea, quæ
ab EUCLIDE & ARCHIMEDE
demonstrata sunt (§. 5 *Anal. infin.*),
animadvertes, magnitudines crescere
vel decrescere, per incrementa, vel
decrementa inassignabilia, quæ ipsæ
sunt quantitates infinite parvæ, cum
quibus hic nobis negotium est, a
NEWTONO, ad genesin magnitu-
dinum respiciente, *Fluxiones* ap-
pellatæ; quemadmodum ipsas mag-
nitudines, quæ hoc modo crescunt
vel decrescunt; *Fluentes* vocat. Un-
de quantitatem differentiari, stylo
Newtoniano, est invenire fluentis da-
tæ fluxionem. Ut hæc rectius intel-
ligantur; perpendant velim tyrones,
si recta quædam AB, juxta ductum
alterius rectæ AC, motu sibi semper

parallelo atque æquabili, moveatur
deorsum, dum interea punctum quod-
dam, motu quomodocunque acce-
lerato, in ipsa recta AB, à termino
A versus alterum B, progreditur;
punctum describet lineam curvam
AM, recta vero spatium curvilineum
APM. Quodsi ponamus rectam ex P
pervenire in p , adeoque abscissam AP
augeri incremento Pp ; evidens est, eo-
dem quo hoc accidit momento, semi-
ordinatam PM augeri incremento mR ,
arcum AM incremento Mm , & spatium
curvilineum APM incremento $PpMm$.
Arcus adeo AM differt ab arcu Am , ar-
culo Mm ; semiordinata PM a semior-
dinata pm , particula mR ; spatium cur-
vilineum, sive area APM, ab area
 ApM , particula $PpMm$; dum diffe-
rentia abscissæ AP ab abscissa Ap est
 Pp . Unde, stylo *Leibnitiano*, si in
tempusculo infinite parvo incremen-
tum Pp est inassignabile; hoc ipsum
incrementum Pp dicitur differentiale
abscissæ Ap , mR differentiale semior-
dinatæ PM, Mm , differentiale arcus
AM, & tandem $PpMm$ differentiale
areæ APM: stylo autem *Newtonia-*
no, Pp abscissæ, mR semiordinatæ,
 Mm arcus, $PpMm$ areæ, fluxio est.
Atque adeo patet, cur calculus dif-
ferentialis seu methodus fluxionum in
Geometria sublimiori tantæ sit utilita-
tis: id quod ex ejus applicatione
clarius elucescet. Incrementa ab-
scissæ Pp generantur motu æquabili;
adeoque æquali tempore, sive tem-
pusculo, æqualia sunt: at cum in-
cremen-

crementa semiordinatæ mR eodem tempusculo generentur motu inæquali, & incrementa lineæ curvæ sive arcus Mm , atque areæ $PpmM$, motu mixto ex æquali & inæquali, singula inæqualia esse debent. Unde liquet in hoc calculo magnitudinis unius incrementum sumi ut æquale, dum reliqua inæqualia sunt, quæ simul generantur. Non autem necesse est, ut abscissa ponatur crescere per incrementa æqualia; sed sumi etiam possunt momentanea incrementa magnitudinis alterius tanquam æqualia, quo casu abscissa crescit per inæqua-

Tab.III.
Fig. 33. lia incrementa. Ponamus enim rectam AC æqualiter moveri, motu sibi semper parallelo, juxta ductum rectæ AB ; dum interea punctum motu continuo accelerato in illa descendit; patet incrementa Qq , sive Rm , eodem tempusculo æqualia esse debere; dum interea incrementa Sm , sive Pp , inæqualia gignuntur. Hactenus dicta qui perpendit, is non modo animadvertet calculum differentialem niti methodo genetica, & rigorem acquirere ex demonstratis ab EUCLIDE & ARCHIMEDE (§. 5. *Anal. infin.*); verum etiam, in applicatione hujus calculi ad Geometriam sublimiorem, nihil deprehendet obscuritatis.

§. 227. Ope calculi differentialis, tangentes curvarum facillime determinantur; hancque methodum, non modo ad omnes curvas algebraicas extendi patet ex formula generali,

quam dedimus (§. 32 *Anal. infin.*), verum etiam eandem ad alias curvas, quæ mechanicæ non sunt, applicari posse, exemplo spiraliū, cycloidis, logarithmicæ & quadratricis DINOSTRATIS docuimus. Non opus hic est perplexis longisque calculis; nec methodum hanc irrationales quantitates remorantur; ut adeo nihil in eadem desiderari possit. Tota nititur ratione differentialium semiordinatæ ac abscissæ, quæ sunt inter se in ratione semiordinatæ ad subtangentem; quemadmodum in resolutione probl. 4 (§. 20 *Anal. infin.*) demonstravimus. Quoniam enim quantitatibus proportionalibus infinite parvis substitui possunt aliæ finitæ; valor subtangentis, qua tangens determinatur, ex quantitatibus assignabilibus componitur. Artificio hoc usus est BARROWIUS in sua Tangentium methodo: quod ut appareat, exemplo parabolæ Apollonianæ perfacili docere lubet. Sit Tab.III.
Fig. 34. $QN=y$, $AQ=x$, $PT=t$. Sit semiordinata alia PM , & ei respondens abscissa AP , differentia earundem semiordinatarum adeo exigua, quantum desideratur, & differentia abscissarum MR exiguæ parvitat. Sit $PQ=MR=c$, $NR=a$; erit $PM=y-a$, $AP=x-c$. Si parameter parabolæ fuerit p ; habebimus

$$y^2 - 2ay + a^2 = px - cp$$

$$\& \quad y^2 = px$$

$$\text{adeoque } -2ay + a^2 = -cp$$

$$2ay = cp, \text{ ob } a^2 = 0$$

Est

Est vero $e : a = t : y$

& $e : a = 2y : p$

adeoque $t : y = 2y : p$

$$t = 2y^2 : p$$

Nemo non videt, si pro a substituas dy , & pro e ponas dx ; prodire $2ydy = pdx$ & $t = \frac{ydy}{dx}$. Unde resul-

tat $t = \frac{2y^2}{p}$: Methodus itaque *Bar-*

rowiana tangentium a præfenti, quam proponimus, non differt; & calculus, quo utitur *BARROWIUS*, non differt a calculo differentiali, nisi characteristica. Hæc sane ratio est, cur *JACOBUS BERNOULLI* primum existimaret calculum differentialem *LEIBNITII* non differre a *Barrowiano*; & *Dn. DE TSCHIRNHAUSEN* contenderet, calculum differentialem *Barrowiano* ortum suum debere; præfertim cum *LEIBNITIUS*, ubi eundem in *Actis Eruditorum* primum publicavit, non nisi ad methodum de maximis & minimis, quæ specialis casus est methodi tangentium, applicaret. Enimvero cum usus calculi differentialis in problematis magis arduis solvendis conspiceretur; aliter de eodem sentire coeperunt *Geometra*, ipse etiam *HUGENIUS*, qui sibi persuadebat, aliis methodis detecta tantummodo aliter exprimi hoc calculo.

Tab.III. §. 228. Methodus *Barrowiana*
Fig. 35. nititur artificiis *CARTESII* in deter-

minanda tangente curvarum, & principiis *Geometriæ indivisibilium CAVALLERII*, atque *Algebræ ordinariæ*. Etenim si curva *AMNO* secatur recta *TO*, erit $NR : MR = PM : TP$, quemadmodum demonstravimus in resolutione probl. 4. (§. 20). Quamobrem si sit $NR = a$, $MR = e$, $PM = y$, $TP = t$; erit $a : e = y : t$, & ex. gr. ex natura parabolæ, cujus parameter p ,

$$\begin{aligned} y^2 &= px \\ y^2 - 2ay + a^2 &= px - ep \end{aligned}$$

$$- 2ay + a^2 = 0 - ep$$

Quodsi semiordinatæ *PM* & *QN* continuo propius ad se invicem accedant, ut differentiæ semiordinatarum *NR* & abscissarum *MR*, sive *PQ*, tandem degenerent in partes infinite parvas, seu momentanea incrementa; recta *MN* degenerat in arculum cognominem, *TN* degenerat in tangentem & *TP* in subtangentem. Tum vero ex principiis *Geometriæ indivisibilium* $a^2 = 0$ respectu $2ay$, & ep ; & $y - a$ atque y habentur pro æqualibus in contactu. Unde habemus:

$$- 2ay = - ep$$

$$\text{seu } 2ay = ep$$

$$\& a : e = (y : t) p : 2y$$

quemadmodum ante (§. 227).

Ad methodum *Barrowianam* si applicatur vera characteristica infinitesimalium, seu quantitatum infinite parvarum, sine qua algorithmus infinitesimalis non subsistit, qui est ipse sic dictus calculus differentialis;

prodit methodus tangentium, quam hic applicamus. Ope autem hujus calculi, non modo expedita redditur, verum etiam extenditur, ut ultimum suum complementum ab eodem accepisse dicenda sit. Obiter hic annotamus, quando quæstio est de inventore calculi differentialis, id potissimum quæri, quinam primus Algorithmum quantitatum infinite parvarum invenerit, & in solvendis problematis exercuerit; cum antea adhiberetur calculus literalis communis, & vi principiorum Geometriæ indivisibilium, termini quidam expungerentur respectu ceterorum evanescentes. Similis quodammodo est hæc quæstio alteri communi, qua quæritur, quinam sit inventor veræ characteristicæ numerorum & Algorithmi communis, quo hodie utimur in Arithmetica, tanta calculi commoditate & amplitudine. Habuere Veteres numerorum signa, sed parum apta. Usi iisdem sunt in Arithmetica practica. Non tamen ideo dici potest, quod habuerint veram numerorum characteristicam, & Arithmetica practica talem, qualem nunc habemus; nec quisquam hodie inventis notis numericis, quorum significatus ex ipsa numerorum natura deductus, aliis quam hisce signis uti vult: quemadmodum nec hodie inventa vera characteristicæ quantitatum infinite parvarum, qua calculus infinitesimalis in Analysin introductus, ut per modum Algorithmi exerceri

possit, quisquam calculum literalem communem adhibere mavult in solvendis problematis, quorum solutio a quantitativibus infinite parvis pendet. Equidem ex ore ipsius Dn. DE TSCHIRNHAUSEN hausi, quod contenderet, se per Algebram communem eadem præstare posse, quæ per calculum differentialem adeo feliciter eruuntur; nec calculum hunc esse veram methodum, sed tantummodo veræ methodi compendium; qualia complura, immo, ut ipse confidenter admodum loquebatur, infinita excogitari possint, hocque sese ostensurum in secunda parte Medicinæ Mentis; nunquam tamen dictis fidem fecit, quin potius morti vicinus Schedas suas Manuscriptas Vulcano tradidit, ne publicum statueret, quo successu in vera, quam pollicebatur, methodo detegenda fuerit versatus, & quousque fuerit progressus. Constat autem ex iis, quæ dedit in Actis Eruditorum, quod nimia in se ipsum confidentia de iis, quæ animo versabatur, locutus fuerit, quasi a se jam essent inventa; etsi re penitus examinata impossibilia deprehenderentur. Ostendi in Arithmetica, calculum numerosum ita institui posse, ut conservetur universalitas, quemadmodum in literali, & hoc pacto inveniri per calculum numerosum, quæ per literalem eruuntur. Ostendi superius, quomodo Algebra numerosa ad solvenda problemata geometricè applicari possit, ut prodeant formulæ algebraicæ geometricè

metricæ construendæ (§. 194). Immo ostendi, quomodo, retenta communi linearum designatione, regulæ Algebræ ad solutiones problematum geometricorum applicari potuerint (§. cit.). Ecquis vero dixerit, si quis hoc fecisset, ante inventam Arithmetica literalem, eum jam habuisse Algorithmum universalem & Algebram speciosam? Immo si hanc methodum ad tractandas curvas adhibuisset; ecquis dixerit, eum habuisse methodum CARTESII tractandi curvas per æquationes algebraicas? Habuisset similem quandam methodum, sed non eandem; ut adeo in multis paria præstare potuisset, ast non eadem facilitate. Ars characteristica differt a methodo, & pro illius diversitate, hæc prorsus aliam induit formam; ita ut non modo facilius præstentur, quæ fieri debent, verum etiam plura in potestate sint, quam si alia characteristica adhiberetur. Patebunt hæc clarius, ubi Ars inveniendi ad formam artis fuerit redacta, quemadmodum Logica; & qui ad diversitatem methodorum, prouti hæ per Artem characteristicam modificantur, animum adverterit, prouti in hac commentatione inculcamus, eadem perspiciet. Talia autem observasse non tantum proderit ei, qui Artem inveniendi ad formam artis reducere voluerit; sed etiam ei, qui in Mathesi addiscenda ad tertium cognitionis gradum adspirat; ut methodos, quæ ipsi innotuerunt, limare,

iisdemque omnem suam amplitudinem tribuere possit, quam suscipere valent; ne a casu expectandum sit, quod artis est, usu facultatum huc requisito non occasione sponte oblata, sed ex scientia determinato; nec tentaminibus subijciatur, quod certa lege regitur. Nihil hic asserimus, quod non obvium sit ei, qui in Mathesi addiscenda præscripto a nobis modo fuerit versatus. Multa hic annotare poteramus, siquidem prolixioribus esse liceret, nec a præsentis instituto digressio longior videretur aliena.

§. 229. Notandum vero est, formulas algebraicas, quæ pro subtangente prodeunt, geometricæ esse construendas, siquidem tangentem curvæ actu ducere volueris. Omitimus istas constructiones, brevitatis gratia; propterea quod in Analysis finitorum satis perspicue docuimus, quomodo istiusmodi formulæ construantur. Tyronibus tamen, quorum est exercere artem, eadem negligendæ non sunt. Ex. gr. subtangens ellipsis est $\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$ (§. 25 Anal.

infin. Est itaque

$$\frac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$$

$$h. e. PC : PB = AP : PT$$

Quodsi ergo fiat $PQ = PC$ & $PR = PB$, ductæque rectæ AQ agatur parallela TR; erit

$$PQ : PR = AP : PT$$

$$h. e. PC : PB = AP : PT$$

Tab. III.
Fig. 36.

adeo-

adeoque subtangens PT rite determinata, consequenter TM tangens quaesita.

Quoniam subtangens pro omnibus ellipsis in infinitum

$$\frac{(m+n)(ax-x^2)}{ma-mx-nx} = \frac{ax-x^2}{ma:(m+n)-x}$$
 habemus:

$$\frac{ma}{m+n} - x : a - x = x : PT$$

Patet itaque non absimili modo tangentem pro omnibus ellipsis in infinitum determinari posse. Et quia pro circulo eadem subtangentis formula reperitur, quæ pro ellipsi *Apolloniana*; & pro infinitis circulis eadem formula, quæ pro ellipsis infinitis; nisi quod isthic $n=1$; eodem etiam modo tangens omnium circulorum in infinitum determinatur. Immo cum formula subtangentis hyperbolarum a formula subtangentis ellipseos non differat nisi signis; tangens etiam hyperbolarum in infinitum non absimili modo determinatur. Subtangens curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$, est

$$\frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay} = \frac{y^3 - \frac{1}{3}axy}{x^2 + \frac{1}{3}ay}.$$

Habemus itaque

$$x^2 + \frac{1}{3}ay : y^2 - \frac{1}{3}ax = y : PT$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x = y : PT$$

Tab.III. Quantitates $\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$ & $\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$ concinna
Fig. 37. admodum constructione reperiuntur

hunc in modum. Fiat $CA = \frac{1}{3}a$; sitque $AP = x$, $PM = y$. Erigatur in A perpendicularis AN ipsi PM æqualis, seu construatur parallelogrammum rectangulum APMN. Ducta recta CN erigatur ad eandem perpendicularis NR. Erit $PR = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$.

Est enim

$$CA : AN = AN : AR$$

$$\frac{1}{3}a : y = y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } PR = AR - AP = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x.$$

Fiat porro $AO = CA$, ductaque OP erigatur PS ad eandem perpendicularis occurrens ipsi NA ultra rectam CP continuatæ in S. Erit $NS = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$. Est enim $AO : AP = AP : AS$

$$\frac{1}{3}a : x = x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } NS = SA + AN = \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y.$$

Quodsi curva supponatur data seu in plano descripta, datis jam NS & PR subtangens nullo negotio determinatur.

§. 230. Quoniam normalis ad tangentem perpendicularis; tangens quoque determinatur per normalem; consequenter etiam per subnormalem, per quam normalis determinatur. Subinde subnormalis per constructionem faciliorem reperitur; adeoque præstat tangentem determinare

minare per normalem, quam per subtangentem. Exemplum habemus in circulo, ubi radius ad tangentem perpendicularis; quemadmodum per præsentem quoque methodum calculo eruitur (§. 38 *Anal. infin.*); vi cuius subnormalis reperitur distantia semiordinatæ a centro æqualis; adeoque datur, data abscissa, cum subtangens eandem requirat constructionem, quam Ellipsis exigit (§. 229). Enimvero subinde etiam subnormalis postulat constructionem magis compositam quam subtangens; subinde utraque eadem simplicitate gaudet. Illius exemplum præbet ellipsis; hujus vero curva, ad quam est æquatio $y^3 - x^3 = axy$. Etenim in Ellipsi est (§. 40 *Anal. infin.*).

Tab. III.
Fig. 38.

$$ax - x^2 : y^2 = \frac{1}{2}a - x : PH$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}a - x : PH$$

Fiat itaque $AQ = PM = y$, & in Q erigatur perpendicularis QN rectæ per A & M ductæ in N occurrens; erit $QN = \frac{y^2}{x}$.

Est enim

$$AP : PM = AQ : QN$$

$$x : y = y : \frac{y^2}{x}$$

Continuetur PM in O, donec $PO = QN$, & ex centro C ducatur recta RC ipsi OB parallela, erit PR subnormali æqualis. Est enim

$$PB : PO = PC : PR$$

$$a - x : \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}a - x : PR$$

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

Quare si fiat $PH = PR$, habebis subnormalem, eritque HM normalis quæsitæ. Hanc constructionem si cum ea conferre volueris, quam pro subtangente dedimus (§. 229); patebit eam esse magis compositam. Subnormalis curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$ reperitur

$$= \frac{x^2y + \frac{1}{2}ay^2}{y^2 - \frac{1}{2}ax}$$

Habemus itaque

$$y^2 - \frac{1}{2}ax : x^2 + \frac{1}{2}ay = y : PH$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}a} - x : \frac{x^2}{\frac{1}{2}a} + y = y : PH$$

Analogia hæc ab altera, quam pro subtangente eliciimus (§. 229), non differt, nisi quod termini in ratione priori invertantur; consequenter constructio eadem fere manet, nec simplicior est pro subnormali, quam pro subtangente.

§. 231. Methodus determinandi asymptotos curvarum nititur principio reductionis. Asymptoti enim considerantur instar tangentium in puncto a vertice infinito intervallo distante, ut abscissa eidem respondens sit infinita; consequenter axis a habeat ad eandem rationem inassignabilem; adeoque fiat respectu nihilum. Hanc suppositionem a veritate non recedere, tyrones inde intelligunt, quod in hac hypothese eruantur eadem quantitates linearum, per quas asymptoti determinantur, quas supra in Analyfi finitorum aliter demonstravimus. Novarum enim metho-

P p

thodo-

rhodorum examina haberi debent, si applicentur ad jam nota. Ceterum attendant tyrones ad differentiam, quæ inter absolute nihilum, seu nihilum verum, & inter respectively nihilum, seu quod respectu quantitatis alterius pro nihilo habetur, intercedit. Etenim si qua quantitas per absolute nihilum multiplicatur, nihilo æqualis est: sed quæ ducitur in respectively nihilum non evadit nihilo æqualis. Hinc (§. 47 *Anal. infin.*) in valore ax : $(a + 2x)$, recta a non quidem auget valorem rectæ $2x$, ut adeo sit $a + 2x = 2x$; attamen non efficit ax nihilo æquale; sed hoc factum spectatur tanquam quantitas a infinities sumta, quia a quantitas finita, x infinita. Idem patet in æquatione $ay^2 = bx(a + x)$, quæ, quia a respectively nihilum, reducitur ad æquationem $ay^2 = bx^2$. Unde simul liquet, si sumatur $ay^2 = abx + bx^2$, cur infinitum primi gradus abx habeatur pro nihilo, respectu infiniti secundi gradus ay^2 & bx^2 ; quippe quod infinitum primi gradus infinities superat, quemadmodum infinitum primi gradus quantitatem finitam. Non nego, hæc in numerum fictionum referenda esse; sunt tamen toleranter vera, ut cum JUNGIO loquamur, & in calculo, quemadmodum fictiones aliæ, utiliter adhibentur. Cavendum itaque, ne in præjudicium veritatis talia in Physicam inferantur principia, ex qua imaginaria exulare debent; quippe ubi in veras phaenomenorum causas inquirimus.

§. 232. Attentionem quoque peculiarem meretur problema 7 (§. 49 *Anal. infin.*) in quo subtangens & subnormalis in conchoide determinatur. Curva hæc ex numero algebraicarum est: unde semiordinatæ ejus sumi possunt ad axem AB normales. Habet vero eadem etiam ^{Tab. I. *Analys. infin.* Fig. 5.} polum C: unde pro semiordinatis quoque haberi possunt rectæ CM ex polo C ad punctum curvæ M ductæ. Quamobrem duplicem explicamus methodum determinandi ejus tangentem & normalem. Prima eadem est, qua utimur in curvis algebraicis ceteris; nisi quod valor ipsius dx non ex æquatione ad curvam, sed aliis artificiis eruatur; ne formulæ pro subtangente & subnormali prodeant nimis perplexæ, constructionem minus concinnam parientes. Formula autem pro subnormali expeditior est, quam pro subtangente, adeoque in constructione præferenda. Cum enim sit subnormalis $= t$

$$+ \frac{x^2 - az}{v} = t + \frac{(z - a)z}{v}; \text{ crit}$$

$$v : z = z - a : \frac{z^2 - az}{v}$$

$$PB : MC = QC : \frac{z^2 - az}{v}$$

cui si addatur $PC = t$; prodibit subnormalis. Formula subtangentis

$$\frac{v(z^2 - t^2)}{z^2 - az + tv} = \frac{z^2 - t^2}{\frac{z^2 - az}{v} + t}$$

resolv.

resolvitur in hanc analogiam :

$$\frac{z^2 - az}{v} + t : z + t = z - t : PT$$

Atque adeo patet, si formula subtangens construenda, ante invenientiam esse subnormalem. Data autem subnormali, datur etiam tangens, ut adeo ulteriori constructione non habeamus opus. Altera methodus nititur hypothese semiordinatarum in puncto quodam concurrentium, quam ideo addere visum est, ut idea ejus animo ingeneretur ad alia profutura.

§. 233. Notanda vero sunt artificia, quibus subtangens determinatur in iis curvis, quarum semiordinata in puncto quodam coeunt. Nimirum quia, in curvis algebraicis, subtangens intercipitur inter tangentem & semiordinatam; in puncto communi concursus excitatur perpendicularis, tangentem, cui occurrit, secans, quemadmodum videre est in methodo altera pro conchoide & in methodo pro spiralibus. In cycloide subtangens determinatur per intersectionem tangentis cycloidis & tangentis circuli genitoris; quia portio illa tangentis intercipitur inter semiordinatam & tangentem cycloidis, etsi ad illam non sit perpendicularis; ut adeo hic a significato termini tantisper recedatur, quem is in curvis algebraicis habet; quemadmodum etiam non retinetur significatus prorsus idem semiordinatae, ubi eadem in

puncto quodam concurrunt. Nimirum definitiones terminorum inventae sunt pro curvis algebraicis; deinceps per analogiam quandam aptantur ad curvas alias termini, ut in iisdem proprias sibi nanciscantur definitiones. Absit itaque, ut tibi persuadeas, ipsos Geometras alere significatum terminorum vagum. Ita subtangentem cycloidis definire licet per portionem tangentis circuli, in puncto intersectionis circuli & semiordinatae cycloidis, inter semiordinatam & tangentem cycloidis interceptam; & cum definitiones nominales sint arbitrariae, utique hoc facere licet. Nec ideo dicere licet, quod vocabulum *Subtangens* varios habeat significatus. Subtangens enim cycloidis non est subtangens curvarum simpliciter ita dicta. In quadratrice *DINOSTRATIS*, abscissa sumitur in circulo genitore, & portio radii quadratricem secantis pro semiordinata. Quoniam hic recta ad semiordinatam perpendicularis cum tangente in puncto contactus concurrat, quae adeo extra ipsum eam non secat, ideo necessarium fuit, ut eo, quem explicavimus (§. 55 *Anal. infin.*) modo determinaretur. Ad hoc animum probe advertere debent tyrones, ne notione subtangentis confundantur, ubi ipsimet tangentes in curvis non algebraicis determinare voluerint.

§. 234. Methodus de maximis & minimis nititur principio reductionis: maximae enim & minimae applicatae redu-

reducuntur ad casum tangentium. Et similiter applicatio hujus methodi ad problemata particularia eodem principio nititur; quatenus quantitarum series ad certum quendam terminum continuo crescentium vel decrecentium, deinceps rursus decrecentium vel crescentium exponitur per semiordinatas curvæ cujusdam algebraicæ, in qua semiordinatæ eandem constantem relationem habent ad abscissas, quæ convenit quantitatibus crescentibus vel decrecentibus. Ex. gr. Si linea recta ita secanda, ut rectangulum ex segmentis sit maximum eorum, quæ hac ratione construui possunt; constans relatio quantitatis continuo crescentis usque ad terminum maximum exprimitur per factum segmentorum in se invicem. Quamobrem si segmentum minus sumas pro abscissa; problema hoc reducitur ad circulum, in quo maxima semiordinata determinanda.

Tab.III. *Fig. 32.* S. 235. Ut ideam calculi summatorii, qui vulgo integralis dicitur, animo concipiant tyrones; repetendum est ex superioribus, magnitudines crescere per momentanea incrementa. Nimirum si tempusculo quodam abscissa augetur incremento Pp , semiordinatæ accedit incrementum mR , arcui incrementum Mm & areæ incrementum $PpmM$. Unde si abscissa $AP = x$, constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis successivis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dx , ita ut

summa omnium dx sive $\int dx = x$; Similiter semiordinata $PM = y$ constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per dy , ita ut summa omnium dy sive $\int dy = y$; Arcus $AM = v$ constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis, quorum unumquodque dv , ita ut $\int dv = v$; & area APM constare concipitur ex innumeris istiusmodi areolis, quarum unaquæque, quemadmodum ostendimus, exprimitur per ydy , ita ut summa omnium istarum areolarum sive $\int ydy$ sit areæ æqualis. Calculo adeo summatorio quæritur summa omnium incrementorum momentaneorum, ut habeatur magnitudo, cujus incrementum indefinite datur. Quamobrem si valor incrementi exprimitur per relationem, quam habet semiordinata ad abscissam; per summationem reperitur valor semiordinatæ, arcus, & areæ curvæ datæ. Ex. gr. in parabola $dy = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx$. Quare $\int \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx = a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$ est semiordinata parabolæ. Similiter in circulo $dy = \frac{1}{2} (a-2x) dx (ax-x^2)^{-1:2}$. Quare $\int \frac{1}{2} (a-2x) (ax-x^2)^{-1:2} dx = (ax-x^2)^{1:2} = \sqrt{(ax-x^2)}$ est semiordinata circuli. Et in hyperbola intra asymptotos $dy = ax^{-2} dx$. Qua-

re $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ est semiordinata hy-

perbolæ intra asymptotos. Patet adeo per calculum summatorium restitui quantitatem variabilem, cujus differentia-

rentiatione prodiit magnitudinis elementum, seu momentaneum in ejus genefi incrementum. Unde Angli methodum fluxionum inverfam vocant, quia ex data fluxione reperitur fluens, quemadmodum per directam ex fluente fluxio. Regreffus autem ifte non ubivis obviuſ eſt. Unde hodienuſ Mathematicorum ingenia exercet. Conſtabit autem ex problematis phyſico-mechanicis, qualia exempli loco in Mechanica dabimus, ſolutiones problematum ſæpe nos deducere ad æquationes differentiales, quarum integratione detegitur natura curvæ; vel, ubi hoc fieri nequit, ope æquationum differentialium curvæ conſtruuntur. Ope igitur hujus calculi multa in poteſtate ſunt, ad quæ alias non pateret aditus. Ceterum tyrones ad exemplum trianguli, quod primo loco (§. 101 *Anal. infin.*) exhibuimus, animum probe attendant; ut non modo idea methodi quadrandi curvas in eodem naſcatur, verum etiam dubium evaneſcat, quaſi ex neglectu trianguli characteriſtici oriri debeat in ſummatione error aſſignabilis: quod ubi fieret, impoſſibile erat, ut prodiret area trianguli tanta, quantam eſſe debere demonſtratur in Elementis Geometriæ. Præſtantia autem hujus calculi inde eluceſcit, quod paucis lineis non modo exhibeatur quadratura parabolæ *Apolloniane*, ſed & omnium parabolæ, & curvarum ipsis agnatarum in infinitum; cum methodo *Ar-*

chimedæa difficillime cruatur tantummodo prior.

§. 236. Cum nobis propoſuerimus exemplis potius docere regulas, quam earum multitudine obruere memoriam tyronum, præceptis omnibus in unum locum congeſtis, antequam ad exempla accedatur; quæ de quantitate in ſummatione adjicienda tenenda ſunt, exemplo quadraturæ ſegmenti parabolici inculcare lubuit (§. 107 *Anal. infin.*): ita enim ratio, cur adjicienda veniat, clariuſ percipitur, maniſeſtior in caſu particulari, quam ſi generalis detur. Ratio nimirum generalis eſt, quod in differentiatione, cum differentiale quantitatum conſtantium ſit $= 0$; quantitates conſtantes in compoſita variabilibus adjectæ evaneſcant; ita ut idem ſit differentiale quantitatum $x + a$ atque x , & quantitatum $x - a$ atque x . Eſt enim & $d(x + a) = dx$, & $d(x - a) = dx$ & differentiale ipſius $x = dx$. Unde in ſummatione, ſummæ adjiciendum, quod in differentiatione evanuit. Quomodo vero appareat, utrum aliqua quantitas conſtans ſit adjicienda, nec ne; & numca, quæ adjicienda venit, ſignum habere debeat poſitivum, an privativum; in exemplo particulari multo clariuſ elucet, quam ſi idem generaliter doceri deberet. Vidimus ^{Tab. II.} in doctrina de locis geometricis, ^{Fig. 22.} initium abſciſſæ non modo ſtatui poſſe in vertice A, ubi cum abſciſſa evaneſcit etiam ſemiordinata,



evanescit arcus, evanescit spatium curvilineum, abscissa, semiordinata, & arcu contentum; verum etiam in puncto L infra verticem, vel in puncto N ultra eundem. Per hoc ipsum vero non variatur elementum abscissæ Pp, quod in omni casu idem est. Ne igitur in summatione obscurum sit, quod de quantitate adicienda hic præcipitur; probe perpendant velim tyrones, quæ in scholio (§. 108 *Anal. infin.*) habentur. Inventores talia non animadvertunt, nisi ubi animum ad solutionem particularium applicarunt; neque enim methodi repertæ sunt, nisi dum solutiones problematum tentatæ ad easdem deduxerunt inventores. Quamobrem qui Analyysi, tertii cognitionis gradus acquirendi gratia, operam navat, eadem via incedere debet, quam calcarunt Inventores; utut evitentur avia, in quæ haud raro inciderunt, cum in terris adhuc incognitis versarentur, antequam in viam regiam pervenirent. Ea quoque de causa, non dedimus nisi particularium problematum solutiones; etsi facillimum fuisset generales huc transcribere. Neque enim existimandum est, generales solutiones fuisse particularibus priores; sed illæ potius ex his enatæ sunt. Plerumque majoris artis est solvere problemata in casu particulari, quam universaliter.

§. 237. Quadraturam parabolarum omnium, immo curvarum aliarum eisdem agnatarum in infinitum,

nullo negotio dari per calculum integrale patet (§. 103, 105 *Anal. infin.*). Curvæ autem ceteræ, quas deinceps quadramus, tum etiam segmenta parabolica, quæ quadrantur, reducuntur ad parabolas; sive elementum per se non integrabile, juxta canones generales, reducat ad integrabile, terminis finitis aut nonnisi uno constans; sive resolvatur in seriem infinitam, quæ terminos numero infinitos habet. Etenim in casu priore, area curvæ reducitur ad areas tot parabolarum, quot sunt termini; in casu posteriori autem ad areas parabolarum infinitarum; quemadmodum, in Geometria elementari, figurarum rectilinearum, & ipsius circuli area reducuntur ad areas triangulorum. Ex. gr. ubi segmentum parabolicum, cujus elementum est $dx \sqrt{(ab + ax)}$ quadrare jubemur, $dx \sqrt{(ab + ax)}$ reducimus ad $2v^2 dv : a$. Quodsi dv sumatur pro differentiali abscissæ & v pro abscissa, erit $\frac{2v^2}{a} = z$,

adeoque $v^2 = \frac{1}{2} az$. Unde liquet segmentum parabolicum quadrantum reduci ad parabolam externam, cujus parameter est $\frac{1}{2}a$, seu dimidio parametri parabolæ æqualis, cujus segmentum quadrantum. Similiter patet aream curvæ CARTESII (§. 111 *Anal. infin.*) esse differentiam arearum parabolæ externæ *Apolloniæ*, ad quam $x^2 = bz$, & parabolæ externæ secundi generis, ad quam $x^3 = b^2v$. Non absimili modo patet, in elemen-

elemento hyperbolæ intra asymptotos $dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ &c. in termino primo semiordinatam esse $= 1$, in secundo $= x$, in tertio, si $1 = a$, esse $x^2 = ay$, in quarto $x^3 = a^2y$, in quinto $x^4 = a^3y$ &c. consequenter terminum primum esse elementum parallelogrammi rectanguli, secundum elementum trianguli æquicruri, tertium parabolæ externæ *Apolloniana* seu primi generis, quartum elementum parabolæ externæ secundi generis, quintum elementum parabolæ externæ tertii generis & ita porro in infinitum. Quadratura igitur hyperbolæ reducitur ad quadraturam parallelogrammi rectanguli, trianguli æquicruri & infinitarum parabolarum. Inde est quod hyperbolæ & circuli quadraturam per infinitas parabolas demonstraverit GUIDO GRANDUS. Equidem, data hyperbolæ area intra asymptotos, datur etiam area interna inter axem & curvam interjacens; placuit tamen (§. 123 *Anal. infin.*) etiam ostendere, quomodo area interna quadretur. Enimvero patet quadraturam area intra asymptotos esse simpliciore quadratura internæ, in qua \sqrt{ax} du-cenda est in seriem infinitam.

§. 238. Exemplo circuli docuimus (§. 124 *Anal. infin.*) quadraturam non uno modo absolvi posse. Quadravimus enim circulum, ex dato sinu verso, ex dato sinu complementi, & ex tangente. Notanda hic sunt

artificia, quibus progressus terminorum in infinitum redditur conspicuus: id quod inprimis ostendimus in quadratura *Newtoniana*. Artificia etsi eadem sint, quibus jam in Analysis infinitorum usi sumus; scilicet ut in numeris conservetur universalitas calculi, & ut terminus sequens efficiatur dependens ab antecedente; applicatio tamen eorundem non statim cuivis succurrit. Unde memini quosdam seriem *Leibnitianam*, aut; si mavis, *Gregorianam*, pro circulo prætulisse *Newtoniana*, quæ tamen citius convergit, seu celerius appropinquat; quod illa constantem servet legem, in hac vero termini nulla certa lege progrediantur; etsi *Newtoniana* non modo manifestam legem admittat, qua termini in infinitum progrediuntur, verum etiam hoc habeat, ut terminus quilibet sequens ex proxime antecedente inveniri possit. Id potius attentionem tyronum meretur, quod quadratura *Newtoniana* exhibeat quadraturam segmentorum circuli, *Leibnitiana* vero quadraturam sectorum; atque adeo hæc insinuet ideam quadrandi sectores curvarum, quæ centrum habent, animo jam obversata ARCHIMEDI, dum circuli arcum ad arcum trianguli reduxit; quemadmodum clarissime docuit KEPLERUS in *Stereometria dolii Austriaci*. Notandum porro est, quod docuit LEIBNITIUS in *Actis Eruditorum*. An. 1682, p. 45, cum termini $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ &c. itemque termini $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$

$\frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \frac{1}{19}, \&c.$ progrediantur in progressionem harmonicam; arcum circuli esse differentiam duarum serierum progressionis harmonicæ. Præterea, si binos quosque terminos ad eandem denominationem reducas; quia $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}, \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}, \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}, \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{2}{99}, \frac{1}{11} - \frac{1}{13} = \frac{2}{143}, \frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{2}{195}, \frac{1}{15} - \frac{1}{17} = \frac{2}{255}, \&c.$ area circuli, quadrato diametri existente 1, erit $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} + \frac{2}{143} + \frac{2}{195} + \frac{2}{255} + \&c.$ in infinitum. Jam si diameter circuli $= 1$, erit semidiameter $= \frac{1}{2}$, adeoque quadratum inscriptum $= \frac{1}{4}$ (§. 21 *Trigon.*). Quoniam itaque quadratum circumscriptum est inscripti duplum, si quadratum inscriptum fuerit $\frac{1}{4}$, erit circumscriptum $\frac{1}{2}$, adeoque area circuli $\frac{1}{2} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143} + \frac{1}{195} + \frac{1}{255} + \&c.$ in infinitum (§. 181 *Arithm.*). Statim patet 3, 35, 99 esse numeros quadratos unitate multiplicatos, nempe $4 - 1, 36 - 1, 100 - 1$; & inter quadratum 4 & 36 interjacere tres numeros quadratos 9, 16, 25; similiterque inter 36 & 100 interjacere tres 49, 64, 81. Quod si seriem pro circulo continues, & cum numeris in Tabula quadratorum numerorum compares; videbis eam constante hac lege progredi, ut denominator fractionis sit quartus quisque numerus excerptus ex serie numerorum quadratorum unitate multiplicatorum, numeratore semper existente unitate. Quando vero quadratum inscriptum $\frac{1}{4}$, radius est $\sqrt{\frac{1}{4}}$ (§. 21 *Trigon.*), adeoque diameter $= 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Hæc ideo monemus, ut discant tyro-

nes dari etiam artificia particularia legem progressionis terminorum in infinitum detegendi, præter generalia, de quibus diximus ante: quamvis istiusmodi quoque artificiis jam usi fuerimus in inveniendo generali theoremate pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Anal. infin.*). Neque enim inutile est eadem artificia variis exemplis illustrari.

§. 239. Quemadmodum vero quadraturæ curvarum per series infinitas reducuntur ad quadraturam infinitarum parabolarum; ita quoque curvarum aliarum quadratura ad quadraturam circuli atque hyperbolæ reduci solent: id quod non uno modo fieri solet. Exemplum habemus in ellipsi (§. 126 *Anal. infin.*), ubi ratio arcæ ellipticæ ad arcam circuli sua veluti sponte sese offert. Exempla alia præbent cyclois, cissois, spiralis *Archimedeæ*. Non sine ratione addidimus hanc reductionem, cum eadem utamur in altioribus; prouti suo loco constabit in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvuntur. Probe autem notandæ sunt hæc reductiones iis, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ut vim principii reductionis per omnem Artem inveniendi utilissimi rectius percipiant. Ceterum eodem instituto, (§. 147 *Anal. infin.*) rectificationem parabolæ reducimus ad quadraturam hyperbolæ: id quod ideo attentionem meretur, ut discamus subinde summationem

nem ejusdem elementi dependere, & a quadratura curvæ, & a rectificatione arcus cujusdam. Habet enim hoc usum non contemnendum in methodo tangentium inversa, ubi æquationes differentiales construere jubemur, supposita curvæ cujusdam quadratura, vel rectificatione arcus. Exempla occurrunt in Mechanicis, ubi problemata physico-mechanica solvimus. Quodsi enim tempestive animum advertamus ad talia, quæ in progressu usum præclarum habent; quæ alias difficilia videntur, facilia evadunt, nec perturbatur animus, quando applicantur ea, quorum idea nobis jam familiaris evasit; præsertim cum haud raro insolita, nondumque perspecta videantur, quæ ex anterioribus nota esse poterant, si attentione sufficiente in iisdem usi fuissetus.

§. 240. Rectificatio curvarum, perinde ac inventio sectorum ellipticorum & hyperbolicorum, interdum requirit calculos admodum prolixos. Ne igitur prolixitate tyrones redderentur perplexi, & a solutione problematis deterrerentur; calculos integros admodum distincte explicatos exhibuimus. Consulunt autem sibi tyrones, si initio generalem quandam ideam solutionis animo concipiant; veluti quod in rectificatione arcus elliptici (§. 172 *Anal. infin.*) primum quæratuur valor ex æquatione ad curvam, deinde tam ex numeratore, quam denominatore, in

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

valore isto emergente, extrahatur radix per theorema *Newtonianum*, & tandem series pro numeratore emergens dividatur per seriem, quæ emergit pro denominatore. Hoc pacto enim, in usum solutionis problematis, problema unum resolvitur quasi in plura, quorum unumquodque sigillatim solvi potest. Circa divisionem attentionem meretur artificium, quo calculus a perplexitate liberatur, ut distincte singula ipsis oculis exhibeantur: quod non modo facit ad facilius evitandum errorem, qui in calculum perplexum facile irrepit, defectu attentionis; verum etiam omnem molestiam aufert, qua attentio turbatur. Distincta perceptio intellectus est: unde qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navant, non modo nostro more singula distincte sibi repræsentare, verum etiam ad diversa artificia, quibus eo fine hinc inde utimur, animum sollicitè advertere tenentur. Ceterum ne quis aliorum libros evolvens, in quibus eorundem Problematum solutio occurrit, existimet, paucis ibidem explicari, quæ a nobis tanta prolixitate expediuntur; monendum esse duco, autores plerosque scribere peritis, non tyronibus, quorum utilitati nos velificamur; adeoque multa omittere, quæ a lectore supplenda sunt, siquidem veritatem assequi voluerit. Unde non modo tyrones, verum etiam haud raro exercitatiores multum temporis fallunt,

fallunt, antequam multo labore ab altero dicta assequantur. Nobis vero, qui tempus rerum omnium pretiosissimum existimamus, propositum est, ut sine omni temporis dispendio sciendi cupidos ad scientiam perducamus; cumque aliorum felicitati omni modo studere nos jubeat philosophia nostra, id quoque agendum esse arbitramur, ut in discendo omnem a discantibus molestiam arceamus.

§. 241. Inprimis autem in doctrina de rectificatione curvarum attentionem meretur methodus, qua, ex quantitate per seriem data, invenitur series pro quantitate variabili, ex qua formantur seriei prioris termini; veluti dum ex arcu dato sinus quaritur. Etenim arcus datur per seriem infinitam, cujus termini formantur ex sinu, & sinus quaritur in serie, cujus termini formantur ex arcu. Nititur ea methodo extrahendi radicem ex serie infinita, quam eum in finem explicavimus in *Analysi finitorum*. Inventa est a NEWTONO; quemadmodum constat ex literis ad LEIBNITIIUM datis, quæ leguntur apud WALLISIUM, volumine tertio *Operum*, diciturque Regressus serierum. Subinde tamen artis est applicare methodum extrahendi radicem ex aequatione infinita in regressu serierum. Exempli loco est problema 56, (§. 163 *Anal. infin.*), quo ex dato arcu invenitur sinus versus. Solutio igitur problematis istius attentionem meretur, ut artificium, quo hic

utimur, in aliis casibus similibus adhiberi possit. Neque enim sufficit, ut intelligantur, quæ docentur, si quis ad tertium cognitionis gradum adspirat; sed artificia quoque analytica addiscenda in usum futurum, cum regulas doceamus per exempla. Ad hætenus dicta qui animum attendit, in ceteris sese satis attentum atque acutum præbebit, ut plura moneri non sit opus. Immo si quis ea attentione in discenda Mathesi uti voluerit, quam tantopere inculcamus; acumen singulare acquirat, quo facile, nullo quasi negotio, discernet artificia in solutionibus problematum adhibita, eorundemque a se invicem dependentiam animadvertet: id quod utile erit iis, qui, studio Matheseos ac in specie Algebrae, in Arte inveniendi generali proficere student ad recte philosophandum necessaria.

§. 242. Circuli rectificatio etiam deduci potest ex quadratura circuli. Quoniam enim area circuli pro ducta peripheria in quartam diametri partem (§. 429 *Geom.*), peripheria prodit, si seriem, quæ exprimit aream circuli, divides per $\frac{1}{4}$. Inde est, quod, si diameter fuerit 1, pro quadrante eadem prodeat series $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} + \frac{1}{16384} - \frac{1}{32768} + \frac{1}{65536} - \frac{1}{131072} + \frac{1}{262144} - \frac{1}{524288} + \frac{1}{1048576} - \frac{1}{2097152} + \frac{1}{4194304} - \frac{1}{8388608} + \frac{1}{16777216} - \frac{1}{33554432} + \frac{1}{67108864} - \frac{1}{134217728} + \frac{1}{268435456} - \frac{1}{536870912} + \frac{1}{1073741824} - \frac{1}{2147483648} + \frac{1}{4294967296} - \frac{1}{8589934592} + \frac{1}{17179869184} - \frac{1}{34359738368} + \frac{1}{68719476736} - \frac{1}{137438953472} + \frac{1}{274877906944} - \frac{1}{549755813888} + \frac{1}{1099511627776} - \frac{1}{2199023255552} + \frac{1}{4398046511104} - \frac{1}{8796093022208} + \frac{1}{17592186044416} - \frac{1}{35184372088832} + \frac{1}{70368744177664} - \frac{1}{140737488355328} + \frac{1}{281474976710656} - \frac{1}{562949953421312} + \frac{1}{1125899906842624} - \frac{1}{2251799813685248} + \frac{1}{4503599627370496} - \frac{1}{9007199254740992} + \frac{1}{18014398509481984} - \frac{1}{36028797018963968} + \frac{1}{72057594037927936} - \frac{1}{144115188075855872} + \frac{1}{288230376151711744} - \frac{1}{576460752303423488} + \frac{1}{1152921504606846976} - \frac{1}{2305843009213693952} + \frac{1}{4611686018427387904} - \frac{1}{9223372036854775808} + \frac{1}{18446744073709551616} - \frac{1}{36893488147419103232} + \frac{1}{73786976294838206464} - \frac{1}{147573952589676412928} + \frac{1}{295147905179352825856} - \frac{1}{590295810358705651712} + \frac{1}{1180591620717411303424} - \frac{1}{2361183241434822606848} + \frac{1}{4722366482869645213696} - \frac{1}{9444732965739290427392} + \frac{1}{18889465931478580854784} - \frac{1}{37778931862957161709568} + \frac{1}{75557863725914323419136} - \frac{1}{151115727451828646838272} + \frac{1}{302231454903657293676544} - \frac{1}{604462909807314587353088} + \frac{1}{1208925819614629174706176} - \frac{1}{2417851639229258349412352} + \frac{1}{4835703278458516698824704} - \frac{1}{9671406556917033397649408} + \frac{1}{19342813113834066795298816} - \frac{1}{38685626227668133590597632} + \frac{1}{77371252455336267181195264} - \frac{1}{154742504910672534362390528} + \frac{1}{309485009821345068724781056} - \frac{1}{618970019642690137449562112} + \frac{1}{1237940039285380274899124224} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} + \frac{1}{4951760157141521099596496896} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} + \frac{1}{19807040628566084398385987584} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} + \frac{1}{79228162514264337593543950336} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} + \frac{1}{316912650057057350374175801344} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} + \frac{1}{1267650600228229401496703205376} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} + \frac{1}{5070602400912917605986812821504} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} + \frac{1}{20282409603651670423947251286016} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} + \frac{1}{81129638414606681695789005144064} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} + \frac{1}{324518553658426726783156020576256} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} + \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} - \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} + \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} - \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} + \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} - \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} + \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} - \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} + \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} - \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} + \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} - \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} + \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} - \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} + \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} - \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} + \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} - \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} + \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} - \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} + \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} - \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} + \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} - \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} + \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} - \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} + \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} - \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} + \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} - \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} + \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} - \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} + \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} - \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} + \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} - \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} + \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} - \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} + \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} - \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} + \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} - \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} + \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} - \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} + \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} - \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} + \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} - \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} + \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} - \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} + \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} - \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} + \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} - \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} + \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} - \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} + \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} - \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} + \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} - \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} + \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} - \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} + \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} - \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} + \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} - \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} + \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} - \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} + \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} - \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} + \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} - \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} + \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} - \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} + \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} - \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} + \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} - \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} + \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} - \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} + \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} - \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} + \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} - \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} + \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} - \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} + \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} - \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} + \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} - \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} + \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} - \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} + \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} - \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} + \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} - \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} + \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} - \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} + \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} - \frac{1}{3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552} + \frac{1}{7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104} - \frac{1}{14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208} + \frac{1}{28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416} - \frac{1}{56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832} + \frac{1}{113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664} - \frac{1}{226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328} + \frac{1}{452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656} - \frac{1}{904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312} + \frac{1}{1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624} - \frac{1}{3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248} + \frac{1}{72370055773322622139731865630429942408$

Notandum adhuc est, ex formulis indefinitis erui posse adhuc alias formulas pro circulo integro, vel ejus peripheria integra, si valor ipsius x non explicetur per diametrum 1, sed per sinum, sinum versum, cosinum, vel tangentem alicujus arcus: quo in casu sæpius prodit series magis convergens, cum priori modo inventa minus convergeret & contra. Ex. gr. Si tangens fuerit x , pro arcu prodit $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c.

Tab. III. Fig. 39. Ponamus arcum x esse 30° . Si fuerit radius $CA = CB = 1$, erit sinus $BI = \frac{1}{2}$ (§. 15 *Trigon.*), consequenter ob $IC^2 = BC^2 - BI^2$ (§. 417 *Geom.*) $IC^2 = \frac{3}{4}$. Quamobrem cum sit

$IC : IB = CA : AD$ (§. 26 *Trigon.*)
& $IC^2 : IB^2 = CA^2 : AD^2$ (§. 124 *Anal.*)
erit $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 : AD^2$
five $3 : 1 = 1 : AD^2$ (§. *cit.*)
Unde reperitur $AD = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Quodsi hunc valorem pro x substituas, cum sit

$$\begin{array}{ll} x^2 = \frac{1}{3} & \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{9} \\ x^4 = \frac{1}{9} & \frac{1}{3}x^4 = \frac{1}{45} \\ x^6 = \frac{1}{27} & \frac{1}{7}x^6 = \frac{1}{189} \\ x^8 = \frac{1}{81} & \frac{1}{9}x^8 = \frac{1}{729} \\ x^{10} = \frac{1}{243} & \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1}{2673} \end{array}$$

series $x (1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{11}x^{10}$ &c.) degenerat in sequentem $\sqrt{\frac{1}{3}} (\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673}$ &c.) quæ exprimit arcum 30 graduum. Si vero diameter fuerit 1, eadem exprimit arcum 60 graduum. Quamobrem si seriem hanc ducas in 6,

hoc est, si $\sqrt{\frac{1}{3}}$ multiplices per 6, cum sit $6\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; pro area circuli habebis

$$2\sqrt{3} (\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} \text{ &c.})$$

Quodsi porro binos quosque terminos reducere volueris ad eandem denominationem, erit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{9} + \frac{1}{45} &= \frac{-45 + 9}{405} = \frac{-36}{405} = \frac{-12}{135} \\ -\frac{1}{189} + \frac{1}{729} &= \frac{-729 + 189}{189 \cdot 729} \\ &= \frac{-81 + 21}{21 \cdot 729} \\ &= \frac{-60}{21 \cdot 729} \\ &= \frac{-20}{7 \cdot 729} \\ &= \frac{-20}{5103} \end{aligned}$$

Si adhuc addas terminum seriei sequentem $+\frac{1}{9477}$; eodem modo reperies

$$-\frac{1}{2673} + \frac{1}{9477} = \frac{-28}{104247}$$

Unde series pro circulo resultat $2\sqrt{3} (1 - \frac{12}{135} - \frac{20}{5103} - \frac{28}{104247}$ &c.)

Quodsi eandem seriem divides per 4, & factorem $2\sqrt{3}$ per 4 multiplices; habebis pro circulo

$$8\sqrt{3} (\frac{1}{4} - \frac{3}{135} - \frac{5}{5103} - \frac{7}{104247} \text{ &c.})$$

seu $\sqrt{192} (\frac{1}{4} - \frac{3}{135} - \frac{5}{5103} - \frac{7}{104247} \text{ &c.})$

$$\text{Est vero } 135 = 15 \cdot 9$$

$$5103 = 63 \cdot 81$$

$$= 63 \cdot 9^2$$

$$104247 = 143 \cdot 729$$

$$= 143 \cdot 9^3$$

Qq 2

Quam-

Quamobrem series pro circulo

$$\sqrt{192} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{15 \cdot 9} - \frac{5}{63 \cdot 9^2} - \frac{7}{143 \cdot 9^3} \&c. \right)$$

Unde patet lex progressionis in infinitum. Etenim numeratores progrediuntur secundum numeros impares; denominatores componuntur ex binis factoribus, quorum unus sumitur ex progressionem geometrica, cujus terminus primus 9, & exponens rationis eidem æqualis; alter vero per saltum excerpitur ex serie numerorum quadratorum unitate multiplicatorum, quorum radices sunt 4. 8. 12. &c. hoc est, progrediuntur in progressionem arithmetica, cujus terminus primus est 4 & differentia terminorum eidem æqualis.

Nisi formulam abbreviare voluissimus reductione binorum terminorum diversis signis præditorum ad eandem denominationem; lex progressionis in infinitum manifestari quoque poterat in formula

$2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} \&c. \right)$
resolvendo denominatores in suos factores. Cum enim sit

$$45 = 5 \cdot 9$$

$$189 = 7 \cdot 27$$

$$729 = 9 \cdot 81$$

$$2673 = 11 \cdot 243$$

erit pro circulo series, si diameter = 1

$$\sqrt{12} \left(\frac{1}{1 \cdot 1} - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \frac{1}{9 \cdot 81} - \frac{1}{11 \cdot 243} \&c. \right)$$

Una hic series factorum progreditur secundum numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. altera vero in progressionem geometrica, cujus exponens rationis 3, nimirum 1. 3. 9. 27. 81. 143.

§. 243. Patet hinc non temere esse judicandum, utrum series aliqua citius appropinquet altera, nec ne, & num constante quadam lege progrediatur. Neque enim eadem formula indefinita in omni casu particulari æque appropinquat, & lex progressionis sæpius latet, atque in casu particulari non eadem est, quæ in universali. Liquet etiam ad detegendam legem progressionis facere Arithmetica, seu numerorum scientiam, quæ subinde etiam compendia summationis quotlibet terminorum seriei subministrat; ut adeo inutile existimare minime debeat studium, quod in speciebus numerorum certa lege progredientibus & in iis summendis collocatur; sit ita quod hodie Geometria magis excolatur Arithmetica, immo Geometriæ ad Mechanicam applicatæ magis habeatur ratio, quam puræ. Apparet etiam usui formularum minime obstare, quod irrationalitati obnoxia sint; & in casu particulari formulam ab irrationalitate liberam eidem implicari posse citra ullum incommodum, immo usum ejus per hoc fieri posse expeditiorem. Hæc probe notanda sunt, ne judicium de formulis diversis præcitemus, quando de
unius

unius præ altera prærogativa agitur. Et si itaque jam in superioribus (§. 238) de transmutatione seriei *Leibnitiana*, seu *Gregoriana*, pro circulo in alias quædam monuerimus; non tamen piguit plura in eam rem dicere (§. 241), tum ut intelligatur, ex eadem formula, per transmutationem communi Arithmetica nixam, varias deduci posse alias, tum ut constet, hoc non inutiliter fieri, ubi eadem ad praxin sunt transferendæ; tum ut excitaremus attentionem eorum, & juvaremus eorundem acumen, qui de seriebus infinitis ad usum aptandis forsitan commentari decreverint. Neque enim inutilem operam sumeret, si quis hoc argumentum pro dignitate tractaret; ne inanes viderentur speculationes, quæ certum sui pollicentur usum. Nec est quod excipias talia peritis nullum facere negotium. Nam quibus sese commendat usus, ii non semper, immo rarissime adeo periti sunt, ut talia per se assequantur.

§. 244. Ut hæc rectius intelligantur; lubet exemplo quodam docere, quomodo per series infinitas inveniuntur approximationes in numeris quantalibet exactitudine, prouti plures vel pauciores terminos summare libuerit. Resolvuntur autem termini singuli in fractiones decimales per divisionem; quemadmodum fecimus in extractione radicum ex æquationibus per approximationem (§. 363 *Anal. finit.*). Ne autem

in numero cyphrarum quoto præfigendis aberres; tenendum est, tot præfigendas esse cyphas, quot numeratori cyphræ adjiciendæ, ut prima divisio succedat. Ex. gr. si fractio fuerit $\frac{1}{2}$, divisio non succedit nisi unitati adjecta cyphra. Quoto igitur præfigitur cyphra una, ut constet deficere integra, seu locum integrorum esse vacuum, & fractionem incipere a partibus decimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{40}$, divisio inchoari nequit, nisi numeratori 1 adjectis duabus cyphis. Unde liquet quoto præfigendas esse duas cyphas: id quod indicio est, fractionem decimalem incipere a partibus centesimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{112}$, divisio non potest inchoari, nisi tribus cyphis numeratori 1 adjectis: quoto igitur præfiguntur tres cyphræ, & fractio decimalis incipit a millesimis. Similiter si fractio fuerit $\frac{1}{112}$; quoto denuo adjiciendæ sunt cyphræ tres & fractio incipit itidem a millesimis. In casu tamen particulari dantur compendia singulos terminos per divisionem in fractiones decimales resolvendi, quando scilicet alii ex aliis jam inventis inveniri possunt. Quamobrem sumamus seriem pro circulo

$$\sqrt{192} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{15 \cdot 9} - \frac{5}{63 \cdot 9^2} - \frac{7}{143 \cdot 9^3} \&c. \right)$$

quam ex *Leibnitiana* deduximus (§. 242). Patet ex 192 extrahendam

Qq 3

esse

esse radicem in fractionibus decimalibus (§. 274 *Arithm.*), continuata operatione ad tot loca, quot visum fuerit. Quodsi hanc divides per 4, habebis $\frac{1}{4}\sqrt{192}$, consequenter numerum, a quo summa terminorum signo negativo affectorum subtrahenda venit. Dividatur jam eadem radix per 9, 9^2 sive 81, 9^3 sive 729, &c. ut habeatur $\frac{1}{9}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^3}\sqrt{192}$, &c. aut, quod perinde est, quotus anterior semper per 9, pro obtinendo proxime sequente. Porro numerus $=\frac{1}{9}\sqrt{192}$ multiplicetur per 3, & factum dividatur per 15, ita prodibit numerus respondens $\frac{3}{15.9}$
 $\sqrt{192}$. Similiter numerus $=\frac{1}{9^2}$

$\sqrt{192}$ multiplicetur per 5 & factum dividatur per 63, ut prodeat numerus $=\frac{5}{63.9^2}\sqrt{192}$; atque ita porro. Quodsi enim terminos hosce, in unam summam collectos, subtrahas a numero $=\frac{1}{4}\sqrt{192}$, relinquetur numerus peripheriæ circuli respondens, posita diametro 1. Cum sit $\sqrt{192} = 13.856406460551018348219$; erit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.464101615137754587055$ & porro, $\sqrt{192}$ per R designata & $\frac{1}{9}R$ per A, $\frac{1}{9^2}R$ per B, $\frac{1}{9^3}R$ per C, $\frac{1}{9^4}R$ per D & ita porro, sive $\frac{1}{9}R=A$, $\frac{1}{9}A=B$, $\frac{1}{9}B=C$, $\frac{1}{9}C=D$ & ita porro,

I.	5	3	9	6	0	0	7	1	7	8	3	9	0	0	2	0	3	8	6	9	1	=	A	
	1	7	1	0	6	6	7	4	6	4	2	6	5	5	5	7	8	2	0	7	6	=	B	
		1	9	0	0	7	4	1	6	2	6	9	6	1	7	3	0	9	1	1	9	=	C	
			2	1	1	1	9	3	5	1	4	1	0	6	8	5	8	9	9	0	2	=	D	
				2	3	4	6	5	9	4	6	0	1	1	8	7	3	2	2	1	1	=	E	
					2	6	0	7	3	2	7	3	3	4	6	5	2	5	8	0	1	=	F	
						2	8	9	7	0	3	0	3	7	1	8	3	6	2	0	0	=	G	
							3	2	1	8	9	2	2	6	3	5	3	7	3	5	5	=	H	
								3	5	7	6	5	8	0	7	0	5	9	7	0	6	=	I	
									3	9	7	3	9	7	8	5	6	2	1	8	9	=	K	
										4	4	1	5	5	3	1	7	3	5	7	6	=	L	
											4	9	0	6	1	4	6	3	7	3	0	=	M	
												5	4	5	1	2	7	3	7	4	8	=	N	
													6	0	5	6	9	7	0	8	3	=	O	
														6	7	2	9	9	6	7	6	=	P	
															7	4	7	7	7	4	1	=	Q	
																8	3	0	8	6	0	=	R	
																	9	2	3	1	8	=	S	
																		1	0	2	5	7	=	T
																			1	1	3	9	=	V
																				1	2	6	=	X
																					1	4	=	Y

Quodsi jam sit $a = \frac{3}{15}, b = \frac{5}{63}, c = \frac{7}{143}, d = \frac{9}{255}, e = \frac{11}{399}$ &c. continuata
 serie juxta legem progressionis, ut porro inveniantur valores $f, g, h,$ &c.
 sitque A. $a = \frac{3}{15 \cdot 9} \sqrt{192}, B. b = \frac{5}{63 \cdot 9^2} \sqrt{192}, C. c = \frac{7}{143 \cdot 9^3} \sqrt{192}$
 &c. prodibit

3	0	7	9	2	0	1	4	3	5	6	8	7	0	0	4	0	7	7	3	8	=	A.	a
	1	3	5	7	6	7	2	5	9	0	6	8	6	9	5	0	6	5	1	4	=	B.	b
		9	3	0	4	3	2	9	6	4	2	4	7	0	0	1	1	4	5	=	C.	c	
			7	4	5	3	8	8	8	7	3	3	1	8	3	2	5	8	4	=	D.	d	
				6	4	6	9	3	0	8	4	2	4	3	2	5	9	5	0	=	E.	e	
					5	8	9	4	8	2	7	0	1	7	4	7	5	3	9	=	F.	f	
						5	5	4	9	8	6	6	6	1	2	7	1	3	0	=	G.	g	
							5	3	4	9	1	3	8	2	9	9	2	5	2	=	H.	h	
								5	2	4	7	4	9	2	9	2	7	6	8	=	I.	i	
									5	2	1	9	1	0	8	8	0	5	8	=	K.	k	
										5	2	4	8	4	3	5	6	5	4	=	L.	l	
											5	3	2	5	8	2	1	0	7	=	M.	m	
												5	4	4	5	2	2	3	5	=	N.	n	
													5	6	0	2	9	3	9	=	O.	o	
														5	7	9	6	8	5	=	P.	p	
															6	0	2	6	0	=	Q.	q	
																6	2	9	0	=	R.	r	
																	6	5	9	=	S.	s	
																		6	9	=	T.	t	
																			7	=	V.	v	
																				9	=	X.	x
																				+	Y.	y	

3	2	2	5	0	8	9	6	1	5	4	7	9	6	1	3	4	8	5	9	2	Summa,
3	4	6	4	1	0	1	6	1	5	1	3	7	7	5	4	5	8	7	0	5	5

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6	3	Periph. Circ.
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	------------------

Series hæc cum numeris LUDOLPHI prorsus consentit: notæ enim ultimæ non habetur ratio, quia accurata non est, saltém dubia, propterea quod ignoratur, qualis sit proditurus, si calculus produceretur. Equidem calculus hic videtur admodum prolixus; quod si tamen quis eundem conferre voluerit cum calculo LUDOLPHI in Libro *de circulo & adscriptis*, facile intelligit, quanto *Ludolphinus* sit operosior & molestior. Immo

si quis seriem *Leibnitianam* in fractiones decimales resolvere vellet, multo prolixiore calculo haberet opus, antequam peripheriam circuli ad tot loca produceret.

§. 245. Quamvis autem ex allato exemplo abunde perspiciatur, quomodo seriebus infinitis sit utendum; non inconsultum tamen existimamus alterum adhuc addere exemplum. Si sinus arcus sit y , sinus totus seu radius circuli 1; erit arcus

$=y$

$$= y + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} Ay^2 + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} By^2 + \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7} Cy^2 + \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9} Dy^2 + \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 11} Ey^2 \text{ \&c. in infini-}$$

tum. Sit y sinus arcus 30° ; erit is $= \frac{1}{2}$; adeoque series degenerat in

$$\text{sequentem } \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} A + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 4} B$$

$$+ \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 4} C + \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9 \cdot 4} D + \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 11 \cdot 4} E \text{ \&c.}$$

in infinitum; consequenter si diame-
ter fuerit 1, eadem series exprimit
arcum 60° . Quodsi ergo terminum
primum ducas in 6, & qui hinc pro-

dit 3, in $\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ coefficientem secundi,

ut habeas $\frac{1}{8}$, obtinebitur series pro

$$\text{circulo } 3 + \frac{1}{8} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 4} B + \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 4} C$$

$$+ \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9 \cdot 4} D + \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 11 \cdot 4} E \text{ \&c. Neque}$$

enim hic opus est, ut termini singuli
multiplicentur per 6; quia sequen-
tem semper ingreditur proxime præ-
cedens; adeoque primus, qui est
sextuplus primi in anteriore serie,
terminos omnes sequentes. Non
igitur alia re opus est, quam ut $\frac{1}{8}$
resolvas in fractionem decimalem
12500000000000000, ut habeas
terminum secundum; hunc porro
ducas in $\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 4}$ sive $\frac{9}{80}$, hoc est, mul-
tiplices per 9 & dividas per 80, ut obti-
neas tertium 14062500000000000;

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

tertium vero ducas in $\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7 \cdot 4}$, seu mul-

tiplices per 25, & dividas per 168,
ut, prodeat quartus 20926339285
71428; & ita porro. Quodsi enim
terminos omnes addas, aggregatum
erit peripheria circuli, cum numeris
Ludolphinis consentiens. Sane si
quatuor saltem terminos addis, posita
diametro 10000, prout hic factum
esse vides,

$$3 \cdot 0000 = A$$

$$1250 = B$$

$$140 = C$$

$$20 = D$$

Summa 3. 1410

habebimus pro peripheria 3141,
cum nota ultima non sit accurata.
Reperitur adeo ratio diametri ad pe-
ripheriam ut 1000 ad 3141 cum *Lu-*
dolphinis numeris consentiens. Nisi
adeo fractiones decimales ad multa
loca extendere volueris, sed in pau-
cis numeris acquiescas, quemadmo-
dum fecere ARCHIMEDES, PTOLO-
MÆUS, alii; exiguo tantum calculo
opus est. Similiter brevi calculo
iidem numeri inveniri poterant ex
serie præcedente. Cum enim sit
 $\frac{1}{4} \sqrt{192} = 3.46410 \text{ \&}$

$$1.53960 = \frac{1}{2} R = A$$

$$17106 = \frac{1}{2} A = B$$

$$1900 = \frac{1}{2} B = C$$

$$211 = \frac{1}{2} C = D$$

reperietur ut ante (§. 244)

R r

30792

$$30792 = A. a$$

$$1357 = B. b$$

$$93 = C. c$$

$$7 = D. d.$$

$$32249 \text{ Summa.}$$

$$346410 = \frac{1}{4} \sqrt{192}.$$

314161 Peripheria circuli, in qua quatuor numeri 3141, ut ante, cum *Ludolphinis* consentiunt.

§. 246. Quod si resolutio serierum infinitarum hic data probe perpendatur; nullus dubito fore ut, in seriis ad usum aptandis, nihil posthac supersit difficultatis. Inprimis autem hinc perspicitur, quantum interfit, ut lex progressionis in infinitum sit manifesta; ne multo labore demum investigandi sint termini, quibus habemus opus, & ut termini sequentes inveniantur ex antecedentibus; sive id fiat per dependentiam eorundem a se invicem in formula generali, quemadmodum in exemplo altero (§. 245), sive id singulari quadam ratione contingat in casu particulari, quemadmodum in exemplo primo (§. 244). Intelligimus etiam quanta, in tractandis altioribus, attentione opus sit ad maxime vulgaria, ne ea eidem sese subducant, & per ambages incedamus, ubi brevior ducit ad scopum via. Ex. gr. notissimum est ex communi Algorithmi fractorum, si $\frac{1}{9}$ dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{9^2}$; si $\frac{1}{9^2}$ porro dividas per

9, quotum esse $\frac{1}{9^3}$ & sic porro in infinitum.

Enimvero, si in exemplo primo huc animum minime advertas, & $\sqrt{192}$ sive 13. 856406460551018348219 dividere velis per 9, per 9^2 sive 81, per 9^3 sive 279 & ita porro, operoso calculo invenies numeros A, B, C, D &c. qui, continua divisione antecedentis per 9, multo facilius eruuntur. Immo si quis una divisione terminum quemcunque resolvere vellet, v. gr. secundum $\frac{3}{15.9} \sqrt{192}$ sive

$\frac{3}{135} \sqrt{192}$, multiplicando scilicet

13. 85640 &c. per 3, & factum dividendo per 135; in ambages multo longiores incideret; adhuc longiores futuras, si terminus quilibet reduceretur ad pure irrationalem & ex eo extraheretur radix, veluti si fieret $\frac{3}{135}$

$\sqrt{192} = \sqrt{\frac{1728}{18225}}$ atque inde ex-

traheretur radix. Non existimandum est, talia inutiliter moneri: nisi enim ad ea animum reflectamus, ubi obvia sunt, attentioni nostrae sese subducent, ubi magis latent. Illustria dare poteramus exempla, nisi nostrum foret ab invidiosis abstinere, quae nulla necessitas imperat. Ad vitandam itaque ἀλλοτρίαν sedato opus est animo; ne appetitus influat in determinationem operationum intellectus, in qua nullae ipsius sunt partes. Distinctae notiones nullibi

nullibi negligendæ sunt, ubi earum participes fieri possumus; præsertim si quis philosophari constituit, & ad vitæ perfectionem tanquam ad scopum tendit. Diximus insuper, quam difficile sit de prærogativa formulæ unius præ altera statuere, nisi utriusque resolutione observatis omnibus, quæ observari possunt, facta. Sane si formula posteriore utaris pro circulo, & terminos resolutos sibi invicem legitime subordinas, & idem facias cum priori; videbitur posterior priori longe anteposenda. Enimvero si totam operationem in casu priori conferas cum tota in altero; præsertim ubi divisionem per novenarium transmutas in subtractionem (§. 116 *Arithm.*); longe aliter senties. Nolo addere plura, ne videar in levioribus commendandis nimius; præsertim iis, qui, cum in calculis consensescere decreverint, nec studii Matheseos utilitatem extra Mathesin quærant, illorum fructum prospicere nequeant.

§. 247. In capite de cubatione solidorum & complanatione superficierum tantummodo norandum est, quomodo elementa solidorum & superficierum eorundem inveniantur; & quomodo per calculum summatorium, eruta soliditate vel superficie corporis rotundi, investigentur per calculum literalem theorematum praxi inservientia. Inprimis hic attentionem meretur, quomodo solidum unum transformetur in aliud ipsi æquale. Ea cum facilia sint, pauca tantummodo

speciminis loco exhibuimus, cum unusquisque per se plura addere possit.

§. 248. Methodus tangentium inversa maximæ utilitatis est in sublimioribus, atque ideo maximam quoque meretur attentionem. Ejus saltem primas lineas duximus; ut nascatur methodi hujus idea in animis tyronum; ne hæsitent in problematis, quæ in Mechanica traduntur. Duo autem hic præ ceteris notanda sunt; primum quomodo constructio æquationum reducatur ad quadraturam curvarum simpliciorum & earundem rectificationem, ut appareat, quomodo solvantur problemata, supposita quadratura curvæ vel rectificatione arcus; deinde quomodo ex æquatione differentiali ad logarithmicam deducatur modus differentianti quantitates, quas logarithmi ingrediuntur (§. 243 *Anal. infin.*). Hujus enim usus insignis est in inveniendis logarithmis, tam numerorum vulgariū, quam sinuum, atque tangentium; quemadmodum capite sexto docetur. Eodem quoque artificio nititur calculus exponentialis, quem integra sectione tertia exposuimus, & constructio curvarum exponentialium, ope logarithmicæ, atque quantitatum, quas logarithmi ingrediuntur; cujus exempla dedimus capite altero hujus sectionis. Hinc verò elucet insignis lineæ logarithmicæ utilitas, quam nemo prævidere poterat, iis probe notanda, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Ratio-

nem jam dedimus in superioribus (§. 176).

§. 249. Artificia, quibus utimur in investigando modo differentianti differentialia (§. 297 *Anal. infin.*), eadem sunt, quæ ante adhibuimus ad investigandas regulas differentianti quantitates finitas, & quæ jam nobis innotuere in calculo literali, ubi algorithmum fractionum ex algorithmo integrorum, & algorithmum irrationalium ex algorithmo rationalium deduximus; ut adeo hinc appareat, quomodo quæ vulgaria videntur, haud raro profint ad altiora; & quam utile sit ad artificia, quibus utimur in facilioribus, animum attendere, ne impervia nobis videantur magis ardua. Cum Methodus determinandi puncta flexus contrarii curvarum non minus utilis sit, ad ductum curvarum representandum, quarum præter æquationem nihil novimus, quam methodus de maximis & minimis, & methodus determinandi puncta, in quibus curva rectam positione datam secat, quam in superioribus illustravimus; illa vero a calculo differentiali pendeat; eandem quoque exemplis nonnullis illustrare lubuit. Etsi enim curva integra nondum construi possit; ope tamen punctorum, quæ per eas methodos determinantur, ductum ejus imaginari licet. Exempla occurrent in Mechanica.

§. 250. In doctrina de evolutione curvarum, quam capite tertio

proponimus, notatu maxime dignum est, quod cyclois sua evolutione se ipsam describat (§. 350 *Anal. infin.*), cum hoc faciat ad perfectionem motus penduli, quo horologia automata ad maximam perfectionem perducuntur, quemadmodum in Mechanicis demonstratur. Sane ea ipsa permovit HUGENIUM, ut de evolutione curvarum cogitaret, sicuti ex egregio Mathematici summi *Tractatu de horologio oscillatorio* intelligitur. Notandum præterea, quod inserviat rectificationi curvarum, & ipsam curvedinem curvæ discernat; ut arcus circuli osculatoris pro arcu curvæ alterius in praxi substitui possit (§. 331 *Anal. infin.*). Applicatio calculi differentialis in hoc argumento nihil habet, quod non sit ex anterioribus manifestum. Hoc tamen adhuc attentionem meretur, quod determinatio radii osculi, seu evolutæ, interdum faciat ad theoremata selecta eruenda, quemadmodum exemplo logarithmicæ docemus (§. 332 *Anal. infin.*).

§. 251. Arithmetica infinitorum, invento calculo differentiali & summatorio, non amplius cum habet usum quem habere poterat, si is nondum fuisset inventus. Eam tamen prætermittendam esse non duximus; ne quod sit inventum, celebre inter recentiores Mathematicos nomen adeptum, quod a nobis non illustretur. Etsi autem pauca tantummodo de ea tradidisse videamur, plura ta-

men dedimus, quam in prolixo opere ISMAELIS BULLIALDI continentur. Eam illustrare voluerat JOANNES CHRISTOPHORUS STURMIUS in *Mathesi enucleata*; sed cum esset artificiorum recentiorum ignarus, quod sibi proposuerat non perfecit. Quæ de termino ultimo seriei continuatæ evanescente notanda sunt, satis perspicue exposuimus (§. 345 *Anal. infin.*), ut plura eam in rem annotari minime sit opus. Ratio, cur usum Arithmeticæ infinitorum extendi quasi in infinitum licuerit ultra terminos, intra quos a BULLIALDO coërcetur, in summatione

potentiarum & numerorum pyramidalium consistit, quam in Analyfi finitorum universali quadam ratione absolvimus (§. 200 & *seqq.* & §. 216). In Arithmetica enim infinitorum semioordinatæ curvarum spectantur tanquam in certa numerorum serie progredientium, veluti potentiarum dati cujusdam gradus in curvis parabolici generis (§. 349, 350 *Anal. infin.*). Unde analyfi ad analyfin Veterum propius accedente, quadraturæ curvarum quadrabilium deducuntur in Arithmetica infinitorum. Atque hoc artificium heuristicum notari meretur.

CAPUT V.

De Studio Mechanicæ.

§. 252. **M**echanica a Veteribus inventa fuit in usum machinarum: Veteres enim laudabili exemplo in theoria semper respiciebant ad usum in praxin; quippe cum in omni theoriæ genere intendenda sit praxis, quemadmodum in Philosophia sedulo inculcamus. Primas ejus lineas duxit ARCHIMEDES in libris de æquiponderantibus, nec ultra eos terminos progressi sunt Mathematici usque ad GALILÆUM. Quoniam machinæ omnes ex paucis quibusdam machinis simplicibus componuntur, quas potentias mechanicas appellare solent, nos machinas

simplices diximus; in Mechanica non considerarunt nisi machinas simplices, vectem, axem in peritrochio, trochleam, cochleam, planum inclinatum & cuneum, quarum theoriā amplissimā, sed nimis diffusam dedit VARIGNONIUS in opere posthumo. Considerarunt autem machinas hæc simplices in statu æquilibrii, in quo nonnisi adest conatus ad motum, quam vim mortuam vocat LEIBNITIUS; propterea quod sublato æquilibrio, dum potentia motrix augetur, nascitur motus diversæ celeritatis, pro diverso illius incremento, seu excessu potentia

motricis supra pondus movendum. Inde est quod, in agitandis machinis, non modo potentiae motrices conferantur cum pondere movendo; verum etiam ipsamet ad pondus ipsis æquale, & resistentiae in motu machinarum superandae ad pondus æquivalens reducuntur; quatenus potentiae cuilibet motrici, quoad effectum, substitui potest aliquod pondus, vi gravitatis, qua ad descensum urgeatur in machinam agens, seu eandem animans; & resistentiis superandis substituere licet pondus eandem potentiam motricem requirens, si elevari debet. Atque hæc probe notanda sunt tyronibus, ut & mentem Veterum plenius assequantur, & in applicatione theoriæ machinarum simplicium ad praxin, hoc est, ad machinas compositas explicandas nihil sentiant difficultatis. Patet hinc, quod LEIBNITIUS asseruit, Veteres nonnisi vis mortuæ notionem habuisse. GALILÆUS in *Dialogis de motu* ulterius primum progressus, & motum gravium descendendum, & projectorum explicare coepit, non infeliciter: eum vero in finem præmisit theoriæ motus æquabilis. Attingit etiam nonnulla de motu pendulorum, sed quasi obiter. Accuratus vero, & data opera, in eundem inquisivit HUGENIUS in *Tractatu de Horologio oscillatorio*, & theoriæ imprimis centri oscillationis superaddidit. Occasione motus pendulorum idem incidit in vim cen-

trifugam, quam in circulo ad examen revocavit, adjectis in fine *Tractatus de horologio oscillatorio theorematibus de vi centrifuga*, quorum demonstrationes demum publici juris factæ sunt in posthumis. Inde NEWTONUS vires centrales, tam centripetas, quam centrifugas considerare coepit etiam in curvis aliis, præsertim centripetis, & ad explicandum motum Planetarum theoriæ transtulit, in *Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis*. CARTESIUS, in *Principiis Philosophiæ*, leges motus ex percussione explicare aggrediebatur, sed non satis feliciter, cum ad veritatem liquidam perungere non potuerit. Postea vero WALLISTO, CHRISTOPHORO WRÉN & HUGENIO negotium feliciter cessit; quorum ille leges motus corporum non elasticorum, hi vero corporum elasticorum bene explicarunt. Quoniam autem motus corporum diminuuntur propter resistentiam medii, in quo moventur; in eandem quoque inquirere coepit WALLISIUS; deinde vero hoc argumentum ulterius prosecutus est NEWTONUS in *Principiis* modo laudatis. Denique, cum calculus differentialis esset inventus, & a Geometris præclaris, quos inter eminent BERNOULLII fratres, ad solutionem problematum physico-mechanicorum transferretur; descensus & ascensus corporum in lineis curvis expendi coepit. Atque sic tandem latissimus evasit

evasis Mechanicæ campus, qui arcûs nimium limitibus a Veteribus includebatur. Nos igitur Elementa Mechanicæ daturi, quæ satisfacerent, non minus inventorum antiquorum, quam recentiorum rationem habuimus. Hæc probe notanda sunt, ut idea quædam Mechanicæ animo concipiat, definitio rectius intelligatur, nec quisquam miretur, ubi viderit, in Elementis nostris Mechanicæ longe alia pertractari, quam quæ vulgo in libellis hujus nominis reperiuntur.

§. 253. Qui solam praxin mechanicam curæ cordique habent, ii, prætermisiss ceteris omnibus, ad caput decimum quintum statim digrediantur: in eo enim & sequentibus continentur, quæ ad machinarum intellectum faciunt. Quoniam nobis theoriam cum praxi semper conjungere proposuimus, potentiarum quoque motricium ad machinas applicationem, & machinarum usitatorum constructionem explicare volumus: quæ duo vulgo in libellis mechanicis negliguntur. A potentiarum motricium ad machinas applicatione pendet structura externa machinarum, quæ absque illa intelligi nequit; quemadmodum structura interna non intelligitur absque notitia machinarum simplicium. Libellatio vulgo in Geometria practica docetur: sed cum nos Geometriam practicam a theoretica non separaverimus; libellationis vero indispensabilis usus

sit in construendis molendinis, quæ aquarum vi agitantur; eandem quoque hic explicare visum fuit, ubi de applicatione potentiarum ad machinas agitur. Quoniam tamen ad machinas applicantur, quæ de æquilibrio solidorum c. 3, quod de centro gravitatis agit, demonstrantur in prima ejus parte, & quæ c. 4, de quiete & lapsu corporum gravium docentur; expensis definitionibus machinarum simplicium, addendæ sunt definitiones ac propositiones horum capitum, eo modo, qui ad primum cognitionis gradum acquirendum sufficit. Ubi vero animo satis comprehenderit, quæ ad machinas, tam simplices, quam compositas spectant; non inutile fuerit, si ceterorum quoque theorematum notitiam quandam tibi compares ex anterioribus, prætermisiss tantummodo problematis, quæ analytice solvuntur per calculum; ne ignores principia, quæ in praxi accuratiori usui sunt.

§. 254. Qui praxin mechanicam demonstratam expetit, ad secundum cognitionis gradum adspirans; cum addere debere demonstrationes per se patet. Non tamen ideo necesse est, ut omnis theoriæ campum emetiatur; sed sufficiunt ea, quæ ad intellectum machinarum faciunt. Quænam vero ea sint, facta demonstrationum cap. 15, contentarum analysis, eo quidem modo, quam in Logica (§. 922,) satis distincte explicavimus, & exemplis illustravimus, docet.

docet. Quodsi quis praxin ante hauserit, quam ad theoriam accedat, quemadmodum modo (§. 253) inculcavimus; ei haud difficile fuerit ea, quæ sibi usui sunt, discernere a ceteris, quæ insuper habere potest. Nec nocet, si vel maxime quædam addiscat, quorum in machinis usum nullum perspicit: neque enim solum fieri potest, ut in posterum usus quidam sese offerat, qui prævideri haud quaquam poterat; verum etiam omnis theoriæ tractatio certissimam spondet in firmandis ratiociniis mechanicis utilitatem, & menti acumen quoddam conciliat, ut perspicacius videamus aliis, in iis quæ ad machinas spectant. Acumen vero mechanicum, & prompta de machinis ratiocinatio, non nullius censeri debet momenti.

§. 255. Qui denique ad tertium cognitionis gradum aditum sibi parare gestit, is nihil eorum prætermittere debet, quæ in Elementis nostris Mechanicæ continentur; sed omnia potius accurata industria persequi tenetur; quemadmodum in superioribus in genere præcepimus. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, intendit habitum ex iis, quæ cognovit, inveniendi alia sibi adhuc incognita. Opus igitur habet principiis, quibus in ratiocinando utatur; opus habet artificiis heuristis, quæ data occasione imitetur. Quæ a nobis demonstrantur, vel analytice eruuntur, sunt principia, per quæ aditus

patet ad ulteriora. Resolutiones analyticae problematum, quas damus, continent artificia heuristica a lectore attento annotanda, vi perspicaciæ quam inculcavimus, cum de studio Algebrae ageremus. Atque ea ratio est, cur problemata physico-mechanica in casu particulari solverimus, in quo soluta a primis inventoribus; etsi subinde quoque docuerimus, quomodo problemata particularia ad universalitatem reducantur. Plus enim artis plerumque deprehenditur in solutionibus particularibus, quam in universalibus; multoque difficilius fuit primis inventoribus dare solutiones particulares, quam deinceps aliis, qui iisdem omnem universalitatem conciliare voluerunt. Quamobrem qui non ad pompam scripsimus, (levitate quadam animi in ambitionem adducti, quæ cum condonanda sit homini in lineis & calculis ætatem omnem consumenti, ob egregia in scientiam merita, in Philosopho tamen ferenda non est, qui non minus appetitum, quam intellectum, seu facultatem cognoscitivam perficere tenetur;) sed utilitatem discantis unice respicimus, ad quam tanquam ad metam contendimus; eundem quoque a via regia deducere non debuimus, quam calcarunt, qui ad inaccessa aditum pararunt; ut appareat, quomodo quæ impervia videntur, humano ingenio pervia redantur. In imprimis cognitu utilissimum, si non necessarium, dicendum iis

iis qui Artem inveniendi extra Mathesin exercere sibi propositum habent. Postquam enim abunde convicti sumus, quam necessarium sit, studio Matheseos etiam sublimioris, perficere intellectum, ut extra ejus pomoeria inoffenso pede progrediaris; hanc quoque utilitatem, vulgo non satis animadversam, etsi a multis commendatam, in conscribendis Elementis nostris intendimus, operamque dedimus, ne vana spe lactaremus lectoris animum.

§. 256. Enimvero non opus est, ut ad particularia descendamus: neque enim alia re opus est, quam ut ea, quæ superius de studio Matheseos in genere, & de studio præsertim Algebrae in specie, præcipimus, ad lectionem Mechanicæ transferantur. Quamvis enim hinc inde nonnulla scitu non inutilia annotari poterant; tantam tamen prolixitatem non fert præsens institutum; & qui per superiora ad ea, quæ sunt methodi, sufficientem attentionem, cum acumine, ubivis afferre didicit, perspicillis propriis usus animadvertet, quæ cum subterfugere non debent, nec manu ductione alterius indiget, qui firmo pede incedere valet. De duobus tamen artificiis, quibus utimur in Mechanicis, prorsus silere nefas est; propterea quod in Mathesi pura iisdem locus non est, in Philosophia tamen naturali, & in ipsa quoque morali, maximam utilitatem habent. Ut facilius intelli-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

gantur, quæ dicenda sunt; sumamus casum particularem. Gravia moventur in rerum natura per medium resistens, veluti per aërem, aut aquam. Enimvero in Mechanicis consideramus primo motum gravium in medio non resistente; qualis nempe foret, si nihil adesset, quod motum ejus quomodocunque impediret; seu quatenus a sola gravitate tanquam causa dependet. Ubi enim constat, qualis sit per se, nec difficile est postea quoque definire, quid per resistantiam medii detrahatur; ut intelligatur, qualis sit in medio resistente. Similiter in æquilibrio solidorum, pondera primum consideramus tanquam lineis gravitatis expertibus applicata; ut quale in se sit pateat. Deinde vero idem applicamus ad pondera ex gravibus suspensa, veluti longurione aut hasta quadam ferrea. Eodem prorsus modo, in Philosophia morali, appetitus sensitivus consideratur in se, independenter a rationali; deinde vero etiam, quatenus ab eodem dependet, & vice versa. Similiter appetitus spectatur ut dependens a solo sensu, deinde vero ut simul dependens ab imaginatione. Qui concursus plurium facultatum ad eandem actionem non distincte expendunt, ut sigillatim inquirant, quid ab unaquaque proficiscatur; nunquam ad veritatem liquidam pertinent; sed summa imis miscent; aut cœcutientes hæsitant, quid statuere debeant; & veritatem, vel nullam

S s

agno-

agnoscunt, vel eam rationi humanæ imperviam temere pronunciant. Deinde probe quoque notandum venit artificium, quo problemata physico-mechanica reducuntur ad Geometriam puram, ut per eandem solutio in potestatem redigatur: id quod in primis locum habet in transitu Geometriæ ad Physicam; ut tractare naturam mathematice liceat. Utile est hoc artificium in omni cognitione mathematica, qualis etiam locum habet in Psychologia, & in variis Philosophiæ practicæ capitibus; etsi hætenus de ea non cogitarint Mathematici; quippe principiorum philosophicorum ignari, nec Philosophi, qui subtilitates mathematicas a se alienas existimarunt. Erit autem tempus, quo, Philosophia nostro more magis exulta, cognitionem mathematicam ultra eos, intra quos hætenus coarctatur, terminos etiam ad talia provehent, in quibus quod locum habeat, hætenus vix sibi persuadere patiuntur. Quæ hic speciminis loco in medium afferuntur, excitare debent attentionem lectoris ad ea artificia, quibus methodus amplificatur, & quæ pauci in Mathesi imitantur in casu simili; extra eandem vero ut adhibeat nemo cogitat.

§. 257. In resolutione problematum physico-mechanicorum, id quoque considerandum est, utrum solvantur in hypothese naturæ, an vero in aliena. Illud obtinet, si quod sumitur in rerum naturâ, revera ita

fese habet; hoc autem, si minus. Exempli loco esto acceleratio gravium. Motum gravium continuo accelerari, experientia constat; nec minus liquet, naturæ conveniens esse, ut certa lege acceleretur. Quodsi, in solutionibus problematum de motu gravium, lex accelerationis sumatur, qualis obtinet in rerum natura; eadem in hypothese naturæ solvuntur. Si vero alia sumatur, quam quæ in rerum natura obtinet; eadem solvi dicimus in hypothese aliena. Geometriæ perinde est, in quacunque hypothese problema solvat, modo hypothesis non sit impossibilis, libera nimirum a contradictione. Enimvero in Physica non sunt usui nisi solutiones, quæ hypothese naturæ nituntur. Hinc qui nonnisi Geometram agit, problema solvit in omni hypothese possibili; Physico relinquens ut hypothese naturæ definiat, & ad eandem solutionem generalem applicet, vel ex pluribus particularibus eam seligat, quæ instituto suo convenit. Quod si dicas, solutiones in hypothese aliena nullius esse utilitatis; lubens concedo, si non de alia utilitate sermo fuerit, quam quæ in Physica locum habet; nego autem, si de utilitate simpliciter sermo fuerit. Neque enim destituitur suo in Mathesi pura usu; qualis est incrementum Artis analyticæ magni omnino faciendum. Non igitur contemnenda sunt magna Geometrarum molimina, quæ per se ad cognitionem natu-

ræ mathematicam nil conferunt. Sufficit enim detegi methodos, per quas ea in potestate nostra constituitur, quam primum hypotheses naturæ innotuerunt. Quid quod solutiones problematum, in alienis hypothesebus factæ, conducant ad illas investigandas; quatenus ad experimenta ducunt, de quibus alias non cogitare daretur. Quoniam principia Philosophiæ naturalis mathematica cognitioni naturæ mathematicæ inferuire debent; rigoroſe loquendo talia non sunt, niſi quæ hypothesebus naturæ nituntur. Et ſi certam deſideres cognitionem, hypotheses naturæ evinci debent, ne de earum veritate ullum ſuperſit dubium. Quoniam tamen indirecſte ad cognitionem naturæ mathematicam proſunt, quæ ex alienis quoque hypothesebus ducuntur, quemadmodum modo annotavimus; & in Phyſicam quoque admittuntur hypotheses philoſophicæ, etſi nondum certæ, probabilitate tamen non deſtitutæ, quatenus ad veritatem liquidam inveniendam viam ſternunt (§. 127 *Diſc. pralim.*); ſit ita, quod non ingredi debeant, tanquam principia, demonstrationem propoſitionum, quæ in Phyſicam tanquam dogmata admittuntur (§. 128 *Diſc. pralim.*); imprudens reprehenderit, quod principia Philoſophiæ naturalis mathematica dicantur, quæ ex hypothesebus alienis, & ex aliis, quas naturæ hypotheses eſſe nondum certo conſtant, deducuntur.

Ecquis propterea invideret titulum *Principiorum Philoſophiæ naturalis mathematicorum* celebratiſſimo operi Viri ſummi ISAACI NEWTONI; quo magno ſuo merito tantam nominis celebritatem conſecutus? Cauti tamen ac circumſpecti eſſe debemus; ne quæ, ob uſum quem indirecſte habent, principia Philoſophiæ naturalis mathematica tolerando ſenſu dicuntur, pro principiis proprie ac rigoroſe dictis habeantur: hoc enim cederet in detrimentum ſcientiæ philoſophicæ. Nemo igitur Philoſophus probaverit, ſi qui hypotheses *Newtonianas*, eas præſertim, quibus nonniſi in Matheſi locus conceditur, pro principiis Philoſophiæ naturalis ſumunt, & neſcio quam Philoſophiam *Newtonianam* exſculpunt; non modo Phyſicam cum Philoſophia, hoc eſt, cum genere ſpeciem, verum etiam cognitionem mathematicam cum philoſophica confundentes. Etſi in Virorum magnorum meritis extollendis liberales ſimus; non tamen eorum laudes in præjudicium veritatis producimus: id quod ne quidem in adulate ſerendum. Valet hic quam maxime tritiſſimum illud; Amicus Socrates, amicus Plato, amicus Ariſtoteles, ſed magis amica veritas. Ceterum notandum eſt, inter hypotheses alienas & hypotheses naturæ, dari genus quoddam earum intermedium, quæ non invita experientia, ob commoditatem praxeos, in locum

hypothesium naturæ assumi possunt, immo debent; ne præter necessitatem difficultatibus praxin immergas, quam simplicem ac expeditam esse oportet; & quas adeo convenienter admodum *Vicarias* dixeris. Exemplum habemus in motu gravium. Cum gravia vi gravitatis ferantur ad centrum terræ, in motu projectorum directiones sunt convergentes, utpote in centro Terræ concurrentes. Hypothesis adeo directionum convergentium, naturæ hypothesis est. Hoc tamen non obstante, recte cum GALILÆO in ejus locum surrogatur hypothesis directionum parallelarum; propterea quod in iis distantis, in quibus experimenta sumere licet, lineæ convergentes pro parallelis citra errorem assignabilem, in praxi inde metuendum, haberi possunt. Referendæ sunt hypotheses istæ vicariæ ad ea, quæ sunt toleranter vera; & quorum plurima in Mathesi occurrunt exempla, ex ea in Philosophiam minime inferenda.

§. 258. Quoniam in rerum natura nulla nisi motu contingit mutatio; Mechanica vero motus scientia est; ad quam etiam recte refertur status æquilibrii, quo sublato, oritur motus; dubium superesse potest nullum, quod Mechanicæ principia in explicandis naturæ phænomenis usum habeant. Quamobrem qui in usum Physicæ Mechanicam addiscit; definitiones ac theoremata de motu, & æquilibrio solidorum, cognita atque

perspecta sibi reddere debet. Quodsi demonstrationes difficiliiores videantur, quam ut eas capere possit; vel si tantum temporis impendere nolit, quantum iis percipiendis sufficit; satis erit, si historicam saltem cognitionem sibi acquisiverit, in eo cognitionis gradu acquiescens, quem supra primum diximus. Quando enim principia mechanica in Physica applicantur, non attenta demonstratione, sumuntur tanquam vera; adeoque quoad applicationem perinde est, siue demonstrationem animo comprehenderis, siue eam non attigeris. Absit autem, ut quis sibi persuadeat, nos Philosophum a demonstrationibus mathematicis arcere velle; quas non modo necessarias agnoscimus, ne sine convictione tanquam verum sumas, quod ad reddendam rationem phænomenorum naturæ applicas, consequenter ut certa tibi sit rerum naturalium cognitio; verum etiam quia habitus demonstrandi, omni modo perficiendus, ad recte philosophandum in Physica conducit; immo nec in eadem demonstrationibus geometricis semper supersedere licet, etsi cognitionem mathematicam a philosophica separaveris. Ceterum non inutile est præcipua theoremata mechanica, in eorum gratiam qui demonstrationes capere, vel non possunt, vel nolunt, experimentis comprobare; ut veritatem a posteriori agnoscant, quam a priori agnoscere minime valent: id quod in Physica tanto

tanto magis satisfacit, quanto plura in eadem assumenda sunt, nonnisi experientia fide. Profunt autem experimenta mechanica etiam Mathematicis, ut constet de rationis cum experientia consensu, tantoque magis exploratum sit, quod ratiocinando veritatem fuerint affecuti. Eadem commendanda sunt iis, qui solam praxin Mechanicæ curant, ne in reddendis rationibus sumere teneantur, sola autoritate aliena confisi, quæ nullo modo vera perspiciunt.

§. 259. Qui ad Mathesin sublimiorem adspirant, iis imprimis commendanda sunt, quæ in capite primo, usque ad decimum quartum inclusive, leguntur. Etenim iis familiaria esse debent theorematum de motu, quemadmodum theorematum de ratione quantitatum, & theorematum Geometriæ elementaris familiaria experiri debet, qui in Mathesi inoffenso pede progredi voluerit. Dedimus præterea problematum physico-mechanicorum solutiones, quæ Analyseos applicationem insinuant, qualis in Mathesi sublimiori requiritur; ut adeo artem doceamus per exempla, quemadmodum in Algebra fecimus. Quemadmodum adeo, cum de studio Algebræ ageremus, docuimus quomodo annotanda sint artificia in futurum usum, & hinc inde memoriæ infigenda theorematum, quæ analytice eruuntur; ita utrumque etiam quoad problemata in Mechanica soluta notandum. Prolixum nimis fo-

ret, si eadem industria, qua in explicando Algebræ studio usi sumus, hic quoque singula perlustrare vellemus. Quamobrem hoc propriæ lectoris ad superiora satis attenti meditationi relinquimus.

§. 260. Denique demonstrationes syntheticas analyticis miscuimus; cum ad utrumque genus præparare voluerimus lectorem nostrum. In demonstrationibus autem syntheticis accuratam servavimus formam, quam vi regularum logicarum habere debent: id quod facile experietur, qui easdem eodem modo resolvere voluerit, quo supra geometricas resolvere docuimus. Proposuimus quoque demonstrationes completas, ne quid divinandum lectori relinquatur; quemadmodum faciunt qui peritis scribunt; ac ideo citamus, quæcunque ex Arithmetica & Geometria elementari sumuntur; ne a studio Mechanicæ arceantur, qui Mathesin puram nondum adeo familiarem experiuntur, ut per se assequantur, quæ ex anterioribus supponuntur. Ac idem observamus in problematum analytica resolutione; ne quid desit, quod ad facilitandum eorum intellectum conducere possit. Neque enim hoc pacto solum consequimur, ut lector nostrorum Elementorum, absque multo laboris ac temporis dispendio, addiscat quæ discenda sunt; verum etiam ut meditationibus consummatis adsuescat, quibus in Philosophia, & superioribus, quæ dicuntur, Facultatibus opus habet.

CAPUT VI.

De Studio Hydrostatica, Aërometria & Hydraulica.

§. 261. **H**ydrostatica tota cognitu utilis iis, qui praxi Mechanicæ student. Sufficit autem iisdem primus cognitionis gradus. Enimvero ne sensus theorematum videatur obscurus, singula exemplis numericis illustranda. Ex. gr. Theorema 14, §. 55, hujus tenoris est: *Corpus specificè gravius, in fluido leviori, eam ponderis sui partem amittit, quantum est pondus fluidi sub eodem volumine.* Ponatur itaque corpus specificè gravius, quod aquæ immergitur, esse cubum, cujus latus unius pedis. Cum juxta MORLANDUM (§. 65) pes cubicus aquæ sit 70 librarum, cum 2 uncis; quodlibet corpus, aqua specificè gravius, amittet pondus 70 librarum & 2 unciarum. Quodsi ergo totum pondus fuerit 100 librarum; intra aquam suspensum non erit nisi 29 librarum, 14 unciarum. Siquidem veritatem principiorum hydrostaticorum a posteriori cognoscere volueris; facillime singula experimentis comprobari possunt, qualia descripsi Tomo primo Experimentorum idiomate patrio evulgatorum. Theoremata, quæ capite primo de corporum gravitate & levitate specifica leguntur, solis exemplis numericis illustrari suffi-

cit. Ex. gr. Theorema 1, §. 17; tale est: *Si duo corpora eandem densitatem habuerint; massæ sunt ut volumina.* Sumamus adeo duos dari globos plumbeos, quorum unus 5, alter 9 librarum. Quoniam massæ, seu quantitates materiæ, æstimantur pondere, quemadmodum in vulgus notum est; erunt etiam volumina, seu magnitudines horum globorum, ut 5 ad 9; nempe si magnitudo minoris divisa concipiatur in partes quinque æquales, istiusmodi partium 9 erit magnitudo majoris. Quodsi ergo magnitudo unius constiterit in mensura absoluta, veluti si detur in digitis cubicis Rhenanis; per regulam trium invenietur in eadem mensura alteræ. Istiusmodi exempla simul ostendunt theorematum usum, quem facere possunt, qui praxi operam dant. Erunt autem tanto utiliora, & tanto certiores spondent usum in praxi, si fuerint vera, numeris per experimenta definitis.

§. 262. Multum quoque usum habet Hydrostatica in Philosophia naturali; cum multorum phænomenorum inde reddatur ratio. Quamobrem si quis Mathematicum imperitus ad Physicam accedit, principiorum tamen hydrostaticorum ignarus esse

esse non debet. Consultum igitur est, ut primum saltem cognitionis gradum acquirat, eadem observans, quæ modo præcepimus (§. 258). Inprimis autem qui Physicæ operam navare decrevit, principia hydrostatica, experimentorum fide, tanquam vera amplecti, sibi que familiaria reddere debet. Experimenta huc facientia dabimus suo loco, quando ordo in Philosophia nos ad experimenta physica describenda, & principia quæ in scientia naturali usui sunt, inde stabilienda deducet. Quinam vero sit horum principiorum in Philosophia naturali usus, suo patebit loco, ubi eandem eadem methodo trademus, qua hætenus in Metaphysica usi sumus, & nunc in Philosophia practica utimur. Quod si quis in omni Mathesi fuerit prorsus peregrinus ac hospes, historicam tamen propositionum hydrostaticarum cognitionem acquirere valet, observans ea quæ de primo cognitionis gradu supra, capite primo docuimus, & breviter præcedente paragrapho annotavimus; modo sibi terminos quosdam perspectos reddat: id quod facile fieri poterit, si indicis auxilio evolvat definitiones, quibus explicantur; veluti quid sibi velit ratio composita, quid directæ, quid reciproca, qui termini in Arithmetica explicantur. Sane etiam Mathematicum imperitus terminis tamen mathematicis uti debet, quoties aliis verbis mentem suam commode ex-

primere non licet, seu quoties loquendum de iis quæ ad objectum Mathematicorum spectant; quemadmodum Physicus terminis Medicorum utitur, si de rebus ad Medicinam pertinentibus ipsi dicendum. Qui enim de re quadam loqui vult, nosse quoque debet nomen ejus.

§. 263. Equidem demonstrationes hydrostaticæ nihil prorsus habent difficultatis; præsertim si quis in anterioribus, multo difficilioribus, jam fuerit versatus; negandum tamen non est, quod, cum subsidio figurarum destituamur, quæ imaginationem juvant, termini generales, quibus hic utimur, eas reddant captu difficiliore, quemadmodum ipsas propositiones intellectu. Consultum igitur est, ut demonstratio applicetur ad casum particularem, quemadmodum fecimus in theoremate 14, §. 55, ubi pro corpore specificè graviore sumimus cubum pollicarem plumbeum, pro fluido leviori aquam; adeoque pro volumine cubum pollicarem seu digitum cubicum. Hoc pacto enim idea imaginationi suggeritur, qualem in Geometria sistit figura. Immo si ita visum fuerit, schema quoque delineari potest, quod cubum intra aquam in vase vitreo suspensum repræsentat. Neque vero verendum est, demonstrationibus hoc pacto detrahi suam universalitatem, & probato casu particulari, argumentando a particulari ad universale, colligi veritatem theorematis universaliter.

saliter enunciati. Etsi enim idea, ad quam dirigitur demonstratio, repræsentet casum maxime particularem; cum tamen in demonstrando non sumamus nisi universalia, quæ insunt, ut eodem successu particulare quodcunque aliud in illius locum surrogari possit; quod ex universalibus concluditur utique universale est. Sane in Geometria quoque, figura ad quam refertur demonstratio, singulare quid est, cujus idea particulare refert, v. gr. triangulum, cujus anguli sunt datæ magnitudinis, & latera in data quadam ratione. Enimvero cum non ex particulari, sed universali, quod idæ inest, procedat demonstratio; universalitati non officit, quod, dum intellectus concipit universale, in imaginatione hæret idea quædam singularis, quæ casum quendam particularem repræsentat, quoad ea quæ ipsius vi facile distinguuntur, nudo reflexionis actu accedente. Quamdiu in ratiocinando nonnisi vocabulis utimur, universalia ab imaginibus separare non licet; quippe quæ non intelliguntur, nisi quatenus universalia in singularibus, seu imaginibus, intuemur. Hæc satis aperta sunt iis, qui in Psychologia nostra fuerunt versati. Ceterum eodem artificio utendum est in Physica, siquidem demonstrationes facilitare volueris, quales hætenus dare neglexerunt Physici. Etsi enim hoc intenderit HONORATUS FABRY, qui in præfatione methodum sibi

optime perspectam, immo tritam affirmat; si tamen in iis, quæ mathematica non sunt, prætensas demonstrationes examines; quantum distideant a genuina earum forma, superiorum gnarus facile deprehendet. Eidem quoque artificio locus est in ipsa Philosophia præctica, si casum theorematis, vel problematis, exemplo quodam, sive vero, sive ficto, explices, quod imaginem quandam imaginationi præsentem sistit; & ad idem demonstrationem referas, quemadmodum in Geometria ad figuras; quatenus nempe in imagine, quæ exemplum repræsentat, attentionem non dirigis nisi ad universalia, quæ hypothesis theorematis vel resolutio problematis continet. Immo in ipsis Metaphysicis idem imitari licet; quidni debemus? quamdiu desideratur Characteristica generalis, vi cujus notiones abstractæ qualitatuum ab imaginibus separantur, & calculus qualitatuum a calculo magnitudinum utique diversus, quem literalem vulgo vocamus, ut characterum combinationes in locum ratiociniōrum succedant. In hisce enim continetur Algebra philosophica, cujus aliam prorsus ideam sibi finxit ROBERTUS HOOKE in Posthumis, & quam speciosam generalem appellavit LEIBNITIUS. Sed de hac dixi, quæ sufficiunt, ut intelligantur termini, in Psychologia empirica.

§. 264. Elementa Aërometriæ eo sine conscripsimus, ut specimine quodam

dam non admodum difficili doceremus, quomodo Mathesis ad experimenta applicetur; & ideam quandam cognitionis mathematicæ in Scientia naturali animo legentium insinuaremus; simulque usum Algebræ in Physica, exemplis non nimis difficilibus, demonstraremus. Cum postea Elementa Matheseos universæ ederemus, Aërometriad in numerum disciplinarum mathematicarum referre nulli dubitavimus; præsertim quia principiis ejus opus habemus in Hydraulica, quæ dudum inter disciplinas mathematicas locum obtinuit. Eodem nimirum jure, quo Hydrostatica, & Mechanica, immo etiam Optica, pro partibus Matheseos habentur; Aërometria quoque pars ejusdem habetur. Quamobrem facile patet, hanc Matheseos partem inprimis commendandam esse iis, qui Scientiæ naturali operam navare decreverunt; maxime ubi in cognitione philosophica subsistere non voluerint, sed ad mathematicam ascenden- di animum habuerint. Supponit autem Hydrostaticam, cujus principia ad aërem, tanquam fluidum grave, applicantur. Quamobrem illi studere ante debes, quam ad Aërometriad accedas. Supponuntur etiam pauca ex Mechanica, quemadmodum ex citationibus videre est. Etsi autem Aërometria potissimum ad cognitionem naturæ mathematicam manuducit tyrones; in genere tamen docet, quomodo Physica me-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

thodo demonstrativa tractari debeat; quatenus in ea etiam continentur, quæ absque principiis mathematicis demonstrantur. Discimus præterea ex ea, quamvis in reliqua Philosophia cognitio philosophica a mathematica separari possit, in Physica tamen, nisi certitudini deesse velis, fieri non posse, quin subinde nonnulla ex principiis mathematicis demonstrantur.

§. 265. Quibus sola praxis satisfacit, illis inservient problemata de antiæ pneumaticæ, barometrorum, thermometrorum, & hygroskopiorum constructionibus, una cum scholiis, quibus horum instrumentorum usus dilucidatur. Non tamen negligenda sunt theoremata & corollaria, quibus tum fabrica, tum usus istorum instrumentorum perfectius intelligitur. Definitiones quoque expendendas esse per se patet. Cum in Elementis Matheseos Germanicis ea potissimum tradiderimus, quæ ad praxin faciunt, etsi oculatam, non omissis scilicet demonstrationibus; ex Aërometriæ quoque Elementis ea excerpimus, quæ praxin propius respiciunt, & ad theoriam uberiores præparant lectorem ex Latinis deinceps hauriendam.

§. 266. Inprimis autem Aërometria inservire potest illis, qui ad tertium cognitionis gradum contendunt. Si enim animum ad ea attendunt, quæ sunt methodi; ideam quandam exemplarem applicationis Matheseos puræ, Algebræ præsertim, ad ex-

T t

peri-

perimenta & observationes inde haurient; ut in cognitione rerum naturalium certo tramite progrediantur. Multo enim clarius etiam tyrones hinc perspiciunt utilitatem cognitionis mathematicæ, tum ad certitudinem in Scientia naturali consequendam, tum ad praxin accuratissime exercendam, quam ex sublimibus istis problematis Physico-mechanicis, qualia in Mechanica complura explicavimus. Quamobrem cum pauca sint, quæ ex mechanicis in Hydrostatica & Aërometria sumuntur, demonstrandi principia, non inconsultum erit, si qui ex Mechanica tantummodo principium de æquilibrio solidorum perspexerunt, sepositis ceteris, ad Hydrostaticam & Aërometriam statim se conferant. Quod si enim, in hisce disciplinis intellectu non adeo difficilibus, applicationem Matheseos puræ, & Algebrae imprimis, ad Naturæ cognitionem didicerint; minus difficultatis experientur in sublimioribus, quæ in Mechanica traduntur. Non est quod objicias, Elementa Matheseos cum sint in tyronum gratiam conscripta, ut scientiam inde hauriant, in iis quoque faciliora difficilioribus fuisse præmittenda, adeoque Elementa Hydrostaticæ & Aërometriæ Elementis Mechanicæ fuisse anteponenda. Etenim methodus studendi non per omnia consentit cum methodo tradendi disciplinas, & eas sibi mutuo subordinandi, atque in singulis veri-

tati unicuique locum suum assignandi. Nimirum qui in scientiis operam navat a facilioribus incipit, & inde continuo ad difficiliora progreditur; quam legem præscribit methodus studendi. At disciplina integræ, & in iis veritates singulæ eo ordine collocandæ, ut sequentia ex antecedentibus intelligi & demonstrari possint. Non autem semper contingit ut disciplina, quæ continet intellectu faciliora, non dependeat ab alia, in qua occurrunt multo difficiliora. Unde methodo studendi convenit, ut difficilia initio seponantur, & ad faciliora properetur. Immo hac de causa, in gratiam primorum tyronum, conscribuntur compendia; in quibus nonnisi facillima & scitu maxime necessaria continentur; ut animum imbuant principiis, & ad profundiora haurienda præparent. Memini me olim cum disciplinis operam navarem, iis quæ captu difficilia videbantur non immoratum fuisse, sed ad sequentia progressum, si vel maxime eorum veritas ab istis penderet: quando enim postea, sequentibus intellectis, ea denuo expendebam, sine ulla mora obvium erat, quod antea impervium videbatur. Nec ignoro rationes, cur hoc contigerit, quippe quas Psychologia supeditat, quas tamen hic commemorari parum refert. Absit itaque, ut, ubi quædam a te percipi non posse tibi videtur, de viribus tuis desperans, efficiaris studii desertor.

Nocet

Nocet non minus desperatio, quam nimia de viribus suis confidentia; nec ardor sciendi, qui accendere debet cupiditatem discendi, producendus in nocumentum.

§. 267. Hydraulica olim machinarum hydraulicarum & fontium salientium constructione tota absolvebatur, atque adeo non erat nisi pars Matheseos practica. Enimvero, postquam theoria Mechanicæ ad omnem motum solidorum fuit extensa; in Hydraulica quoque in motum fluidorum inquirere cœperunt Geometræ. Unde hæc Matheseos pars longe aliam induit formam; qua etiam sese commendat Theoristis, quibus nauseam movet praxis; ne quid commune habere videantur cum hominibus, quibus natura manus loco ingenii dedisse censetur. Nos & theoriam, & praxin æstimamus; quamvis non eodem, sed suo unamquamque pretio, ut utrique suus habeatur honor. Quamobrem in Hydraulica quoque praxin cum theoria copulavimus, nec hanc illa dehonestari opinamur. Etsi enim Mathematicus, Geometra præsertim profundus, qui arduis meditationibus sufficit, longo intervallo post se relinquat machinarum fabrum, & hic perperam pro Mathematico habeatur; non tamen ideo praxis contemnenda; quin potius Geometra profundis suis meditationibus hunc fructum deberi agnoscere debet, ut illa perficiatur. Ex Hydraulica facillime perspicere

licet, quod auxilio Geometrarum indigeant, qui praxi operam navant. Exempli loco esto determinatio situs alarum molendini vi venti agitandi (§. 316 & seqq. *Hydraul.*). Quod si non deessent, qui inventa Geometrarum profunda ad praxin communem aptarent, illud adhuc magis pateret. Dolendum vero, quod nemo ea de re cogitare velit.

§. 268. Qui soli praxi operam navant, iis sufficit, ut distincta notione constructionem machinarum hydraulicarum & fontium salientium animo concipiant. Non tamen inconsultum est, ut theoremata quoque, sive synthetice demonstrata, sive analytice investigata, percurrant; visuri num in iis quid contineatur, quod praxin juvet. Idem quoque facere tenentur, ubi praxin desiderant oculatam, hoc est, rationem quandam eorum perspicere volunt, quæ faciunt; ne subinde cœcutientes in praxi aberrant. Exemplum illustre habemus in siphonibus, quos aquis per montium vertices in oppositam planitiem deducendis sufficere existimarunt, qui causam ascensus in crure breviori ignorarunt (§. 68 *Hydraul.*). Istiusmodi exemplis convincendi sunt, qui theoriam omnem contemnunt, quantum sibi noceant, si ne historicam quidem ejus notitiam sibi comparare velint. Quamobrem in genere suademus, ne illi, quos praxis juvat, theoriam Matheseos

prorsus negligant, sed primum cognitionis gradum suum esse credant. Ipso nimirum usu experientur, quænam hinc utilitas in eos sit redundatura.

§. 269. Theoria non modo Hydraulicæ, verum etiam praxis multa continet, quæ usui esse possunt in Physica. Quamobrem si quis, vel maxime se minus aptum sentiat ad demonstrationes & resolutiones analyticas capiendas, qui Scientiæ naturali incumbere decrevit; ei tamen maxime commendanda est historica saltem Hydraulicæ cognitio. Enimvero quia in Scientia quoque naturali methodo demonstrativa utendum, si certitudinis metam attingere velis, quantum datur; consultius omnino est, ut demonstrationes quoque expendat. Et qui Mathesin ad Physicam applicare voluerit; ei huic instituto non minus inservire poterit Hydraulica, quam Aërometria; ut, quæ paulo ante de hac dicta sunt, ad hanc quoque applicanda veniant.

§. 270. Hydraulica autem, sive theoriam, sive praxin spectes, attentionem eorum meretur, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Ubivis enim annotare licet artificia heuristica, quibus felicissime usi sunt, aut uti saltem potuerunt inventores veritatum tam theoreticarum, quam practicarum. Cum de Algebrae stu-

dio ageremus, ad nauseam forsan inculcavimus, quæ attentione artificia ista sint detegenda, ut in casu simili posthac iisdem utaris. Quamobrem nolumus hic ad particularia descendere; sed nobis sufficit monito generali excitasse attentionem, quam afferre debent, qui Artem invenendi curæ cordique habent. Ne tamen quis existimet, laudari artificia, quæ in Hydraulica non reperiuntur, singularia; exempli loco ad unum provocare licet; nimirum quo ad mensuram reducuntur, quæ mensuram respuere videntur. Obtinet hoc in doctrina de cursu fluminum; ubi, cum aqua omnis per totam sectionem non eadem celeritate fluit, aquæ per eandem fluenti tribuitur celeritas quædam media, qua si per totam sectionem flueret, eodem tempore tantundem per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur; & quomodo media ista celeritas inveniri possit docetur. Ceterum ex superioribus abunde constat, nos ubique in studio Matheseos urgere distinctam eorum cognitionem, quæ actu reflexo intellectus detegenda præcipimus; cum id maxime conducatur ad recte philosophandum: quem finem intendimus, dum in studio Matheseos, intellectus perficiendi causa, versamur.

CAPUT VII.

De Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ.

§. 271. **I**N Optica strictiori sensu sumpta pauca occurrunt, quæ ad praxin faciunt. Præter ea enim, quæ de camera obscura (§. 79 *Opt.*) & de quadrato geometrico ejusque usu (§. 172 & *seqq. Opt.*) & tessellatis imaginibus construendis (§. 312 *Opt.*) docentur, nonnisi problemata nonnulla de magnitudine visa *cap. 5.* & theoremata nonnulla de lumine Solis per foramen angustum radiante *cap. 6.*, praxin directe respiciunt. Palmaria praxis Opticæ directæ in Perspectiva continetur. Quoniam tamen indirecte omnia, quæ de visu demonstrantur, usui esse possunt, qui praxi catoptrica & dioptrica delectantur, & quos exercitia Perspectivæ juvant; non male sibi consulunt, qui, si non omnium, præcipuorum tamen theorematum opticorum cognitionem historicam acquirere student.

§. 272. Qui ad Physicam animum appellant, iis studium Opticæ maxime commendandum. Non tamen sufficit nuda ejus cognitio historica, quam iis commendavimus, qui praxi student (§. 271); sed requiritur scientifica, quæ non sine accurata demonstrationum evolutione acquiritur. Visus phænomenon na-

turæ est; ad objectum adeo Physicæ, rerum naturalium scientiam, referendum. Nec minus lumen, umbra, & colores ad idem spectant, quæ hic tanquam visibilia considerantur. Etsi enim, in Mathesi, potissimum ratio habeatur cognitionis mathematicæ; ut tamen hæc in potestate sit, multa declarantur, quæ explicare Physici est; quemadmodum & modum visionis Physicus explicare debet. Quodsi ergo, in Optica, ea animi attentione utaris, quam hætenus in ceteris disciplinis mathematicis commendavimus; ex hac Matheseos parte discere licebit, quomodo res naturales sint explicandæ, ut certam earum cognitionem acquiras. Dum vero Geometria elementaris applicatur ad phænomena visus accurate determinanda; Optica prima & facillima cognitionis mathematicæ rerum naturalium exempla exhibet. Quamobrem si quis nullam adhuc hujus cognitionis habeat ideam, is omnium facillime ex Optica eandem hauriet. Unde suademus, ut, quamprimum principiis Arithmeticæ, & Geometriæ elementaris, ac Trigonometriæ planæ imbutum habet animum, ad lectionem Opticæ accedat; intellectu multo faciliorem, quam Mechanica, Hy-

drostatica, Aërometria, & Hydraulica, ac præterea jucunditate sua animum lectoris in se trahentem. Accedit quod ex Optica etiam innotescant fallaciæ visus, a quibus sibi cavere debet Naturæ scrutator, ab observationibus inquisitionem omnem exordiens.

§. 273. Cum Perspectiva sit praxis Opticæ directæ, qua docetur delineatio objecti cujuslibet in tabula, quale, ad datam distantiam, & in data altitudine oculi, super tabula transparente inter ipsum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta, apparet (§. 1 *Perspect.*); qui solam praxin curant, schemata juxta ea, quæ in singulis problematis præcipiuntur, delineare, & deinceps in aliis figuris delineandis imitari debent. Quodsi quis in Architectura fuerit versatus, exempla quoque inde petere potest, ac debet. Exercitia hæc facilitabis, si Anonymi Galli *Perspectivam practicam*, cujus supra in recensione Autorum c. 8, §. 23 mentionem injecimus, in subsidium adhibeas, & deinde exempla ex ANDRÆA PUTEI *Architectura Pictorum & Sculptorum* (§. 24 *cap. cit.*) petas. Satisfacient ubivis regulæ, quas dedimus. Hic labor continuandus, donec habitum consequaris. Nemo autem non videt, Artem pictoriam cum praxi Perspectivæ esse conjungendam. Hæc enim ad illam perficiendam unice tendit. Qui vero nonnisi scientiam expetunt, iis sufficit demon-

strationes praxium percepisse, quas in usum potissimum Philosophorum addidimus; quorum cum sit rationem reddere eorum quæ sunt atque fiunt, rationem quoque perspicere debent delineationum objecti cujusunque juxta regulas Perspectivæ factarum. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, iis notandum est artificium, quo tota Perspectiva in potestatem Geometræ redacta (§. 2 *Perspect.*), & praxin mechanicam eodem fundamento nixam, quam problemate primo exposuimus, conferant cum regulis geometricis, quæ in sequentibus problematis exponuntur; ut applicatione Geometriæ praxis perficiatur, & certa scientia eorum acquiratur, quæ nonnisi confuse percipiuntur. Eodem fine conducunt, quæ de anamorphosis capite ultimo proponuntur.

§. 274. Catoptrica phænomena visionis reflexæ demonstrat, quæ fit ope speculorum. Specula communissima sunt plana, quorum ideo usus ceteris præfertur, quia objectum ea forma & magnitudine spectandum exhibent, quale & quantum est; ut adeo teipsum videre ac contemplari possis. Visio reflexa variat pro diversitate superficiæ reflectentis: unde alia sunt speculorum planorum, alia concavorum, alia convexorum, alia ex hisce compositorum phænomena. Cumque figuræ concavæ ac convexæ in infinitum varient, phænomena quoque in infinitum variare debent.

debent. Artifices hæcenus parare nequeunt nisi specula plana, convexa sphærica, cylindrica, & conica, concava sphærica, & cylindrica; prismatica enim & pyramidalia ex planis componuntur. Quamobrem contenti sumus horum speculorum phænomena demonstrasse, quæ ante experientia innotuisse, quam via demonstrationis in eadem inquisiverint Mathematici, facile largior. Fuere tamen artifices, qui specula parabolica conficere conati sunt. Unde horum quoque mentionem quandam injicere voluimus. Etsi autem specula plana sint quotidiani usus, ex eorum tamen combinatione, pro diverso ad se invicem situ, inexpectata prorsus prodeunt phænomena; quæ non modo delectant, sed ignaros quoque in admirationem rapiunt, non sine delectationis incremento. Inserviunt etiam variis technasmatis specula cetera; quæ, etsi ad delectandum fuerint excogitata, seriis tamen inserviunt meditationibus Philosophi, quippe naturam imitantis, quæ serio agere solet, etiam dum pueri ludunt. Quamobrem nec piguit technasmata ista variis speciminibus illustrare. Et quoniam in omni Mathesi praxin cum theoria conjunximus, idem quoque fecimus in Catoptrica. Qua de causa, non modo explicavimus technasmata, quæ ex theoria Catoptricæ demonstrantur, & adeo a priori deducuntur; verum etiam modum specula conficiendi: neque enim solum

dedecet Mathematicum ignorare, qua arte prodeant specula, quorum phænomena demonstrat, etsi in demonstrationibus sumere possit ac debeat speculorum figuram; verum etiam hoc nosse utile est, ubi theoremata a se demonstrata per experientiam ad examen revocare voluerit. Quoniam nimirum in demonstrationibus suis supponit in rigore geometrico figuras speculorum; si de consensu demonstrationum & experimentorum judicium exactum ferre voluerit, nosse utique debet, ad quam perfectionem ars perducta fuerit, & num ea perfectionem ulteriorem recipere queat. In Mathesi mixta plurimum tribuimus connubio experientiæ ac rationis; quo consensus experimentorum & demonstrationum innotescit, & quod tantopere commendamus per universam Scientiam naturalem. Nihil adeo prætermittendum erat, quod eo ducere poterat.

§. 275. Qui adeo solam praxin amant, illis satisfaciunt problemata, prætermittis demonstrationibus. Non tamen prætermittere debent theoremata, cum historica eorundem cognitio æquipolseat recensitioni phænomenorum: si qua enim sunt, quæ non nisi in usum demonstrandorum aliorum afferuntur, ea facile a ceteris distinguunt. Nimirum consultum est, ut theoremata experimentis subijciant; ne omni prorsus certitudine destituatur cognitio: tumque pate-

patebit, quænam sint ea, quorum cognitio scitu necessaria ac utilis, etiam iis quos sola praxis juvat. Quid quod in numero quoque theorematum sint haud pauca, quibus in praxi locus est, aut quæ ad praxes transferri possunt. Exempli loco esse potest theorema 11, §. 71, vi cuius §. 73, exhibetur globus descendens in plano inclinato tanquam ascendens in verticali. Catoptrica praxi abundat, atque hoc nomine sese commendat omnibus, quotquot eandem amant, iis præsertim qui quærunt, quod delectat.

§. 276. Inter specula inprimis sese commendant sphaerica concava; non solum propter phænomenorum prorsus singularium raritatem; verum etiam quod sint caustica, seu ustoria, & lumini intendendo inserviant. Specula caustica præsertim majora usum habent in experimentis physicis, qualia describuntur in schol. 4, probl. 22, §. 221, immo phænomena omnia visionis reflexæ argumentum physicum sunt, quorum adeo rationes Physicus reddere tenetur, etiamsi geometricas insuper habeat demonstrationes. Physicus phænomena sumit tanquam a posteriori cognita, & eorum rationem reddit. Mathematicus illa demonstrat, ex supposita speculi figura; vi legis reflexionis, ea deducens a priori, tanquam incognita ex cognitis. Atque adeo diverso prorsus modo suo funguntur munere: quod dum uterque facit, manifesta est differentia, quæ inter

cognitionem philosophicam & mathematicam, hac in parte, intercedit. Ut autem certius constet Physico, quid sumere liceat, theoremata & technasmata catoptrica eum docent. Quemadmodum autem Optica patefacit fallacias visus circa visionem directam, quas utiliter cognoscit Physicus, immo Philosophus in aliis quoque Philosophiæ partibus; ita Catoptrica revelat fallacias visus circa visionem reflexam, non minore utilitate agnoscendas. Atque adeo patet, quomodo in studio Catoptricæ versari debeat Philosophus, qui ab omni cognitione mathematica alienum habet animum: quem etsi non probemus, tolerandum tamen censemus, pro diversitate ingenii humani; quantum absque detrimento scientiæ fieri potest. Ceterum quæ de cognitione mathematica quoad visionem directam modo annotavimus (§. 272); ea etiam de eadem quoad reflexam notanda veniunt.

§. 277. E re esse videtur, ut præjudicio occurramus, quo nonnulli sibi mirifice placent, & cui alii applaudunt, quasi singulare quoddam acumen proderet. Diximus paulo ante (§. 274), nos facile largiri, quod phænomena speculorum innotuerint a posteriori, antequam de iis a priori demonstrandis cogitarent Mathematici. Non adeo dubito fore haud paucos, qui contentent demonstrationes mathematicas superfluas

fluas esse; immo qui hinc inferent inventa, quæ in Mathesi mixta celebrantur, deberi artificibus; a quibus postquam inventa fuerant, ea demum demonstrare conati sunt Mathematici, inventionis tamen gloria inter alios eruditos eminere gestientes. Memini hoc argumento arrogantiam Mathematicorum redarguere voluisse CLERICUM, cum HERMANNI Phoronomiam recenseret. Qua de causa desiderabat, ut Geometra præclarus significaret, quantum Scientia naturalis, & Ars facta sit locupletior, postquam abstrusas istas theorias orbi literato in opere suo propinasset. Artifices enim pro inventoribus habebat; Mathematicos vero demonstratores pronunciabat; qui nonnisi in artificum inventis ingenii sui vires exerceant. Non unum est, quod hic repono. Phænomena, ipsi etiam vulgo cognita, sumit Physicus & eorum rationem reddit: non tamen ideo inanis censetur ejus opera; propterea quod illa ante innotuerint quam de rationibus eorundem reddendis cogitavit Physicus. Ecce ergo inanem operam sumere, aut nihil præclari facere dicendus est Mathematicus, qui longe ulterius progressus, phænomena non sumit, sed ex iis, quæ sumi debent, via demonstrationis a priori deducit; ut certa sit etiam ejus cognitio, qui existentiam phænomeni nondum supponit? Notandum præterea est, phænomena haud raro a posteriori non satis deter-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

minate cognosci, quæ tamen accuratissime determinantur a Mathematico in suis theorematis. Accedit porro, quod Mathematicus non omnia phænomena jam ante norit, quam ea demonstrat; sed multa potius adhuc ignorata in apricum producat. Denique inventa, quæ haud raro casui debentur, imperfectiora ad majorem perfectionem perducit; aut, siquidem ulteriorem perfectionem non admittunt, ut idem certo constet demonstrat. Quid, quod hinc inde a priori quoque deducat technasmata, quæ tentando nondum fuerunt detecta, aut prorsus non potuissent detegi? Absit autem ut tibi persuadeas ea, quæ casu plerumque aut tentando reperta fuerunt, perficere minoris esse, quam illa reperire. Non semper valet illud pervulgatum: Inventis facile est addere. Inventa nondum æstimare didicit, qui ea aliunde quam ex usu facultatum, cui debentur, æstimat. HUGENIUS, qui horologia singulari pendulorum applicatione perfecit, longo intervallo post se relinquit primum eorundem inventorem; & demonstrationes, quas de tubo optico dedit in *Dioptrica*, multo majorem laudem pariunt, quam fortuita imperfecti inventio. Ut inventa, quæ casui accepta referenda sunt, vel tentaminibus laboriosis, perficiantur, inventis haud raro opus est, non sine summo acumine & maxima ingenii vi eruendis. Plurimum adeo falluntur, inventionis

V v

gloriam

gloriam non deberi nisi iis, qui primi in quidpiam inciderunt. Sed hæc evidentiora erunt, ubi Ars inveniendi eodem habitu fuerit investita, quo Logicam indutam dudum in scenam produximus; ut ex arte æstimare detur artificem; non vero, quemadmodum nunc plerumque fieri solet, ex eo, quod inventum ejus sit utile, vel quod sit inexpectatum, vel quod aliis fuerit inaccessum, vel quod in admirationem rapiat ignaros & ita porro.

§. 278. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, reperient in Catoptrica, sive theoriæ species, sive praxin, quæ Artem inveniendi illustrant & amplificanc; ubi in artificia inquirere voluerint, quibus aditus paratur ad ea, quæ inaccessible videbantur. Neque eum, qui in Physica feliciter progredi voluerit, ubi non minus applicatione Matheseos puræ ad phænomena naturæ, quam connubio experientiæ ac rationis opus est, pigebit eo modo perlustrasse Catoptricam, quem ad tertium cognitionis gradum acquirendum supra præscripsimus, & cum de studio Algebrae ageremus exemplis illustravimus. Quoniam vero nobis quoque propositum est usum Algebrae in Mathesi mixta ostendere; placuit sub finem adjicere Catoptricam analyticam, seu modum investigandi theoremata catoptrica per Analysin. Substituimus autem in iis speculis, quorum antea phænomena demonstravimus, more Veterum; tum ne

tyrones universalitate ipsis inutili perplexi reddantur, tum quia solutiones particulares occasionem dedere universalibus in omni curvarum genere. Discentium enim, quibus scribimus, ratio habenda fuit.

§. 279. Erunt forsân, qui, cum viderint, Algebrae beneficio, nullo fere negotio patere, quæ more Veterum non sine multo apparatu demonstrantur; demonstrationes syntheticas inutiles existimabunt, immo prorsus damnabunt. Recolenda animo hic sunt, quæ supra (§. 100 & seqq.) monuimus, cum de studio Matheseos intellectus perficiendi causa ageremus; quem inter usus præcipuos referimus studio mathematico tribuendos, & qui multo latius patet quam usus reliquus omnis. Quamobrem qui hac intentione ad studium Matheseos animum appellant, iis omnino maximopere commendandum, ne demonstrationes syntheticas negligant, etiam in Catoptrica, & demonstrationes catoptricas eadem industria resolvant; ut pateat earum forma in Logica præscripta, qua demonstrationes Geometriæ elementaris resolvi præcepimus; ut non modo idea exemplaris demonstrationis consummata, quam in Logica vocamus, reddatur illustrior, magisque indies confirmetur, verum etiam ut habitus juxta eam operandi in omni scientiarum genere perficiatur. Pudeat enim Philosophos, seculo tam illustri, quo scientiæ

tix mathematicæ ad tantum fastigium evectæ, diutius in ancipiti hære, &, dum Mathematici plena luce fruuntur, in tenebris palpitare.

§. 180. Dioptrica praxi multa abundat. Agit enim de visione refracta, cujus multus usus est in spectandis objectis remotis & vicinis exiguæ molis; quorum illa, ob distantiam, hæc vero, ob parvitatem, oculis sese subducunt. Hinc, in hac parte Matheseos mixtæ, præcipue agitur de tubo optico, & microscopio. Tubi non minus optici, quam microscopia, componuntur ex vitris lenticularibus arte parandis. Atque adeo ad praxin dioptricam spectat quoque ars poliendi vitra, quam adeo integro capite accuratissime explicavimus. Quoniam tubus opticus maximam utilitatem affert in observationibus astronomicis, ita ut sine ejus auxilio Astronomia nondum ad eum perfectionis gradum fuisset perducta, ad quem eam hodie evectam cernimus; accurata lentium fabrica ipsis quoque Mathematicis curæ cordique esse debuit. Quamobrem non mirandum, Mathematicos etiam summos, veluti HUGENIUM, vitris poliendis operam dedisse, nec eos piguisse praxin manuariam exercere; etsi in theoria augenda & amplificanda inter paucos eminerent. Ad praxin dioptricam spectant quoque perspicilla, quæ quomodo Myopes & Presbytas juvent in videndis iis ad quæ oculorum acies non pertingit,

in vulgus notum est. Dantur denique alia technasmata dioptrica, & catoptrico-dioptrica, qualia nonnulla descripsimus, & plura apud alios, veluti TRABERUM & ZAHNIUM, describuntur: quæ etsi nonnullis magis ludicra quam utilia videantur, & ad delectandum magis quam ad augendam scientiam composita; minime tamen contemnenda sunt. Usus enim præbent in experimentando haud raro prorsus insignem. Exempli loco, provocare licet ad prisma trigonum; quod quantum adjumenti attulerit ad naturam luminis & colorum indagandam, ex præclaro opere Viri summi ISAACI NEWTONI clarissime conspicitur. Inprimis etiam attentionem merentur, quæ (§. 476, 477 *Dioptr.*) de laterna magica in microscopium convertenda, & ad foramen camerae obscuræ lumine solari directo illustratum applicanda annotavi; in Experimentis autem idiomate patrio descriptis fusius exposui. Novi enim Virum quendam illustrem istiusmodi microscopium parasse, & insignes prorsus ejus effectus, quos ego prædixeram, observasse. Qui adeo praxi operam navant, non modo ea, quæ de poliendis vitris, de construendis telescopiis, microscopiis, aliisque technasmatibus larga manu traduntur, probe perpendere tenetur; sed ut oculata sit praxis, theoremata quoque de refractione luminis in lentibus opticiis, præsertim de focus earundem, sibi familiaria reddere debent,

bent, etsi demonstrationes insuper habeant. Clarissime omnium ex Dioptrica perspicitur, quam necessaria sit theoria ad praxin; nisi hæc multa imperfectione laborare debeat, nec in eadem committendi errores, qui evitari poterant. Huc igitur velim animum advertant, qui theoriam contemnere solent. Velim etiam ut ad hæc animum attendant, quorum est theoriam ad praxin aptare; ut ad historicam ejus cognitionem pateat aditus Artis cultoribus ad praxin eandem applicaturis. Optandum enim foret, ut quis omnes theorias, quantumvis profundas, perlustraret, & quæ in Arte usui esse possunt excerpta, sine demonstratione, in usum Artis cultorum, exponeret; experimentis confirmanda, ubi id absque multo apparatu ac sumtu facile fieri potest. Quoniam tamen Geometræ in solvendis problematis physico-mathematicis quædam sumunt, quæ, quod non invita natura sumantur, non demonstrant; atque adeo idem ipsis subinde accidit quod GALILÆO circa resistantiam solidorum, ut ex assumtis recte quidem colligant, quæ inde sequuntur, hæc tamen ab experimento dissentiant, quod illa naturæ rerum minime convenient; ideo consultum foret, ut in Physica veteri satis versatus in hypotheses Geometrarum accurate inquireret, ea, quæ certa sunt, ab incertis aut prorsus falsis separaturus; ne, dum praxin theoria perficiendi animus est, ea

inculcentur, quæ eidem magis obsunt, quam profunt; & artificum perspicaciorum judicio, cum theoriam fallere videant, hæc tandem magis in contemptum adducatur, quam ut eidem aliquod pretium statuatur. Etsi enim a particulari ad universale non valeat argumentatio, & præcipitantiæ in judicando tribuendum sit, si quis ea utatur; hæc ipsa tamen præcipitantiæ tanto excusatio est in artifice, qui quoad theoriam aliorum dictis habere debet fidem; consequenter judicium suum determinare nequit, nisi per notiones communes probabiliter extrinsecæ.

§. 281. In Dioptrica explicatur visio refracta, ac imprimis ostenditur, quomodo refractionis fiat in vitris politis. Quamobrem primo omnium loco inquirendum est in legem refractionis: quæ quomodo per experimenta eruat, primo loco docendum duximus. Equidem hodie, postquam usus telescopiorum & microscopiorum invaluit, potissimum ratio habetur refractionis in vitro factæ; addidimus tamen etiam, quomodo sese habeat in aqua & aëre, propterea quod in Physica major est utilitas legis refractionis in aqua & aëre, quam in vitro factæ. Quamvis vero etiam ostenderimus, quomodo lex refractionis in genere per calculum analyticum eruat; experimentis tamen supersedere minime possumus, cum ratio sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti, quæ per calculum constans

stans eruitur, non eadem deprehendatur in omni diaphano. Qui ergo ad secundum gradum cognitionis aspirant, ea, quæ de refractione in genere capite primo docentur, probe expendere debent, quoniam hinc pendet certitudo ceterorum omnium, quæ in Dioptrica demonstrantur. Quod demonstrationes dioptricas attinet, non uno modo eandem contexere licet. Etenim, supposita lege refractionis, per calculum trigonometricum erui potest, quomodo fiat refractionis in vitro cujuslibet figuræ, veluti in vitris utrinque planis, plano convexis, plano concavis, utrinque convexis, utrinque concavis & concavo-convexis sive meniscis. Idem reperiri potest per calculum algebraicum. Potest denique etiam geometricè demonstrari, quod tanquam jam inventum supponitur, per legem refractionis, vi principiorum geometricorum, more Veterum. Ut igitur diversos hosce demonstrandi modos lectorem nostrum doceremus, nunc ad calculum trigonometricum, nunc ad algebraicum, nunc vero ad demonstrationes geometricas Veteribus usitatas recurrimus. In vitris politis, ex quibus tubi & microscopia componuntur, & quæ ad alia technasmata adhibentur, duplex occurrit refractionis; altera, quæ fit in ingressu luminis ex aëre in vitrum; altera vero, quæ contingit in egressu ejusdem ex vitro in aërem; atque adeo refractionis luminis in vitris po-

litis composita est. Ut tamen ea facilius intelligatur, primo loco docemus, quomodo refractionis simplex fiat in superficiebus tam planis, quam sphericis, cum cavis, tum convexis. Quod si enim hæc principia fuerint cognita atque perspecta; haud difficile est per ea demonstrare refractionem duplicem, qualis in vitris politis occurrit. Enimvero quoniam nos principia dioptrica etiam usui esse volumus in explicandis aliis Naturæ phænomenis; theoremata generaliter demonstramus, ut ad quodlibet diaphanum applicari possint, modo ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum refracti in eodem diaphano per experientiam fuerit definita. Quia tamen in Dioptrica potissimum usui est refractionis in vitro facta, & in Physica frequentiora sunt phænomena refractionis in aqua factæ; in corollariis, theoremata de refractione in vitro & aqua facta exhibemus. Non diffiteor, theoriam dioptricam esse satis diffusam, si respicias usum, quem habent vitra polita in tubis opticis atque microscopiis, & aliis nonnullis technasmatis; sed quibus scientia, quæ sola certitudinem parit, curæ cordique est, illis non videretur nimis ampla, etiamsi praxis inde pendens multis adhuc arctioribus limitibus constringeretur. Quod vero subinde calculo algebraico usi fuerimus in demonstrandis theorematis dioptriciis, non alio fine factum est, quam ut demonstra-

tiones redderemus faciliores & theoriam contraheremus. Neque vero opus est ad demonstrationes algebraicas intelligendas, ut quis in studio Algebrae multum diuque fuerit versatus. Sufficit, si prima saltem rudimenta non ignoraverit, ut adeo nemo jure conqueri possit, quasi hoc nomine Dioptrica multis facta sit inaccessa. Vix enim hodie ferendum est, ut, qui Mathesin addiscere voluerit, Algebram prorsus intactam relinquat: quæ potius commendanda venit iis, qui theoriæ non multum temporis impendere possunt, eam tamen ignorare nolunt. Non exigua voluptate animum sciendi cupidum demulcent demonstrationes dioptricæ; ut adeo theoria nemini videri possit molesta, nisi ab omni sciendi cupidine prorsus immuni. Notandum vero in Dioptrica non modo quæri, quomodo lumen refringatur in transitu per diaphana diversæ densitatis; verum etiam quomodo beneficio radii sic refracti videatur visibile: quod posterius imprimis nosse debemus, ubi phænomena tubi optici ac microscopiorum aliaque visionis refractæ demonstrare voluerimus. Quamobrem in theoria quoque demonstratur, quomodo appareat visibile per radios refractos visum. Unde lentium dioptricarum duplex est usus, alter, dum lumine per ea transmissio utimur, alter vero, dum per eas visibilia respicimus. Qui adeo utrumque usum certo cognos-

cere studet, is etiam omnem theoriam cognitam atque perspectam habere debet: neque enim theoriam dioptricam extendimus ultra usum, quem in praxi habet.

§. 282. Refractio luminis & visio refracta phænomena naturalia sunt, quorum adeo rationes reddere tenentur Physicus. Ex Dioptrica phænomena particularia multo accuratius addisci possunt, quam per observationes absque theoriæ dioptricæ subsidio innotescunt. Et si experimenta capere volueris ad phænomena utraque venanda; theoria Dioptricæ eadem dirigit, ut accurate cognoscantur. Quoniam in Physica phænomenorum rationes proximas ex aliis phænomenis reddimus; eo nomine Dioptrica ad scientiam naturalem plurimum affert adjumenti. Multa dantur naturæ phænomena, quæ a refractione luminis pendent. Eminent inter ea Meteora, quæ dicuntur, emphatica; quæ absque principiis Dioptricæ explicari nequeunt. Atque ea ratio est, cur subinde Mathematici de meteoris emphaticis, veluti de Iride, halonibus, parrheliis & paraselenis, in Dioptrica agant. Immo Dioptricæ theoria, si a telescopiis & aliis technasmatibus dioptricis recesseris, ad cognitionem naturæ mathematicam spectat. Quamobrem quæ paulo ante de eadem, quoad Opticam (§. 272) & Catoptricam (§. 276) monuimus; eadem quoque de Dioptrica tenenda sunt. Quamobrem

obrem qui ad Naturæ cognitionem mathematicam adspirant, iis quoque commendamus, ut omnem Dioptricæ theoriam attenta mente perlustrent. Quodsi enim in Optica, Catoptrica & Dioptrica didicerint, quomodo Geometria & Algebra ad Naturæ phænomena sint applicanda, & quomodo cognitio mathematica differat a philosophica, quidque ad perfectionem philosophicæ conferat mathematica; ad altiora progredientes tanto minus difficultatis experientur. Extra omnem controversiam est, prima cognitionis mathematicæ in Philosophia naturali specimina fuisse Optica, nisi forsân Astronomiam ipsis priorem agnoscere volueris; quamvis nostris demum temporibus, præsertim quod Dioptricam attinet, disciplinæ opticæ magis fuerint excultæ, cum jam sublimiora cognitionis Naturæ mathematicæ exempla prostant. Quodsi ergo a disciplinis opticis exordiaris, ubi cognitionis huius ideam animo complecti volueris, deinceps magis amplificandam per ea, quæ in disciplinis mechanicis Tomo secundo Elementorum occurrunt: naturalem omnino dicendus es sequi ordinem, quem tenuerunt primi inventores. Neque adeo dubitandum est, quin hoc pacto, a facilioribus ad difficiliora continuo progressus, multo intimius hunc cognitionis humanæ gradum inspicias, quam si inverso ordine, insuper habitis primis inventis, statim ad sublimiora te con-

feras, ad quæ non patuit aditus nisi per faciliora inventoribus.

§. 283. Atque hoc ordine si progrediaris, haud parum quoque lucis affunditur ad tertium cognitionis gradum adspiranti. Cum enim ad Artem inveniendi exercendam certa quoque requiratur mentis habitudo, ea omnino omnium commodissime acquiritur eo modo, quo successive, in diversis licet subjectis, incrementa sua cœpit. Sed de hoc ipso plura mox nobis dicenda erunt, ubi de studio Astronomiæ in usum tertii gradus cognitionis agendum erit. Ceterum qui Dioptricam ea lege perlustrare voluerit, quam pro acquirendo tertio cognitionis gradu præscripsimus; is non inanem operam a se sumi ipso facio deprehendet. Probe notandum est artificium, quo lex refractionis analytice investigatur (§. 36 *Diopt.*); tum quod in argumento physico adhibeatur principium a causa finali desumptum, nimirum quod Natura agat via brevissima, tum quod methodus de maximis & minimis ad problema physicum applicetur. Præterea considerandum, quod Mathematicis requirat experimenta, si per ejus demonstrationes aliquid in Physica accurate determinandum. Etenim per analysin mathematicam ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti indeterminata prodit, quæ per experimenta deinde in quolibet diaphano determinanda. Et si autem KEPLERUS veram refractionis legem

gem non fuerit affecutus, cum rationem constantem quæſiverit in angulis, non in eorum sinibus; non tamen propterea attentione indignum est principium *Keplerianum*, cum inde pateat, quomodo hypotheses vicarias, in locum verarum Naturæ, subinde surrogare liceat in cognitione mathematica; sive veras detegere non detur, sive eædem disquisitiones reddant molestiores; tum etiam quod inventum *KEPLERI* ad veram legem refractionis inveniendam manu-ducere potuit *SNELLIUM*; quatenus constans quædam ratio inter angulum incidentiæ & angulum refractionis observatur, quamdiu anguli sinibus physice propemodum proportionales sunt: id quod tanto facilius succedere potuit, quia in ipsa Trigonometria in simili casu angulorum ratio substituitur rationi sinuum (§. 23 *Trigon.*). Et non minus demonstrationes, quam analysis dioptrica loquuntur, ubi Geometria ad Physicam applicatur, non semper observandum esse rigorem geometricum; ita ut lineæ v. gr. convergentes haberi possint pro parallelis, & anguli quantitate parva differentes pro æqualibus: id quod convenit approximationibus in Mathesi pura, & eandem cum hisce habet rationem. Quodsi singula eodem modo perlustrare velimus, quo in studio Algebrae explicando a nobis factum; multa artificia annotare licebit, quæ ad tertium cognitionis gradum faciunt. Sed

nostrum jam non est in tantas ambages descendere, qui tantummodo monstramus viam, qua sit eundum. Non tamen nobis temperare possumus, quin unicum adhuc commemoremus. Nemo est qui nesciat, primam telescopii inventionem casui deberi; ejus autem perfectionem, maxima ingenii vi & acumine summo, a Mathematicis primi ordinis fuisse promotam. Fortuita telescopii inventio attento insinuat modum, quo in inveniendo casui obviam ire licet. Ac evidentissime hinc perspicitur, quod ea, in quæ casu incidimus, manum emendatricem & auxiliatricem expectent a scientia & arte inveniendi. Amplissimus sese hic aperit dicendi campus; sed eum ingredi prohibet instituti præsentis ratio. Quamvis autem in ipsis demonstrationibus dioptricis passim adhibuerimus calculum algebraicum, distantiam foci a lente determinaturi; id ipsum tamen non obstitit, quo minus doceremus, quomodo eadem analytice investigetur; non modo ut usus Algebrae in Mathesi mixta doceatur, verum etiam ut præstantia ejus appareat; cum theoremata in anterioribus operose demonstrata, quamvis ope calculi analytici fuerint contractæ demonstrationes, mira facilitate ex formula generali eliciantur: id quod extra Mathesin usui esse potest in speciebus ex dato genere determinandis. Cur vero solutionem dederimus particularem, quæ Dioptricae sufficit, non vero

vero universalem, sive figuram medii refringentis, sive ejus densitatem spectes, quod tanto facilius fieri poterat, cum dudum prostant solutiones generales, nec eadem supponant, nisi quæ in Analyfi a nobis fuerunt tradita; ex iis liquet, quæ in superioribus jam annotavimus, cur solutiones particulares universalibus prætulerimus, in ipsa etiam Algebra, vel subinde universales nonnisi præmissis solutionibus in casu particulari subjunxerimus; ut adeo opus non sit hic repetere, quæ in anterioribus jam inculcata fuerunt. Ceterum hic quoque annotari poterat, quod, cum Dioptrica multis experimentis ansam præbeat; Ars quoque experimentandi lucem quandam hinc expectare possit. Enimvero cum suo tempore, quando nos ordo deducet ad experimentalem Philosophiam tradendam, ea de re ex instituto sit agendum; eidem in præsentī immorari non debemus.

§. 284. Antequam vero hinc discedamus, non inconsultum ducimus unum adhuc moneri Dioptricæ lectorem ad tertium cognitionis gradum adspirantem. Trigonometriam planam pro parte Artis inveniendi venditare solemus, aut, si mavis, pro methodo particulari investigandi ve-

ritatem latentem (§. 142). Unde studium trigonometricum commendamus iis, qui Artem inveniendi in genere acquirere volunt, non modo illis, qui ad tertium cognitionis gradum, in Mathesi adspirant (§. cit.). Non desunt, qui sibi persuadent, Trigonometriam ad Artem inveniendi parum conferre; propterea quod per eam tantummodo computentur exempla, non vero veritates universales eruantur. Hi facillime confutantur per problemata in Dioptrica trigonometricè soluta: apparet enim per Trigonometriam eadem inveniri, quæ per Algebram eruantur. Quamvis vero opinio ista satis refelli poterat per hoc, quod ipsæ solutiones trigonometricæ problematum sint veritates generales, quæ per applicationem Trigonometriæ inveniuntur, & harum demum applicatione computari exempla; multo tamen clarius idem patet in Dioptrica, ubi etiam per computum trigonometricum eruntur theoremata universalia Dioptricæ. Accedit, quod usus quoque Trigonometriæ in Philosophia naturali per Dioptricam clucescat. Ita ex ejus applicatione ad experimenta innotescit, quomodo lex refractionis ex. gr. in vitro detegatur, ut alia taceam.

CAPUT VIII.

De Studio Sphæricorum & Trigonometria Sphærica.

§. 285. **T**Rigonometria sphærica demonstrari nequit, nisi præmittantur principia Sphæricorum, quæ etiam ante applicanda sunt ad Astronomiam sphæricam, quam calculo trigonometrico in eadem uti datur. Atque ea ratio est, cur Elementa sphæricorum cum Trigonometria sphærica conjunxerimus. Quamobrem qui cognitionis gradum secundum intendit, Elementa quoque sphæricorum attenta mente perlustrare tenetur, antequam ad problemata Trigonometriæ sphæricæ accedat. Quoniam demonstrationes syntheticæ sunt, quales in Geometria elementari occurrunt; eodem quoque modo expendendæ, quo demonstrationes Geometriæ elementaris resolvere docuimus. Quamobrem iis, qui methodum demonstrandi Veterum sibi familiarem reddere volunt, & demonstrationis legitimæ ideam exemplarem, quam imitentur extra Mathesin, majore luce perfundere gestiunt, lectionem quoque Elementorum sphæricorum commendamus, si vel maxime Trigonometriam sphæricam attingere noluerint. Sunt dubio procul sphæricorum Elementa pars Geometriæ, si non elementaris, certe sublimioris, quæ de li-

neis curvis agit, quarum etiam in numero sunt circuli in superficie sphære descripti. Mallem tamen eadem referre ad Geometriam elementarem, quia in hac non minus locum habet circulus, quam sphæra. Sed ea de re cum nemine ferram contentionis recipiæbimus: sufficit demonstrationibus Geometriæ elementaris, ex cujus etiam principiis contexuntur; nisi forsan imaginatio hinc inde minus exercitatis negotium aliquod faceßat; quod tamen evanescit, ubi figuris in plano delineatis substituas globum, in cujus superficie circuli debito modo sunt descripti. Et ut hoc faciant tyrones, omnino suaserim, præsertim illi, quibus molestum accidit horum Elementorum studium, ne ejus fiant desertores. Philosophis vero hinc discere licet, quænam differentia intercedat, si imaginatio juvet, non turbet operationes intellectus.

§. 286. Quod si igitur quis nonnisi calculum trigonometricum sibi familiarem reddere voluerit; is ex problemate primo §. 114 regulam catholicam de triangulis reëctangulis probe perpendat, utque eandem intelligat, definitiones 9, 10 & 11, cum suis collariis,

rollariis, expendat & quomodo ad omnes casus applicetur ex §. 116 & seqq. addiscat. Si numeri tantummodo varientur, exempla plura comminisci licet. Hæc calculi exercitia continuanda sunt, donec regulam catholicam in dato quocunque casu dextre applicare possit. Qui experiri voluerit, quantum Trigonometria sphærica per regulam catholicam faciliatur; eadem problemata more communi resolvat, quemadmodum in libellis aliis Trigonometriæ sphæricæ aut in Introductione ad Tabulas sinuum atque tangentium docetur. Ubi solutio triangulorum rectangulorum nihil amplius difficultatis facessit; addenda sunt problemata 20 & seqq. §. 158 & seqq. circa quæ eadem observanda, quæ de resolutione triangulorum rectangulorum monuimus. Nullus dubito fore, ut calculus trigonometricus absque ullo tædio addiscatur, nec maiorem in eo difficultatem sentias, quam in Trigonometria plana. Quoniam multos a studio Astronomiæ practicæ abhorere expertus sum; quod tædia calculi Trigonometriæ sphæricæ devorare cogerentur: omnem quoque operam navavi, ut Trigonometriam sphæricam redderem facilem quoad praxin, etsi theoria sit multo profundior, quam Trigonometriæ planæ.

§. 287. Trigonometriæ sphæricæ demonstrationes non modo supponunt theoremata sphærica seu Sphæri-

corum theoriam; sed propriam quoque theoriam habet, qua nituntur resolutiones problematum. Nimirum quemadmodum Trigonometria plana nititur theoria triangulorum planorum, seu rectilineorum, in plano descriptorum, quæ traditur in Geometria elementari; ita quoque Trigonometria sphærica pendet a theoria triangulorum sphæricorum, seu eorum quorum latera sunt arcus circulorum maximorum in superficie sphæræ descriptorum. Eam cum alibi supponere non potuerimus, in ipsa Trigonometria sphærica tradere debuimus; quemadmodum theoria triangulorum planorum in Trigonometria plana explicanda esset, nisi jam in Geometria elementari exposita fuisset. Quodsi dicas, theoriam triangulorum sphæricorum esse partem Elementorum sphæricorum, quemadmodum theoria planorum est pars Geometriæ planæ: mihi perinde erit, sive eam a Trigonometria sphærica separes eandemque tibi familiarem reddas, antequam ad hanc accedis; sive ipsam demum cum problematis, quorum solutiones independent, addiscas; quamvis hoc posterius mihi videatur commodius minusque molestum, cum sic theoriæ statim pateat usus, nec difficilis præmittenda sit praxi faciliiori. Theoriam autem Sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ plurimum commendamus iis, qui in Astronomia non modo ad secundum cognitionis gradum,

verum etiam ad ipsum tertium adspirant; consequenter omnibus, qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin addiscendam accedunt. Cum demonstrationes singulas eadem forma exhibuerimus; qua conspiciuntur in Geometria elementari, nisi quod nonnullæ in theoria Trigonometriæ sint prolixæ; si nostro more resolvantur, nihil difficultatis facerent, ut eadem deterreatur, qui a Geometria elementari ad Sphæricam Trigonometriam statim accedit. Quodsi enim cuidam visum fuerit, neglecta Algebra & ceteris Matheseos mixtæ partibus, pergere in demonstrationibus Matheseos puræ methodo Veterum conditis, ut hanc magis subijciat potestati suæ, nec ante ad analyticam Recentiorum accedat, quam ubi synthetica Veterum fuerit satis compos; is a Geometria Elementari & Trigonometria plana statim pedem promovere potest ad Elementa Sphæricorum & Trigonometriam sphæricam; cum nec hic supponantur principia, nisi quæ ex Trigonometria plana & Geometria elementari hausisti, nec alia demonstrandi methodus, quam qua ibidem usi sumus; ita ut, subjunctis Geometriæ elementari Sphæricorum Elementis, Trigonometriam sphæricam cum plana conjungere licuisset, quemadmodum vulgo a Trigonometriæ Scriptoribus fieri solet.

§. 288. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, iis studium

Elementorum Sphæricorum & Trigonometriæ sphæricæ commendandum. Etenim, sine principiis sphæricis & Trigonometria sphærica, nihil reperire licuit in Astronomia sphærica; multa etiam in Geographia ab hisce principiis pendent. Ipsemet expertus fui, cum studium Astronomiæ mihi videretur perplexum, ac tædiosum esset resolutiones problematum primi mobilis ex Autoribus petere; principia sphæricis perspectis, nullo negotio per me ipsum eas fuisse consecutum, & beneficio illorum principiorum eas extemplo reperire potuisse, quando de iisdem cogitandum erat, etsi eas memoria non comprehendissem. Quamobrem si in Astronomia & Geographia perspicere volueris, quomodo resolutiones problematum fuerint detectæ; principia sphærica probe perspecta esse debent. Vi Trigonometriæ autem sphæricæ patet illatio, qua opus est, ut in casu particulari dato computatio legitime fiat, ope principiorum sphæricorum, triangulis & in iisdem datis detectis. Circuli, qui concipiuntur terminati in superficie sphære, oriuntur ex sectionibus sphære, quas omnes esse circulos theoremate 1, §. 13 demonstratur. Differt adeo Sphærica a Geometria plana, in qua circuli se mutuo secantes in eodem sunt plano, cum hic in diversis sint planis, omnes tamen terminentur in eadem superficie sphære. Unde facile patet, alium hic requiri

requiri usum facultatum cognoscendi, quam in Geometria plana. Qui vero tertium cognitionis gradum acquirere studet, is utique distincte cognoscere tenetur usum facultatum cognoscendi in veritate investiganda requisitum; consequenter ubi novus quidam usus emergit, ad eundem animum attendere debet, ne attentioni suæ sese subducatur. Talia autem imprimis scrutari debet, qui Artem inveniendi distincte cognoscere avet, & Mathesi quoque in usum Philosophiæ operam navat, ejusque studio intellectum perficere studet; consequenter promptum facultatum cognoscendi usum consequi conatur, quem habere possunt. Etsi autem intra cancellos, quos præfixit præsentis instituti ratio, nos continentes ad particularia non descendamus; non possumus tamen non excitare attentionem lectoris sciendi cupidi ad artificium, quo regula catholica Trigonometriæ sphericæ fuit eruta; præsertim cum singula huc spectantia satis distincte explicaverimus & demonstrata dederimus. Elucet enim ex eo usus prorsus singularis fitionum ad formandos conceptus universales, sub quibus comprehenduntur, quæ, propter intrinsecam diversitatem, ad commune quoddam genus, seu universalem quandam notionem reduci minime posse videbantur. Etsi enim hujus artificii jam mentionem quandam injecerimus in Analyti; singularis tamen prorsus hic oc-

currit applicatio, ut aliam prorsus formam induat. Regulam catholicam non alio fine investigavimus, quam ut memoriæ succurreretur, regularum multitudine non obruendæ, & ut omnis applicatio Trigonometriæ secum ferat sensum certitudinis manifestiorem. Habemus igitur hic, quod imitemur in aliis disciplinis practicis, ad praxin omnem facilitandam. Quamvis enim dentur artificia adhuc alia, quibus idem præstari potest, nec semper recurrendum sit ad fitiones; sufficit tamen hoc exemplo nos moneri, cogitandum quoque esse in Disciplinis practicis de praxi per regulas catholicas facilitanda; immo & de theoria multiplici ad notionem universales reducenda, ut facilius evadat ejus ad humana negotia applicatio. Maximæ hoc ipsum utilitatis est, cum non omnium sit theoriam, quæ multitudine regularum abundat, ita memoriæ insigere, ut singulæ veluti sua sponte præsententur intellectui, quoties usus eas requirit, cum tamen ad recte agendum illis carere nequeamus. Mirabuntur forsitan nonnulli, qui, cum Mathesin sibi soli discant, ad alia, quæ extra eam sunt, animum non divertunt, nos studium Matheseos explicaturos talia proferre, quæ cum eo nihil commune habere videntur. Enimvero qui animo recoluerit, quæ supra de studio Matheseos, intellectus perficiendi gratia instituendo, in medium attulimus, & cum eodem

studium Philosophiæ verioris, quam in operibus nostris tradimus, conjunxerit, non habebit amplius quod miretur, utilitatem eorum, quæ hinc inde commendantur, reipsa expecturus.

§. 289. Trigonometriam sphaericam non explicamus, nisi in usum Astronomiæ & Geographiæ. Quamobrem non plura tradimus, quam quæ huic fini satisfaciunt. Et quoniam Trigonometria sphaerica demonstrari nequit, nisi suppositis principiis sphaericis, nec applicari in Astronomia & Geographia nisi mediantibus his ipsis principiis; nec ex hisce addidimus, nisi quæ huic scopo sufficiunt. Et si itaque Algebra ad doctrinam quoque Sphaericorum & Trigonometriam sphaericam applicari possit; usum tamen Algebrae in hac Matheseos parte prætermisimus, cum unice propositum nobis fuerit præ-

xin Trigonometriæ sphaericæ reddere faciliorem. Ne tamen quis existimet, cum vel esse nullum, vel adeo difficilem; ut hæcenus detegi non potuerit; provoco ad exempla, quæ dedit JACOBUS KRESA e Societate Jesu in Analyti speciosa Trigonometriæ sphaericæ, primo mobili &c. applicata, & ad hisce illustriora, quæ extant in Commentariis Academiae Imperialis Petropolitanae. Problemata primi mobilis per Algebram soluta, si ad Geometriam puram reducuntur, non sunt nisi problemata sphaerica. Geometrae sane de Sphaerica nunquam cogitassent, nisi problemata primi mobilis in Astronomia de ea cogitandi ansam dedissent. Neque dubium est, initio hanc Geometriæ partem ab Astronomia sphaerica non fuisse separatam, quemadmodum & ipsa Trigonometria non tradebatur nisi in Astronomia.

C A P U T IX.

De Studio Astronomiæ.

§. 290. **S**tudium Astronomiæ multis sese nominibus commendat omnibus, qui ad solidam rerum cognitionem adspirant, sive secundum cognitionis gradum, sive tertium intendant; & inprimis si quis intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navet, ac ad scientiam naturalem excolendam animum appellere velit; immo si

studio medico sese mancipandi animum habuerit. Diversi admodum sunt fines, cur quis ad studium Astronomiæ accedit. Quare nec omnibus eodem modo in eodem versandum, cum diversos fines non eodem modo consequi detur. Nostrum igitur est docere, quid unicuique faciendum, ut finem a se intentum consequatur.

§. 291.

§. 291. Sunt qui curiositatis tantummodo gratia Astronomiam addiscendam esse sibi persuadent; cui tanto magis satisfaciendum existimant, ne ignorent ea, quæ in Calendariis extant; non decere virum eruditum arbitrati, ut Calendarium quotidie in manu habeat, non tamen intelligat, quæ in eodem traduntur. Sunt alii, qui istis oculatiores longius prospiciunt, & adolescentibus ob curiositatem commendant studium astronomicum, ut eadem excitetur sciendi cupiditas & magis magisque inflammetur. Sane non alio fine in scholis introductus est JOANNIS DE SACRO BOSCO libellus de sphaera; cui deinceps alii substituere alios libellos, usum Globorum, & computum ecclesiasticum exponentes. Etsi enim ea fini etiam Theoricas Planetarum consignaverit PURBACHIVS; cum tamen Theorica magis conducere visa iis, qui ex instituto Astronomiæ operam navaturi sunt, quam promiscue omnibus, & ipse PURBACHIVS potissimum intenderit, ut ad studium astronomicum fere neglectum ac desertum aditum aperiret, & animos juvenum ad idem persequendum accenderet; Theorica ex scholis proscripta in Academias relegata, ubi præter Professore Mathematicarum inferiorum, qui Mathesin puram, cum Geometria practica, & Staticæ elementis, interpretari debebat, etiam constitutus Professor Mathematicarum superiorum, qui Astronomiam cum

Geographia, Chronologia, Gnomonica & Astrologia doceret. Unde hodiernum in Academia Wittebergensi & Hafniensi duo sunt Mathematicarum Professores, alter Mathematicarum inferiorum, alter superiorum. In scholis itaque inferioribus, in quibus adolescentes ad lectiones academicas præparandi, sufficere visum, si Astronomiæ sphaericæ, & computi ecclesiastici prægustum quendam haberent, & figuras geometricas construere addiscerent. Unde memini in Gymnasiis quoque patriis, Vratislaviensibus scilicet, cum ego adolescens Magdalenæum frequentarem, Professore Matheseos nonnisi constructiones figurarum, cum definitionibus Geometriæ elementaris, usum Globorum & computum ecclesiasticum docuisse. Et quamvis insigni cupiditate methodum mathematicam cognoscendi jam tum flagrarem, nec minor esset Algebrae addiscendæ ardor; quod illa certam acquiri posse cognitionem, cui contradicere nemo ausit; hac vero, proprio Marte veritates incognitas investigari audivissem; nemo tamen erat, qui sitim meam restringere valeret; immo non deerant, qui studium Matheseos dissuaderent, aut saltem affirmarent, me ejus auxilio non consecuturum, quod sperabam. Ego vero nunquam ab ea opinione me dimoveri passus sum, cujus quidem rationes hic exponi nil attinet.

§. 292. Qui adeo solius curiositatis gratia Astronomiam addiscere volunt, iis sufficit historica veritatum præcipuarum cognitio. Nimirum primo ipsis legenda sunt, quæ capite primo Astronomiæ sphaericae, quoad observationes communes & principia inde stabilita, traduntur. Neque enim integro hoc capite continetur quidpiam, quod captum Mathematicum imperiti excedat; & quocunque quis animo ad Astronomiam accedat, ea ignorare non debet, quæ in eodem continentur. Deinde ex secundo capite, quod de circulis sphaeræ mundanae agit, definitiones circulorum & aliorum nonnullorum ad eos spectantium sibi familiares reddat, omissis ceteris omnibus. In capite vero quarto legat scholia probl. 16, §. 244 & *seqq.* quæ de catalogo fixarum, & asterismis, ac magnitudine apparente illarum loquuntur. Addi possunt hinc inde scholia quædam alia, quæ utrum contineant, nec ne, quod videatur notatu dignum, quilibet facile per seipsum judicabit. Hinc statim accedat ad caput sextum, in quo constructio & usus Globi cœlestis in ipsius potissimum usum docetur. Neque male sibi consulat, si in capite septimo perlegat de refractione & parallaxi, quæ in definitionibus & scholiis habentur, & sub rubrica observationum reperiuntur: id quod etiam intelligendum de crepusculis, quibus destinatur caput 8, seu ultimum Astronomiæ

sphaericae. Et hæc satisfaciunt etiam adolescentibus ad studium Astronomiæ præparandis, quoad partem sphaericam. In parte Theorica iis, qui solius curiositatis gratia Astronomiam addiscunt, commendanda sunt capita tria priora de natura Solis ac Lunæ ceterorumque Planetarum, & mundi systemate, si pauca quædam problemata excipias, quæ prætermitti possunt. Poterunt etiam prætermitti theoremata, quæ in usum systematis mundani evincendi proponuntur §. 571 & *seqq.* Sufficit enim ut saltem theorema 27, §. 612 & theorema 18, §. 630 cum subiectis scholiis legat, demonstratione prioris insuper habita. De Theoria Planetarum, quæ capite quarto traditur, non plura cognoscere tenetur quam hypothesin: non tamen prorsus inconsultum est, ut addat definitiones, quarum in Theorica usus, propterea quod hi termini in Calendariis quoque occurrunt, quæ intelligere vult curiositatis gratia Astronomiæ operam aliquam impendens. Quod ad Lunam attinet, præter definitiones & observationes, a §. 816 usque 822, non est, quod curiosus tantummodo lector attingere teneatur. Et ex capite sexto tantummodo distantias planetarum a Terra ex §. 906, earumque magnitudines ex §. 922, haurire debet. De adspectibus capite septimo sufficiunt eisdem definitiones §. 926-935, cum definitionibus eclipsium §. 937 & §. 982. Denique ex capite ultimo de stellis

lis fixis & novis atque cometis, sufficiunt theorematum absque demonstrationibus, & observationes, omissis vero problematis. Ea abunde satisfaciunt, ut de rebus astronomicis verba facere possit, quando occasio tulerit in sermone communi, & intelligere, quæ in Calendariis de iisdem habentur.

§. 293. Quodsi quis cognitionem historicam Astronomiæ accuratiorem desiderat; is omnia, omissis demonstrationibus, ea industria perlegere debet, quam pro primo cognitionis gradu præscripsimus. Quodsi tamen praxin non curat, nec opus esse videtur, ut singula problemata perlustret. Abunde sufficit, si theoriam planetarum primariorum perspectam habeat & calculi eclipsium ideam aliquam animo concipiat. Permittendum adeo est unicuique, quo usque ipsum trahat sua voluptas. Vix enim alius finis intendi potest, quam ut noticia rerum astronomicarum animum delectet. Quoniam itaque sola voluptas mensura est eorum, quæ addiscenda sunt, uniuscujusque omnino relinquendum est iudicio, quantum eidem satisfaciat. Quemadmodum illam suo quisque modulo metiri debet, nec ex se judicare licet alios; ita quoque determinari nequit, quamnam unicuique conducant.

§. 294. Cognitio Astronomiæ historica, quoad partem sphericam, faciliatur continuo usu Globi cœlestis, qui semper ad manus esse de-

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

bet. Etenim definitiones multo facilius intelliguntur, si ea, quæ declarant, in superficie Globi represententur; cum imaginatio nihil amplius facessat negotii, ob consensum ejus cum sensu seu visu. Si schemata in plano delineantur, quemadmodum fieri solet & a nobis quoque factum est; sensus non revera exhibet, quod representare debebat; sed saltem dirigit imaginationem, ut vi vocabulorum, quæ in definitione continentur, sibi formet ideam ejus, quod cognosci debet. Sumamus exemplum facile, ut quæ dicuntur recte intelligantur. Declinationem stellæ definimus per distantiam ejus ab æquatore. Cumque distantiam a circulo maximo esse ostenderimus arcum circuli maximi inter duo puncta in superficie spheræ intercepti & ad circulum maximum perpendicularem (§. 76 *Spheric.*); ideam declinationis formaturi imaginari debemus circulum maximum in superficie spheræ, qui per centrum stellæ, seu punctum in spheræ superficie datum, & per æquatorem transit, & hunc ad angulos rectos secat. Quamobrem cum porro constet (§. 28 *Spher.*), hunc circulum transire debere per polos æquatoris, quos eodem esse cum polis mundi constat (§. 48 *Astron.*); nobis imaginari debemus spheram cavam, in cujus centro oculus collocatus, & in eadem duos polos, circa quos vertitur, una cum æquatore intervallo quadrantis

Y y

in

Tab. IV.
Fig. 40.

in superficie sphæræ descripto, & circulo transeunte per polos & stellam, seu punctum in superficie datum transeunte, qui secat æquatorem. Ita enim demum idea representabit declinationem. In plano circulus MAPQ representat sphæram mundanam, puncta P & p polos mundi diametraliter oppositos, AQ æquatorem ex altera hemisphærii parte, in qua sumitur stella S. sive punctum quodcunque datum. PSp representat circulum, qui per polos mundi P & p atque punctum datum S transit, in eadem hemisphærii parte, & æquatorem in D secat. Unde arcus circuli maximi DS representat Declinationem stellæ, seu puncti S. Hinc liquet, quomodo definitiones primum explicandæ sint per figuras in plano delineatas. Enimvero cum idea hujus schematis non sit ea, quæ rem ipsam, prouti concipitur, representat, sed vicariam saltem operam præstet; imaginationis est, eam transformare in ideam veram. Loco igitur circuli APQpA nobis imaginamur sphæram cavam, in cujus centro oculus constitutus; in ejus superficie imaginamur porro duos polos P & p sibi diametraliter oppositos, & æquatorem ab utroque polo undiquaque eodem intervallo distantem, tandemque circulum alium per stellam in eadem superficie sumtam & duos polos transeuntem, qui necessario æquatorem secat. Atque ita demum imaginatio veluti visui

percipiendam exhibet declinationem SD. Nemo non videt non sine exercitio vim istam acquiri, quæ imaginationi ad istam transformationem idearum sufficit; immo ipsam imaginationis vim jam extendendam esse, ut satis clare representet quod percipiendum. Enimvero si globus fuerit ad manus, cum in ejus superficie designati sint poli, & æquator descriptus, ac præterea Meridianus circulus per polos mundi transiens, sub quo ob ejus volubilitatem circa polos, & situm Meridiani fixum, quodvis superficiæ punctum pro arbitrio constitui potest; non alia re opus est, quam ut stella constituatur sub Meridiano, ita enim ejus arcus inter eandem & æquatorem interceptus representat declinationem, qualem imaginatio percipiendam exhibere decet. Atque ita sensus cum eadem consentit. Non est quod excipias, Globum exhibere in superficie convexa, quod imaginatio transferre debet in concavam; consequenter nec hic sensum cum imaginatione consentire. Etenim quis non videt, cum non necessarium sit ut oculus collocetur in centro sphæræ, fingi posse quod is extra sphæram collocetur? quod ubi imaginamur, imaginatio a sensu non dissentit. Quod si vero imaginationis vi ipsam sphæram mundanam representare velis, qualis nobis apparet, dum noctu coelum stellis superbiens contuemur; multo jam facilius accidit ea, quæ

quæ oculo extra sphæram mundanam per fictionem constituto apparent, eidem in centrum sphæræ retracto, tanquam in concava, percipienda exhibere.

§. 295. Non dubito fore haud paucos, qui nodum in scirpo quæri existimaturi sunt, & sine istiusmodi scrupulositate Astronomiæ cognitionem historicam acquiri posse tanto confidentius sibi aliisque persuaderi conabuntur, quod experientia testetur, ex schematistis in plana delineatis satis intelligi, absque ulla opera, quæ per definitiones explicantur, & in resolutionibus problematum præcipiuntur. Enimvero quis vitio vertet Philosopho, quod distincte explicet usum facultatum, quem alii de eodem parum cogitantes faciunt, præsertim eo fine, ut simul ostendat, quomodo usum istum facilitare liceat? Homines & animalia moventur absque cognitione regularum Staticæ, nec norunt, quem faciant eorundem usum, dum easdem invariabiliter observant. Ecquis vero reprehendit BORELLUM, quod, in egregio opere de motu animalium, ex regulis Staticæ eundem demonstrandum sibi sumserit? Si quis fuerit Astronomus, qui in Psychologia simul versatus, ut acumine suo discernere possit, quæ modificationibus animæ insunt; is utique agnoscat vera esse, quæ de idea vi imaginationis formanda ad clare percipienda, quæ in Astronomia sphærica docentur, in medium attulimus (§. 294).

§. 296. Quemadmodum vero illam idearum transformationem juvat, præter Globum cœlestem, sphæra etiam armillaris; ita non inutile foret, si, ad similem usum in parte Astronomiæ theorica obtinendum, adhiberentur Instrumenta levi sumtu parabilia, quibus phænomena motus secundi apte repræsentarentur; non quidem ea accuratone, ut calculi vicem subire possent, sed quantum sufficit, ut motus secundus, seu proprius, distincta notione comprehendatur. Intendebat hoc PURBACHIUS cum suis Theoricis Planetarum; sed cum, Astronomiæ parte theorica per COPERNICUM imprimis ac KEPLERUM reformatâ, nullus amplius illarum sit usus; alia prorsus forma fieri hodie deberent instrumenta ad motus secundi phænomena eodem modo repræsentanda, quo ope Globi artificialis repræsentantur phænomena motus primi. Equidem non ignoro, non defuisse aliquos, qui de motu secundo Planetarum organice repræsentando cogitarunt; sed defunt instrumenta, quæ ad communem discentium usum adhiberi possent. Neque vero negandum est in Theoricis defectum istiusmodi instrumentorum esse tolerabiliorem quam in sphæricis; quia, per schemata in plano descripta, non adeo confunditur imaginatio, quam in sphærica; & quod ad Theoricam demum accedas sphærica absoluta; consequenter ubi notionibus astronomicis jam adfuetus animus.

§. 297. Qui propter praxin Astronomiæ operam navant, cum ea varia sit, nec omnes eodem modo in ea versari debent. Constat, ad praxin Astronomiæ facilitandam, conditas esse Tabulas tam primi mobilis, quam motus Planetarum. Illarum usus est in parte sphaerica; harum vero in theorica. Quibus adeo calculus astronomicus curæ cordique est, illi usum Tabularum multiplici computatione sibi familiarem reddere tenentur. Præfiguntur Tabulis præcepta calculi, quæ non in omnibus sunt prorsus eadem. Quamobrem ut ea intelligantur, cognitio saltem historica ex Elementis Astronomiæ præmittenda. Quo accuratior hæc fuerit, eo melior. Equidem fieri potest, ut calculum astronomicum juxta Tabulas absolvat, qui terminos tantummodo cognitos atque perspectos habet; sed in tenebris quasi versatur, qui nihil prorsus rationis regularum perspicit. Suadendam igitur est, ut theoriæ, tam sphaericæ, quam theoricæ cognitione historica animum imbuas, antequam ad calculum accedas. Dedimus ipsimet præcepta calculi astronomici, eademque exemplis illustravimus. Quamobrem qui ad hanc praxin adspirat, ad ea animum advertere tenetur. Exemplorum typum ita representavimus, ut ideam exemplarem calculi animo ingenerare possit, quæ regularum vicem tueri potest, ubi plura exempla computaveris,

& eadem forma calculum describeris. Antequam autem satis exercitatus fueris, ut tibi fidere possis, quod nulla ex parte aberraveris; exempla computanda sunt, quæ in Ephemeridibus habentur, ut cum iis conferre queas, quæ calculus tuus prodit.

§. 298. Tabulæ astronomicae non alio fine conduntur, quam ut calculus reddatur facilius & brevior. Computantur autem ex observationibus calculo geometrico, aut, si mavis trigonometrico. Quamobrem Tabularum conditoribus calculus geometricus perspectus esse debet. Formam quoque hujus calculi cognoscere tenetur, quicumque solidam Astronomiæ scientiam acquirere debet. Nos in Elementis nostris hunc calculum, non modo regulis perspicue ac distincte propositis, comprehendimus; verum etiam exemplis illustravimus, & typum calculi ita exhibuimus, ut in praxi commode regularum vice fungatur, ipseque calculus prolixus ab omni perplexitate & molestia liberetur. Usi nimirum hic sumus eodem artificio, quo calculum algebraicum facilitare studuimus. Quamobrem, si quis præcepta calculi cum typo conferat, non habebit, quod conqueratur de obscuritate, sed plena luce fruatur in iis intelligendis; modo in Trigonometria fuerit versatus, cujus problemata familiaria supponuntur, nec ignoret terminos, quos ex definitionibus perspectos habere debet. Neque enim accedendum

dendum est ad calculum geometricum, nisi intellectis terminis astronomicis & Trigonometriæ, tam sphericæ, quam planæ, praxi in potestatem suam redacta. Si quis numeros datos variaverit, in aliis exemplis calculi typum imitaturus; is non modo habitum computandi sibi comparabit; verum etiam ideam calculi exemplarem memoriæ infiget, ope schematis delineati in memoriam facile revocandam, quoties calculo isto utendum. Atque hoc ipso obtinetur, ut non modo molestia omnis a calculo astronomico arceatur, sed etiam ut animo placido, nec perturbato sanguinis circulo, calculos continues per tantum temporis spatium, quantum libuerit; modo tibi non molestum accidat tempus calculis fallere, quod scientiæ amplificandæ impendere mallet. Neque enim tædia, ex diverso fonte propululantia, pro diversitate inclinationum naturalium quibus natura homines a se invicem differre voluit, in unum confundenda; errore manifesto iis, qui in Psychologia cum laude sunt versati. Quodsi vero præcepta calculi, quæ numeris suis distincta sigillatim exhibuimus, tranquillo animo lente festinans perpendas; formæ calculi notionem distinctam consequeris, usus regulis quas in Logica pro acquirenda notione distincta præscripsimus; etiamsi illas nunquam didiceris, nec, dum juxta eas determinas facultatum cognoscendi usum, earum tibi conscius fueris. Quan-

tum hoc conducat ad perficiendum intellectum, ut etiam extra Mathefin distincte concipere adfuescas, quæ meditaris, & ordine in meditando cogitationes tuas promoveas, nunc demonstrare nolo; etsi demonstratio ex Psychologiæ ac Logicæ principiis dari poterat; utpote assensum non nisi eorum extorsura, qui Metaphysicæ, prouti a nobis tradita, jam operam debitam navarunt. Sufficit monuisse, quod credendum sit experto; & oculata futura sit fides singulis, quotquot consilio nostro aurem benignam præbere non dedignati fuerint. Qui Astronomiam non sibi discunt, sed intellectus perficiendi gratia eidem incumbunt, id quod faciendum plurimis (cum paucis admodum Astronomis opus habeat genus humanum) illis formam calculi animo concepisse sufficit, nec opus est, ut in eodem sint exercitati. Quatenus tamen exempla lucem affundunt præceptis, non inconsultum est, ut unicum saltem, quod exhibuimus, exemplum computent, singulis præceptis ad idem applicatis; præsertim cum etiam extra Mathefin, in Philosophia præsertim practica, magna sit exemplorum vis; quemadmodum in parte altera Philosophiæ practicæ universalis demonstravimus; atque adeo utile sit ad Philosophiam animum appellenti præcepta ad exempla dextre ac expedite applicare. Ecce igitur tibi usum universalem eumque maximi faciendum,

dum, ob quem hæc pars studii astronomici promiscue commendari meretur omnibus, quos solida rerum cognitio juvat; etsi ætatem omnem in calculis astronomicis consumere nolint; immo etsi futurum vitæ genus minime ferat, ut notitiam multo labore acquisitam conservent. Quoniam enim ea conservari, hoc non obstante, potest intellectus habitudo, quam hoc studio acquisivisti; non est quod conqueraris, te in spem futuræ oblivionis discendo ea, quæ tibi nulli usui sunt, tempus inutiliter consumsisse.

§. 299. Peculiaris quoque praxis astronomica est phænomena siderum observandi, omnis praxeos reliquæ basis. Ex observationibus enim calculo geometrico eruuntur, quæ in Astronomia scire intendimus; nec absque iis, calculi hujus beneficio, conduntur Tabulæ, quarum in praxi tam commodus est usus. Immo, absque observationibus non licet perficere Tabulas, ut major sit earum cum cœlo consensus. Ne igitur hac in parte quoque deessemus; modum quoque observandi exposuimus, ut aliquam ejus ideam animo concipere detur. Nemo autem a nobis requisiverit, ut omnia minutissime persequamur, quæ ad dexteritatem in observando faciunt. Quodsi enim quis observatorem agere voluerit, is non modo intellectis iis, quæ a nobis traduntur, legat Autores supra commemoratos, cum scripta Astro-

nomorum recenseremus; verum etiam in observatorio aliquo celebri, quale est Parisinum in Gallia & Grenovicense in Anglia, per aliquod tempus commoretur, ut, quæ ad observandi dexteritatem faciunt, ab Observatoribus exercitatis addiscat. Quamvis enim impossibile non sit, ut eandem multo exercitio per se asséquatur, si in observando sedulus ac continuus sit; facilius tamen longe accidit, ubi alios præeuntes imitatur, quam si demum multa circumspeditione ipsimet detegere ea debeamus, quæ ad observationem accuratam conducunt. Quodsi quis instrumenta, modumque observandi Veterum cum recentioribus & recentissimis conferre voluerit; is animadvertet cum theoria Astronomiæ crevisse quoque observationum perfectionem. Unde conficitur, eum, qui observationibus astronomicis vacare voluerit, theoriam quoque Astronomiæ sibi perspectam reddere debere. Immo ex iis, quæ in nostris Elementis demonstrantur, jam patebit, observatorem in calculo quoque astronomico, ipso etiam geometrico versatum esse debere. Sane qui observatorem agere voluerit, Astronomiam omnem, tam theoreticam quam practicam, intime perspectam habere debet. Ad observandum requiruntur instrumenta &, si observationes accuratæ esse debent, accuratis quoque opus est instrumentis. Quamobrem qui observationibus

tionibus astronomicis sese dare voluerit, instrumentorum quoque fabricam, usum, & examen intime perspicere debet. Notio instrumenti adæquata esse debet, qualis sufficit ei, qui artificem ejus fabricam docere vellet, aut, si arte polleret, ipsemet idem construeret. Rationes singulorum in fabrica observandorum ex theoria Astronomiæ reddendæ, ut scientifica sit instrumenti cognitio. Usus accuratus determinat Astronomiæ theoria ad constructionem instrumenti applicata. Construitur enim instrumentum in certum finem, veluti magnus Gnomon ad observandas altitudines Solis meridianas per singulos anni dies; ex theoria autem Astronomiæ constat, quanta exactitudine finem intentum consequi debeamus. Instrumenti igitur is fieri debet usus, quem finis consequendus exigit. Examina non modo pro diversitate instrumentorum, verum etiam pro uno eodemque instrumento varia esse possunt. Eo autem tendunt omnia, ut inde constet, instrumenta esse accurate facta, atque adeo iis in observando fidentum esse, si quidem certus sistere debeat in observando diligentiam adhibuisse. Ad hæc examina referendum, si quis instrumento suo eadem *angeliæ* phænomenon observat, qua ab aliis celebribus Observatoribus alias fuit observatum; veluti si quis per telescopium suum Saturni easdem phases videt, quales primus exquisi-

tissimis telescopiis observavit HUGENIUS. De examinibus istis specialia in medium afferre non licet. Supponunt enim accuratam Instrumentorum descriptionem, qualem hic dare non licet. Sufficit adeo monuisse, quod istiusmodi examinibus opus sit, ne magno conatu ac maxima diligentia nihil agas. Observationes astronomicæ sunt paucissimarum; propterea quod non quilibet, qui Astronomiæ studio delectatur, gaudet suppellectili ad observandum necessario, fruiturque otio ac commoditate observandi. Quamobrem in nostris Elementis nonnisi ea tradidimus, quæ sufficiunt, ut intelligatur, qualibus observationibus opus habeat Astronomus.

§. 300. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, Elementa Astronomiæ integra eodem modo perlustrare tenentur, quem supra pro cognitionis gradu secundo acquirendo præscripsimus. Eum enim in finem Elementa Astronomiæ eadem methodo conscripsimus, quæ Elementa Geometriæ condidimus; et si communiter Astronomi continuo discursu, quemadmodum vulgo faciunt Autores, sua proponant; sit ita quod demonstrationes eidem interferant: quem morem etiam hodie Geometriæ sequuntur, in schediasmatibus præsertim quibus inventa sua orbi literato communicant in Diariis Eruditorum & Commentariis Societatum Regiarum. Constat ipsa

ipsum PTOLOMÆUM eundem morem tenuisse in Almagesto suo. Negari tamen non potest, quod methodus *Euclidea*, quam nos adhibuimus, multo sit clarior; præsertim si omnia rigide demonstranda, nec sumenda, quorum demonstratio lectoris industriæ relinquitur, neque etiam immiscenda, quæ prorsus non demonstrantur. In parte etiam spherica, ex principiis sphericis rigide demonstravimus, quæ vulgo ab Astronomis fiducia illorum principiorum sumuntur, ne evidentiam desiderent tyrones; imprimis ubi Elementa Geometriæ tam scrupulosa industria pertractarunt, quam supra præscripsimus, & qua omnino opus est, siquidem ideam methodi demonstrativæ exemplarem in usum Philosophiæ ex Mathesi haurire volueris. Neque porro negari potest, studium Astronomiæ hoc pacto facilitari. Sane non alia de causa PURBACHIVS studium Astronomiæ amplificaturus, & ad captum tyronum accommodaturus, Almagestum PTOLOMÆI, idem methodo *Euclidea* digerere cœpit; telam vix cœptam, post obitum ejus, jure legati, pertextente REGIOMONTANO. Non igitur fecimus, nisi quod judicio REGIOMONTANI, Astronomi summi, probetur. REGIOMONTANUS nullis problemata illustravit exemplis: id quod tamen apprime necessarium esse ex iis, quæ modo in antecedentibus inculcavimus, abunde elucet. Præterea ipsa res loquitur,

quod, cum is nonnisi Almagestum PTOLOMÆI in formam Elementorum EUCLIDIS redigere voluerit, idem non tradat nisi Astronomiam antiquam, a qua recentior plurimum differt, præsertim in theorica, ut adeo dici nequeat nos actum egisse. Quemadmodum vero Elementa Geometriæ *Euclidea* multo clariora & evidentiora reddidimus, tum quod demonstrationes fecerimus completas & ordinatas, quales esse debent, si quis methodum demonstrativam in usum philosophandi addiscere voluerit, tum quod resolutiones problematum magis distincte exhibuerimus; ita idem observavimus, ut in ceteris Matheoseos partibus, sic etiam in Elementis Astronomiæ. Observationes præterea, quales in Mathesi pura nullæ occurrunt, sigillatim quoque ita recensuimus, ut præter facta nihil contineant; ea vero, quæ inde concluduntur, per modum corollariorum deduximus; quemadmodum vult Logica verior, & fieri debere in Logica nostra evicimus: id quod etiam in disciplinis opticis jam fecimus. Sicuti enim methodus demonstrativa in iis, quæ operationibus intellectus perficiuntur, ad amussim observat regulas in Logica præscriptas: ita etiam in iis, quæ sensuum usu sub directione intellectus innotescunt, ejusdem regulas sequi debet. Nihil adeo a nobis prætermisum existimamus, quod methodus accurata exigere poterat. Cum in theoricis nonnulla den-

tur,

tur, quæ rigide demonstrata esse dici nondum potest, etsi rationi & experientiae admodum consentanea videantur, & quæ in usum Astronomiæ practicæ sumenda esse unanimiter hodie consentiunt Astronomi; veluti quod Terra moveatur motu vertiginis, & motu translationis circa Solem (§. 622), & descriptio Systematis mundi (§. 630); demonstrationis quoque titulum omisimus; ne, contra regulas Logicæ de demonstratione, pro tali venditemus, quæ non est, ut ab incautis vulgo pro tali habeatur. Nulli igitur dubitamus fore, ut certam nobilissimæ scientiæ cognitionem ex Elementis nostris hauriat, qui non perfunctoria opera in iisdem versari voluerit. In Theoricis secuti sumus hypothesin KEPLERI; quam cum cœlo magis consentire ceteris hypothesibus commentitiis omnibus in confesso hodie est, apud Astronomos omnes, fiducia observationum quibus in Astronomia omnia dirimenda. Quamobrem quoque placuit calculum geometricum explicare, qualem dedit KEPLERUS in Commentariis de stella Martis, & in Epitome Astronomiæ Copernicæ; ut & constructio Tabularum Rudolphinarum, & calculus Rudolphinus intelligatur. Quoniam tamen hodie majore fruimur luce in Geometria, quam KEPLERI ævo; ea quoque addidimus, quæ lubens ipse in theoriam suam recepisset, siquidem ipsi ea videre licuisset.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 301. Neminem vero, qui Dioptricam ante didicit, quam ad Astronomiam accederet; quemadmodum omnino fieri debet, ob exitium telescopiorum in omni Astronomia usum; offendet, ubi observaverit in theorica quædam sumi, quæ in rigore geometrico vera non sunt, ad veritatem tamen propius accedunt. Etenim in cognitione Naturæ mathematica, ad quam etiam Astronomia referenda, præsertim si more *Kepleriano* tractetur, non attendendus est rigor geometricus, modo constet quæ eodem invito sumuntur ad veritatem prope accedere; præsertim ubi theoria quæritur propter praxin, ubi approximationes æquipollent veritati. Vidimus quoque in Mechanica istiusmodi hypotheses in locum hypothesium naturæ utiliter substitui; immo si praxin unice respicias, substituendas esse. Quoniam tamen ad Astronomiam accedere licet, Mechanica seposita, statim a Geometria elementari & Trigonometria utraque; non inconsultum duximus denuo inculcare, quod attento lectori ex anterioribus jam patere poterat. Neque hoc abhorret a more priscorum Astronomorum, cum tamen antiquissimis temporibus rigor demonstrandi maxime sese probaret Geometris. Etenim in computo eclipsium sumserunt, quemadmodum adhuc fieri solet, lineas rectas pro arcibus circulorum, & triangula spherica in

Z z

plana

plana converterent, ad facilitandum calculum; propterea quod non committitur error sensibilis, sed qui observabili minor; error autem observabili minor in Astronomia practica habetur pro nullo. Huc etiam referri debet, quod in doctrina primi mobilis semidiameter Telluris habeatur pro puncto, respectu distantiae fixarum. Quando vero dicimus, in demonstrationibus astronomicis non semper observari rigorem demonstrandi; id non intelligendum de forma, sed de materia demonstrationis. Constat nimirum ex Logica, formam probationis semper eandem esse debere, nec ab ea unquam recedendum, si methodus accurata esse debet: id quod etiam ufui est in rigore demonstrandi agnoscendo; ne quis sibi persuadeat supponi, quæ vera sunt, sibi autem in memoriam venire nequeunt. Nullo igitur modo probamus, si rigor demonstrandi quoad formam negligatur; quicquid etiam videatur aliis. Notandum vero & hoc est; in Astronomia a rigore demonstrandi quoad materiam recedi, absque ullo scientiæ detrimento; quemadmodum etiam in Dioptrica contingit. Quod enim sumitur contra veritatem, eadem tamen non invita sumitur; quia quod sumitur quoad praxin in locum veri surrogare licet, nec sine utilitate. Alia vero longe ratio est, si dubium sumitur tanquam verum, non sine formidine oppositi. Hoc enim in casu sub-

eundum est periculum errandi, quale non metuendum in præsentī casu. Sunt equidem etiam in Astronomia, quæ dubia sunt, & ad certitudinem hætenus deduci minime potuerunt: sed ea a ceteris satis aperte distinguimus, ne cum certis confundantur. De hisce plura mox monebimus in sequentibus. Non vero vitio vertitur Astronomo, si in dubiis acquiescit, ubi certitudo haberi nequit: illud demum vitio vertendum fuerat, si dubia pro certis vendicaret. A priori nullum damnum metuendum scientiæ; a posteriori autem detrimentum patitur scientia. Ingenue confitentur Astronomi, se a certitudine adhuc abesse, ubi eam nondum consecuti; minime autem certa & explorata videri volunt, quæ non sunt. Immo si contingat a vero aberratum esse, observationibus contrarium ejus, quod statutum fuerat, loquentibus; dissensum ab observationibus minime dissimulant; multo minus erroribus incrustandis ac pertinaciter defendendis operam impendunt, prouti eruditis ceteris solenne. Veritatem nimirum quærunt, quam ubi nondum invenerunt, eandem invenisse videri nolunt; ne sibi non minus quam aliis ad eam inveniendam viam præcludant. In iis quoque, quæ dubia sunt, unus non ægre fert dissensum alterius, quantumcunque fuerit; nec propter dissensum unus alterius laudi detrahit, multo minus eundem insectatur, quem-

quemadmodum denuo ab aliis eruditis fieri assolet. Quamobrem & nos in dubiis adversas sententias recensuimus, citra injuriam in ullum dissentientium; & unicuique liberum reliquimus, cuinam illarum accedere velit, aut num inter extremas mediam amplecti malit.

§. 302. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, sive in Mathesi acquiescere, sive intellectum in usum philosophandi perficere velint, iis multa suppeditabit Astronomia. Et enim a parvis initiis continuo crevit, & per multiplices ambages ad ea tandem accessit, quæ a cognitione humana maxime remota videbantur. Ad progressum adeo Astronomiæ animum maxime attendere debet, qui artificia cognoscere studet, quibus abdita Naturæ rimari datur. Pars ejus spherica multo facilior theorica. Quamobrem de illa nobis primum sigillatim dicendum. Capite primo recensuimus observationes communes, ac inde prima Astronomiæ sphericæ principia stabilivimus. Observationes communes sua sese sponte offerunt cœlum contuentibus, nec vulgi captum transcendunt. Atque adeo liquet prima principia esse Astronomo cum vulgo communia. Neque etiam aliter fieri potuit, quam ut, qui primus de Astronomia cogitavit, aliunde notiones aliquas distinctas acquireret ad ulteriora profuturas, quam reflectendo super iis, quæ nemo ignorat, nisi rationis usu omni

destitutus. Per hæc communes observationes, cœlum percipitur instar spheræ cavæ, in cujus centro Terra est, cui insistimus, & cujus superficie affixæ sunt stellæ, quæ autem circa Terram continuo revolvitur. Vulgo hæc notio confusa est; sed Astronomus, qui notionem spheræ distinctam ex Geometria hausit, eam applicans ad ea, quæ percipit, distinctam consequitur notionem. Atque ita Astronomiæ studiosus, immo primus ejus inventor ultra vulgus sapere cœpit, dum, notione communi ad distinctam revocata, aditum sibi ad ulteriora pandit; cum vulgus in confusa acquiescens ulterius progredi nequeat, sed in iis, quæ percipit, subsistere teneatur. Quæritur vero jam, an quod apparet revera quoque ita se habeat; nimirum an cœlum sit spheræ cava, an Terra sit in centro ejus, ibidemque quiescat, an cœlum circa eandem continuo rotetur, an stellæ omnes superficie ejus sint affixæ? Hoc pacto liquet, quomodo statim inventori plura invenienda sese offerant. Quodsi ponas cum esse circumspèctum, ne per præcipitantiæ statuatur; ad quæstiones hæc animum advertens, eas omnes hinc pendere animadvertit, num semper quod apparet ita quoque revera sese habeat. Ponamus Opticam nondum esse inventam, quemadmodum probabile est Astronomiæ eandem ortum suum debere: nemo non videt re-

currendum fuisse ad observationes communes de iis, quæ nobis apparent. Videtur nobis cœlum sphaera cava, in cuius centro sumus; quod stellæ omnes eandem distantiam a Terra habere videntur; nullumque corpus aliud inter oculum & stellæ interpositum apparet. Quodsi ergo experientiam communem consulimus; objecta remota, etsi aliquo intervallo a se invicem distent, eodem tamen a nobis abesse videntur, ubi inter ea nullum aliud corpus interpositum conspiciamus; veluti dum arborem in agro a sylva procul adhuc remotam huic conterminam videmus e longinquo. Incertum adeo esse cognoscimus, num cœlum sit sphaera cava; num superficiei ejus affixæ sint stellæ; num denique Terra sit in centro. Cumque ex observationibus communibus hæc decidere non detur; quid statuendum sit, dubitandum; neque hæcenus apparet, quomodo a dubitatione liberari queamus. Immo ex progressu patebit, non adeo facile fuisse, ut ab eadem liberaremur. Non plura secula, sed integri millenarii elapsi sunt, antequam aliqua saltem probabilitatis specie statui potuerit, quid veritati consentaneum videatur. Liquet adeo, a præcipitantia non abesse, qui scepticismum amplectuntur, quamprimum animadvertunt se a dubitatione liberari non posse, adeoque veritatem frustra quæri sibi aliisque persuadent. Quodsi jam porro dispiciant,

num quod quiescere videtur, revera quiescat, & quod moveri videtur, revera moveatur; observationes denuo communes loquuntur, quiescentibus in re celerrime mota, quæ quiescunt in partem contrariam ferri videri; veluti dum curru celerrime vecto per sylvam arbores nobis in eodem sedentibus in plagam contrariam currere videntur, vel dum littora moveri in partem contrariam in navi celerrime mota sedentibus apparet. Quamobrem denuo in dubitationem adducimur, utrum Terra quiescat, & cœlum circa eandem rotetur; an vero stellæ quiescant & Terra motu vertiginis in plagam contrariam convertatur. Liquet autem, ut ante, ex observationibus communibus decidi minime posse, a qua parte stet veritas. Quodsi ergo qui primi ad Astronomiam animum apulerunt, scepticismo locum dare voluissent; omni adhuc Astronomia careremus. Enimvero quid faciendum erat in hisce angustiis constitutis? Ea tanquam dubia erant notandæ, & observationes communes ulterius expendendæ, num forsan per eas major lux sit affulsura, & an nos deducant ad alia intellectui magis obvia. Quodsi hoc facias, in notionem ortus & occasus incidis, quemadmodum capite primo ostendimus; quos ubi invicem confers notionem habes moræ supra horizontem. Secundam porro observationem expendens, continuam stellarum situs re-
spectu

specu verticis tui variationem deprehendis, distantia a vertice a primo ejus ortu continuo decrescente, donec ad minimam pervenerit, & deinde rursus crescente, donec ad maximam regressa in parte cœli opposita occidit. Præterea hinc discimus, continuo alias stellas oriri; eas autem, quæ per aliquod tempus conspicuæ fuerant, denuo occidere. Hæc ubi distincte considerantur, quærendorum sese offert numerus; nimirum quando stella aliqua oriatur, quando occidat, quanto temporis intervallo in parte cœli nobis conspicua commoretur, seu quodnam tempus inter ortum atque occasum intercedat, quanam sit minima ejus a vertice distantia, quandonam ad eandem perveniat, quo tempore singulas intermedias in utraque cœli visibilis parte acquirat. Nemo non videt, phænomena, quæ quærenda animo insinuant, pendere ab eo quod cœlum, cujus superficiæ stellæ affixæ sunt, videatur circa Terram quiescentem, in qua fixum tuemur locum, moveri, atque ex hoc assumpto rationem eorundem reddi posse. Unde manifestum est, in gratiam horum phænomenorum, ubi quæstiones, ad quas nos ea deducunt, resolvendæ, instar hypotheseos sumi posse; quod cœlum sit sphaera cava, in cujus superficie hæreant stellæ eidem affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem continuo gyra-
tur. Quoniam ex anterioribus con-

stat, phænomena eadem proditura, si Terra in plagam contrariam circa axem suum convertatur, cœlo cum stellis quiescente; æquipollentia utriusque hypotheseos probe perpendenda: ita enim constabit, ubi non quæritur nisi quæstionum illarum, quas commemoravimus, solutio, salva veritate sumi posse utramvis; consequenter in Astronomiæ parte prima, quæ de motu communi agit, nos feliciter progredi posse, etiam si ignoretur, quanam harum hypotheseosum sit vera. Enimvero utraque hypothesis non eadem facilitate sese commendat dictas quæstiones resoluturis. In inveniendo itaque & demonstrando præferenda ea, quæ faciliorem operam parit. Ac ea de causa in parte sphaerica Astronomiæ sumitur motus cœli & quies Telluris; ac bona methodus jubet sumi, etiam si contrarium verum esse invictis argumentis demonstrari posset. Etenim in inveniendo & demonstrando, præsertim ubi praxin intendimus, hypothesis vicaria in locum hypotheseos naturæ seu veritatis surrogatur; quemadmodum jam vidimus in aliis quoque disciplinis mathematicis fieri. Hinc itaque elucescit, progressui Astronomiæ sphaericæ non obesse ignorantiam veritatis, sed, eadem in dubio relicta, non minus praxi satisfieri, & in ea ad liquidam veritatem pertingi posse, ac si a primis dubitationibus prorsus essemus liberati. Neque dicendus es a vero aberrare ac

erroribus locum dare ; modo caveas, ne per præcipitantiam quoad ea erres quæ sumis. Etsi enim in præsentī negotio error non noceat, nocere tamen potest in aliis ; iis scilicet quæ ab eo pendent quod est, non vero ab eo, quod apparet.

§. 303. Probe ea, quæ modo dixi, perpendant velim, qui ad Philosophiam animum appellant ; etsi Mathematicis, qui, antecessorum suorum inventa addiscendo, sibi habitum quendam inveniendi compararunt, talia puerilia videantur & contemnuntur ; qui tamen contemptui dant pœnas, quoties de rebus philosophicis iudicium sibi sumunt, aut superbo supercilio Philosophiam contemnunt omnem, propterea quod quæ in ea vulgo docentur a certitudine, qualis in Mathesi datur, immenso intervallo distant. Quodsi vero acumine quo pollent usi, ad animum revocarent ea quæ modo dixi ; haud difficulter animadverterent, Philosophiam hætenus in infantia fuisse ; infantiam vero ejus prorsus convenire cum infantia Astronomiæ ; quæ, si ob eundem statum negligenda, non educanda fuisset, nunquam ad virilem ætatem adolevisset. Sane non rectius videre licet, quomodo scientiæ philosophicæ, quæ ex communi vulgi notitia tanquam ex semine nascuntur, in primo ortu esse debeant, quam si ad ortum Astronomiæ animum attendant. Quodsi porro eandem attentionem ad progressum ipsius afferant ; quid fieri de-

beat, ut Philosophia quoque humano generi adeo utilis adolescat, haud difficulter perspicient Astronomos imitaturi, quantum fert differentia, quæ inter cognitionem philosophicam & mathematicam intercedit. Demus exemplum. Communi experientia constat, animam in perceptionibus suis dependere a corpore, & vicissim corpus quoad motus organorum externorum & sui totius, ab anima. Hæc dependentia phenomenon est, quale est figura spherica mundi, cujus superficiem stellæ affixæ & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem continuo gyra-
tur. Philosophus, perinde ac Astronomus, notionem confusam revocat ad distinctam, animamque a corpore dependere agnoscit, quoad specificationem perceptionum & continuitatem temporis, quo cum mutationibus in organis sensoriiis contingunt ; & corpus ab anima, quoad specificationem motuum voluntariorum & continuitatem temporis, quo cum volitionibus animæ contingunt (§. 962 *Psych. empir.*) ; notationibus adjunctis ontologicis quemadmodum Astronomus geometricis. Atque hoc pacto primo passu discedit a cognitione vulgi, sibi aditum paraturus ad ulteriora. Quoniam vero novit, notationibus confusis non esse fidendum, cum per eas appareant haud raro, quæ non sunt ; ad hæc quæstiones delabitur, utrum illa dependentia sit realis, an vero saltem appareat ; seu num
anima

anima & corpus revera in se invicem agant, & a se invicem patiantur, an vero tantummodo in se agere, & a se invicem pati videantur; quemadmodum Astronomus quærit, num cœlum cum stellis fixis circa Tellurem in centro ejus collocatam revera moveatur, an saltem moveri circa eandem videatur, & utrum Telluris situs revera talis sit, qualis apparet, nec ne. Experientia communis quæstiones suas dirimi non posse, perinde ac Astronomus agnoscit. Quemadmodum enim hic motum cœli circa Tellurem non observat, neque etiam situm ejus in centro sphaeræ mundanæ; ita similiter Philosophus nullam observat actionem corporis in animam, nec animæ in corpus (§. 949, 955 *Psych. empir.*). Quodsi dicas, NEWTONUM, virum perspicacissimum, affirmare, actionem illam mutuam animæ ac corporis in se invicem, singulis momentis, nos experiri; facilis est responsio. Acumine summo polluit in geometricis, non vero in metaphysicis: acumen autem Geometræ, quod ab imaginatione pendet, non est idem cum metaphysico, quod imaginationi prorsus subducitur. Quemadmodum itaque per præcipitantiam judicarunt Astronomi, si qui experiri sese sibi visi fuerint figuram mundi sphaericam, situm Telluris in centro ejusdem, & motum continuum circa Tellurem in centro quiescentem; ita quoque per præcipitantiam judica-

vit NEWTONUS, quando sibi visus fuit experiri actionem mutuam corporis ac animæ in se invicem, qua una substantia in modificationibus suis efficiatur dependens ab altera. Ab hac præcipitantia sibi utique cavisset, siquidem ortum Astronomiæ distincte expendere voluisset, Astronomiam non sibi soli addiscens, sed in usum quoque philosophandi. Quod hoc facere debuerit, minime contendimus, nullius jus violaturi, quod Natura unicuique concessit; utpote qui ab omni injuria procul remotum habemus animum, multo minus ejus laudi detrachere cupimus, quam summam ipsi merito suo magno deferimus; ne quicquam contra humanitatis officia, ad quæ aliis prompte præstanda obligamur, admittamus. Veritati non minus debetur honos suus, quam hominibus præclare de eadem detegenda, & ejus thesauris amplificandis, promeritis. Neque præsumendum est, viros magnos velle, ut, dum laudamus, adulemur; cum adulatio potius ansam det laudibus promeritis detrahendi, quam eas amplificandi, nec ipsi appetere censendi sint nisi veritati consentaneas. Certum adeo manet, Philosophum circumspectum, non minus ac Astronomum (§. 302), in dubitationem adduci, quid de dependentia animæ ac corporis a se invicem, in modificationibus suis, statuendum sit, ubi ejus ratio ex essentia & natura utriusque red-
denda;

denda ; quemadmodum eam non aliunde reddendam esse per prima philosophiæ principia edoctus est. Quemadmodum vero Astronomus, in limine Astronomiæ adhuc constitutus, non videt quomodo a dubitatione liberari possit ; ita similiter nec Philosophus, in limine Philosophiæ adhuc constitutus, reperit quomodo ex dubitatione eluctari queat. Quid igitur faciendum ? Num animus omnis prorsus abjiciendus & in scepticifimum eundum ? Absit ut hoc faciat, qui philosophari decrevit ! Imitari convenit Astronomum. Inquirendum itaque, num observentur alia, quæ ab ista mutua modificationum animæ ac corporis dependentia a se invicem porro dependent. Videmus a sensatione pendere alios actus facultatis cognoscitivæ, & ab his actus facultatis appetitivæ & averfativæ : videmus etiam actuum non minus internorum animæ, quam motuum organorum corporis, seu actionum externarum, determinationem pendere a nutu animæ ; consequenter eidem competere directionem actionum externarum & internarum quandam. Horum rationem reddi posse apparet ex mutua illa dependentia. In hæc igitur omnia inquirere, & praxes hinc a priori deducere licet ; nondum licet cognita ratione mutue illius dependentiæ modificationum animæ ac corporis a se invicem. Quamobrem sicuti in Astronomia sumimus motum communem tanquam

phænomenon, & inde deducimus alia, quæ ab eodem pendent, parum solliciti, num revera detur, an saltem appareat ; ita quoque, in Philosophia, mutua animæ ac corporis quoad modificationes a se invicem dependentia sumenda tanquam phænomenon, ac inde deducenda sunt alia, quæ hinc porro pendent ; nec ea Philosophum tangere debet cura, num illa dependentia realis sit, an tantummodo apparens, & quam sit ejus causa. Immo cum constet, quæcunque tandem causa sit illius dependentiæ, semper tamen supponendum esse animam & corpus ita agere, ac si in se invicem influerent ; quemadmodum in Psychologia rationali evicimus ; si vel maxime falsum esset, animam & corpus in se invicem influere, veritate tamen illæsa, sumi potest tanquam hypothesis naturæ vicaria, quoad regimen corporis, quod animæ tribuitur, immo quoad regimen sui ipsius, quatenus a corpore pendere videtur, animam & corpus in se mutuo influere ; quemadmodum, in Astronomia, quoad motum communem sumimus, cælum esse sphaeram cavam, cujus superficiæ affixæ sunt stellæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus collocatam ab oriente in occidentem convertitur ; etiamsi persuasi simus, hæc a veritate abhorrere, ob rationem paulo ante (§. 302) dictam. Memini cum systema harmoniæ præstabilitæ maxima animorum acerbitate impugnaretur,

tur, quasi per ipsum omnis moralitas, omne regimen politicum, immo omnis religio funditus evertatur, cumque ad avertendum tantum ab eo periculum ista monerem; Theologo cuidam celebri hoc paradoxum, immo absonum visum fuisse. Sed hoc ipsi condonandum erat, tanquam methodi demonstrativæ, ac Artis analyticæ prorsus ignaro, cujus nec notionem ullam, nec exemplum habebat. Ecquis enim est qui nesciat, si vel in sola Mathesi attentionem suam desiderari minime passus fuerit, sine methodi demonstrativæ notitia, nemini esse posse ideam dependentiæ veritatum a se invicem, nec sine Artis analyticæ cognitione constare posse, quænam, etsi nondum definita, sumi queant illæsa veritate ad alia investiganda, quæ usum in praxi habent? Enimvero, si qua sunt quæ a causa illius mutuæ ac corporis dependentiæ a se invicem dependent; tum ea non amplius sumitur tanquam vera, nisi demonstratum fuerit, utrum ea realis sit, an tantummodo apparens; quemadmodum in parte theórica, Astronomi non amplius sumunt Telluris quietem & motum communem, sed potius motum vertiginis Telluris, cœlique ac stellarum quietem. Poteramus alia addere exempla, ex Physica generali pariter, ac speciali, nisi unicum sufficeret, ut intelligatur, quomodo in re præsentī Astronomum imitari debeat Philosophus.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

§. 304. Postquam in Astronomiâ parte sphericâ Astronomi sumserunt, cœlum esse spheram cavam, cujus superficiē stellæ omnes sunt affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem ab oriente in occidentem continuo circumvolvitur; ad hoc phænomenon Geometriam applicarunt, ut alia hinc pendentia determinarent, cum phænomenorum motus primi, sive communis, cognitionem mathematicam quærent. Quamobrem qui tertium cognitionis gradum intendit, in capite secundo, quod de circulis spheræ mundanæ agit, ei inquirendum est, quem in finem circulos istos in ejus superficie descriptos imaginentur. Ipsa natura quasi circulum descripsit, qui visum oculi undiquaque terminat, & spheram mundanam in duo hemisphæria dividit, Horizon ideo dictus. Circulus hic immotus est, dum spheram mundanam continuo volvitur; adeoque ultra spheram mundanam imaginari tenemur aliam immobilem, in cujus superficie peripheria hujus circuli descripta. Ipsa adeo natura Astronomos deduxit ad distinguendos circulos mobiles ab immotis, antequam perpenderent, quales circuli superficiē spheræ mundanæ sint inscribendi. Videmus hinc cognitionem Naturæ mathematicam, imaginaria admittere, tanquam principia ex quibus deducitur, & fictionibus locum dare: id quod præpostere imitari minime

A a a

debet

debet Philosophus; etsi in nonnullis utiliter imitetur, quemadmodum modo vidimus (§. 303). Hinc vero accidit, quod Mathematici, ad res philosophicas celeri nimis gradu properantes, imaginaria a realibus non distinguant; & notiones in Mathesi toleranter veras, tanquam reales, importuno ausu in Philosophiam inferant; quemadmodum nec alia fuit ratio, quod olim Physici mundum ex sphaëris crySTALLINIS cavis compositum finxerint; donec tandem hypothesis insulsa, a TYCHONE DE BRAHE explosa, nullam amplius hodie inveniat fidem. Utinam huc animum serio adverterent, qui, ex Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis & Optica Mathematici summi ISAACI NEWTONI, nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpere volunt; quasi notiones imaginariæ, quæ ad cognitionem Naturæ mathematicam sufficiunt, & in ea foecundæ deprehenduntur, in Philosophiam primam & naturalem utiliter inveherentur; immo quasi ex istis notionibus imaginariis inferri possent, quæ ad Theologiam naturalem, & Cosmologiam generalem spectant. Idem enim revera agunt, quod fecere antiqui, qui notionem imaginariam mundi, quæ Astronomo in explicando motu communi adeo proficua fuit, tanquam realem in Physicam inferre ausi sunt. In usum cognitionis mathematicæ multa fingere licet; sed fictiones istæ mathematicæ non

sunt veræ causæ, quibus effectus Naturæ intelligibili modo explicantur. Absit autem, ut quis hinc inferat, quasi laudibus Mathematicorum detrahere & supra Mathematicos Philosophos extollere velimus! Neque enim nobis jam propositum est Philosophos cum Mathematicis committere, nec de Jure præcedentiæ controversiam movere. Diversitatem saltem notionum imaginariarum & realium inculcamus; ne in detrimentum scientiæ confundantur, quæ diversa sunt; sed legitimus utrarumque conservetur usus. Nihil decedit laudi Mathematici, etsi non habeatur Philosophus: quemadmodum nec Philosophos laude sua, quam meretur, frustratur quod non simul habeatur Mathematicus. Mathematici & Philosophi in numerum eorum entium referendi, quorum non est ad se invicem ratio; utut maxime consultum sit Philosophum simul esse Mathematicum, præsertim ubi in Philosophia ad tertium cognitionis gradum adspirat; cum Mathematicus in arte sua summus esse possit, utut nullam inter Philosophos laudem mereatur.

§. 305. De sphaëricorum theoria non ante cogitarunt Geometræ, quam cum Astronomia ad eandem eos invitaret. Qui ergo ad tertium cognitionis gradum adspirat, ei suademus, ut primo, in usum secundi, totum caput secundum perlustret, & quomodo principia illius theoriæ ad sphaë-

sphæram mundanam applicentur expendat, donec singula, quæ hic explicantur & demonstrantur, habuerit perspecta; parum sollicitus, quomodo primi inventores in ea incidere potuerint. Enimvero ubi singula ipsi probe cognita atque perspecta fuerint; jam secundis curis idem caput perlustrat; atque jam supponat, quasi nulla adhuc prostacket sphæricorum theoria; & inquirat, quomodo supposito phænomeno, (quod veluti basis est totius Astronomiæ sphæricæ, tanquam fonte rationum de ceteris quæ quæruntur reddendarum, dum in phænomenorum motus communis rationes inquirimus,) in circulos, quæ in sphære superficie concipi debent, aut si mavis tanquam sphæram secantia plana considerantur, incidamus. Immo non inconsultum erit, si ante, quinque priora capita, in usum secundi gradus cognitionis, pertractet, quam quæ in usum tertii perpendenda sunt, exquirat; quoniam hoc pacto evidentius ipsi constabit, quænam sint phænomena motus communis in hac Astronomiæ parte determinanda; sicque facilius apparebit, quonam circulatorum apparatu ea fini sit opus. Dum vero curis secundis caput secundum percurrit, attentione inprimis opus est, ut observetur, quomodo theoria imperfecta nos deducat ad observationes, quibus perficiatur, simulque ad observationes, quibus ad praxin aptatur. Ex. gr. Vi phænomeni fun-

damentalis, sphæra mundana circa Tellurem continuo circumvolvitur. Enimvero quæritur an puncta illa fixa circa quæ rotatur, & qui poli dicuntur, semper sint iidem; an vero mutantur. Quid sumi debeat, per observationes definiendum. Similiter, cum motus vel æquabilis, vel inæquabilis, esse possit, & celeritas in diversis revolutionibus vel eadem, vel diversa; denuo quid sumendum sit per observationes definiendum. Equidem per modum hypotheseos sumi potest, polos semper manere eosdem, motum non modo esse æquabilem, sed eandem quoque esse in qualibet rotatione celeritatem. Enimvero, ubi examinanda hypothesis, ad observationes tandem confugiendum. Atque adeo videmus, quomodo theoria imperfecta beneficio observationum reddatur perfectior. Similiter, ubi per theoriam agnoscis Meridianum secare hemisphærium in duas partes æquales, & in eodem altitudines stellarum esse maximas, seu distantias a vertice minimas quas habere possunt; in usum praxis situs Meridiani determinandus est respectu tui loci. Nec absimili modo patet situm quoque poli respectu loci tui determinandum esse. Deducit adeo nos theoria ad observationes, quibus eadem ad praxin aptatur. Unde liquet, quomodo ea, quæ per meditationes deteguntur, ulterius quærenda insinuent, de quibus ante cogitare non poteras. Probe autem notan-

dum est, quomodo observationes sine circulo vitioso, quem Logici vocant, instituantur, quando utraque alteram supponere videtur, quales subinde in Astronomia occurrunt. Habemus exemplum, in invenienda linea meridiana, ad determinandum planum meridiani in dato loco §. 120. Etenim ea supponit stellæ declinationem, vel etiam Solis intra tempus observationis non mutari. Supponit observatio immutabilitatis declinationis immutabilitatem poli, quæ ex immutabilitate altitudinis maximæ, adeoque in plano meridiani, demonstratur §. 114. Quod si tamen perpendas, quæ §. 110 & seqq. docentur; videbis, quomodo absque periculo circuli vitiosi committendi hæc dirimantur. Equidem non negaverim, initio Astronomos plurima sumisse per modum hypotheseos, quemadmodum idem quoque haud raro fieri debuisse ex Theoricis constabit; & cum ex istis hypotheseos deducta cum cœlo, deinceps per alias observationes, consentire deprehenderent; assumtis demum plenum assensum præbuisse: hoc tamen minime obstat, quo minus Astronomiam methodo synthetica tradituri ostendamus, quomodo scrupulosiores in infantia statim Astronomiæ certitudini prospicere potuerint; cum nobis propositum sit eam ita tradere, ut methodum imitari liceat, non modo in Philosophia naturali, verum etiam in aliis ejus partibus, ubi

a posteriori quædam stabilienda, ut alia inde deduci queant.

§. 305. Qui tertium cognitionis gradum intendit, problemata per Trigonometriam sphericam soluta analytico more expendere debet. Artificium heuristico, quo hic utendum, in eo consistit, ut intersectione circulorum sphaeram secantium detegatur triangulum, cujus id, quod quaeritur, pars aliqua est, sive latus, sive angulus; ac præterea attendatur, num per observationem, principia spherica, aut calculos præcedentes dentur tres ejusdem trianguli partes alia. Constat enim ex tribus datis per Trigonometriam sphericam semper inveniri posse quartum, quod quaeritur. Facillimum exemplum præbet problema quartum §. 198, quo inveniri jubetur puncti cujuscunque dati Eclipticæ declinatio. Quoniam declinationem metitur arcus circuli maximi, inter æquatorem & punctum datum interceptus, atque ad æquatorem perpendicularis (§. 76 *Astron.*), qui circulus declinationis dicitur (§. 78 *Astron.*); hinc colligitur, animum advertendum esse ad æquatorem, eclipticam & circulum declinationis. Quamobrem in charta describitur circulus, qui sphaeram mundanam representare fingitur; cumque situs æquatoris dependeat a polis mundi (§. 48 *Astron.*); in eo sumitur pro arbitrio Tab. IV. punctum P, quod polum represen- Fig. 40. tet. Jam æquator sphaeram mundanam in duo hemisphæria dividit (§. 50 *Astron.*)

Astron.), & singula ejus puncta a polo mundi quadrantis intervallo distant (§. 49 *Astron.*). Ex polo igitur P, intervallo quadrantis AP, describitur circino arcus AQ, qui æquatorem repræsentat. Cum polus eclipticæ certo intervallo a polo mundi P distet (§. 179 *Astron.*), & illa æquatorem secet (§. 172 *Astron.*); pro arbitrio sumitur punctum M tanquam polus eclipticæ & ex eo quadrantis intervallo ME describitur arcus EL, qui eclipticam repræsentat, & æquatorem AQ in G fecat. Cum circulus declinationis transeat per polos mundi P & p (§. 78 *Astron.*) & ex principiis sphericis pateat, quod poli ejus sint in æquatore, punctum vero S in ecliptica pro lubitu sumi possit; describatur denique arcus PSD, qui quadrantem circuli declinationis repræsentat (§. 79 *Astron.*). Patet hoc modo intersectione æquatoris, eclipticæ & circuli declinationis obtineri triangulum DGS in superficie spheræ mundanæ, cujus crus DS repræsentat declinationem puncti eclipticæ S, quæ quæritur. Inquirendum igitur porro est, num in eodem triangulo tria tanquam aliunde cognita deprehendantur. Quoniam itaque punctum eclipticæ S, cujus declinatio quæritur, pro lubitu sumitur a Tabularum conditore, aut in alio casu datur; in priori casu punctum G, in quo ecliptica æquatorem secat, sumi potest, vel pro principio arietis, vel pro principio

libræ (§. 158, 160 *Astron.*), in posteriori ex dato puncto eclipticæ patet, num punctum G repræsentet principium arietis, an vero principium libræ. Ponamus in præsentī punctum G esse principium arietis. Quia punctum eclipticæ S datur, ejus distantia a principio arietis seu arcus eclipticæ SG datur. Datur præterea angulus obliquitatis eclipticæ per observationem (§. 163, 178 *Astron.*). Et ex sphericis constat angulum ad D esse rectum (§. 76 *Astron.*). Habemus itaque in triangulo DGS tria data, nimirum angulum rectum D in intersectione æquatoris AQ & circuli declinationis PD, angulum obliquitatis eclipticæ G, distantiam SG puncti eclipticæ S a puncto æquinoctiali G. Inveniri autem debet latus DS angulo obliquo G oppositum: id quod fieri posse, per Trigonometriam sphericam patet. Videmus adeo, qua analysi resolutio problematis de invenienda declinatione puncti cujuscunque eclipticæ fuerit investigata, & ex hac analysi facile condi poterat demonstratio problematis ad morem Veterum Geometrarum, siquidem tanto rigore demonstrandi foret opus. Nimirum qui ad Astronomiam accedit, cum in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ, Trigonometriæ utriusque & sphericorum, Opticæ item, Catoptricæ atque Dioptricæ jam ita versatus supponatur, ut, quæ in istis Ma-

theseos partibus traduntur, familiaria experiatur, in Methodo demonstrandi jam satis exercitatus est, ut non minutissima quæque ipsi enucleari sit opus. Non tamen inconsultum est, ut, qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navat, eodem rite extra eandem ufusus, analysi quam hic commendamus sedulo incumbat, ac syntheticas demonstrationes hinc eruat.

§. 306. Qui in seipsis experiuntur se, absque ista analysi quam hic urgeamus, sine mora schemata delineare, & triangulorum resolutiones invenire posse, ac absque demonstratione hinc derivata, veritatem solutionis problematum propositæ perspicere; tantum apparatus condemnabunt, ac tempus inanibus speculationibus falli existimabunt, quod longe utilius in aliis addiscendis collocari queat. Immo non deerunt, qui, cum inter Astronomos merito suo emineant, analysin istam ac derivatas inde syntheticas demonstrationes inter superflua referent; forsan tanquam puerilia prorsus ridebunt. Quamobrem apprime necessarium videtur, ut quædam ad avertendum præjudicium philosophaturo admodum nocuum annotemus. Nemo in dubium vocare potest, omnibus istis notionibus quæ analysin nostram ingrediuntur, animum ejus imbutum esse debere, qui proprio Marte solutionem problematis de investiganda declinatione singulorum graduum,

aut puncti cujuslibet eclipticæ invenire, aut veritatis ejusdem, ubi ab alio inventa supponitur, plene convinci debet. Pone enim quamcunque illarum esse tibi incognitam; exemplo constabit, tibi de veritate solutionis dubium aliquod adhuc superesse; consequenter abesse convictionem, quæ omnem dubitationem excludit. Notiones igitur istæ omnes influunt in determinationem assensus, quem præbes solutioni tanquam veræ. Quamobrem si distincte exponendum, quomodo generetur assensus, & qui fieri potuerit, ut a priori in solutionem problematis inciderit primus inventor; nulla illarum notionum prætermittenda; sit ita quod inventor, vel qui solutionem jam inventam addiscit, in confusis notionibus acquiescat, nec quæ ideæ a qua pendet convictio insunt, singula a se invicem actu mentis discernat. Sane cum Philosophi sit rationem reddere istius assensus ac modi, quo ad solutionem problematis inventor pervenire potuerit; nemo nisi cognitionis philosophicæ contemtor reprehendet, quod quæ actibus animæ insunt distincte explicet, utut utilitatem non pervideat. Hanc vero esse maximam, si quis animum ad philosophandum appellit, haud difficulter ostenditur. In Astronomia, schemata, notiones, quas antea tibi comparavisti, imaginationi præsentis sistunt; ut confusa quædam idea animum attendenti sufficiat ad veritatem protin-

protinus perspiciendam. Enimvero in Philosophia, præsertim in Metaphysicis ac Moralibus, istiusmodi subsidio destituimur, quo imaginatio apta efficitur ad vicarias intellectus operas præstandas; nec confusis ejus ideis tuto fidere licet, siquidem errandi periculum subire nolueris. Ipse igitur intellectus agere debet, quod suum est; adeoque non admittendæ sunt nisi notiones distinctæ, nec in exacta earundem evolutione unquam nimii sumus; siquidem eam desideraverimus evidentiam, quæ in Mathesi datur. Quamobrem ut evolutioni huic adsuescamus, consultum omnino est analysin problematum primi mobilis instituere, quemadmodum præcepimus: id quod in Astronomia multo facilius succedit, quam in Philosophia; quia intellectus dirigitur ab ipsa imaginatione, modo ad imaginem, quæ ob oculos versatur, animum attendas; cum, in Philosophia, imaginatio ac sensus suppetias ferre nequeant, sed intellectui magis obstaculo sint, ne suo munere dextre fungatur. Non suadeo nisi experta & quorum veritatem in seipso experiri poterit, qui voluerit. Quicquid igitur videatur aliis, qui Astronomiæ totos sese dederunt, nec Philosophiæ excolendæ operam impendendi otio fruuntur; ego istam Analysin admodum proficuum judico omnibus, quotquot ad hanc excolendam animum appellere decreverunt. Neque enim existimandum

est levi opera consequi te posse, ut methodo demonstrativa in philosophando rite utaris. Plurima enim sunt, ad quæ per exempla felicius, quam per præcepta patet aditus: exempla vero tutissima offert Mathesis, si accurata demonstrationum analysis curæ cordique fuerit. Nos, quibus methodi intimius cognoscendæ cupido studium Matheseos commendavit a prima ætate, Mathesin quoque hoc nomine maximi facimus. Non jam commemorare lubet, quod distincta usus facultatum animæ explicatio augeat scientiam philosophicam, & quod eum cognoscere teneatur Philosophus, si in Philosophia morali tradere velit, quæ satis faciunt: hic enim, ubi intellectus perficiendi nonnisi ratio habetur, ad methodum tantummodo digitum intendimus.

§. 307. Non lubet ad particularia descendere, quæ utiliter moneri poterant: neque enim consultum est, ut prima statim vice minutissime persequatur singula, qui intellectus perficiendi gratia ad studium astronomicum accedit. Quodsi enim hisce tantummodo observatis, quæ docuimus, ad studium psychologicum & ontologicum accesserit; in Ontologia & Psychologia probe versatus, proprio, quod acquisivit, acumine detegat, quæ adhuc annotari poterant. Merentur autem attentionem, quæ de refractione, parallaxi, & crepusculis dicuntur; eo etiam fine, ut intel-

intelligatur, quam necessarium sit experientiae & rationis connubium, ne per theoriam fieri posse videantur, quæ tamen in praxi minime succedunt. Nimirum qui experientiam negligit, subinde fieri posse sumit, quæ ob circumstantias a priori non definiendas haud quaquam fieri possunt. Unde contingit nos incidere in resolutiones problematum, quibus satisfieri nequit. Observanda hæc sunt Philosopho, non minus in Philosophia morali, quam civili; ne sibi jam consecutus videatur, quæ adhuc in quærendorum numero sunt; & a veritate inquirenda desistat, quam detegere in potestate ipsius erat, modo præiudicio isto non habuisset mentem præpeditam.

§. 308. Parstheorica Astronomiæ ad perficiendum intellectum, ut eodem extra Mathesin utaris, plurimum confert; modo omnem afferas attentionem ad methodum, tantopere a nobis commendatam, & tam sollicitè inculcatam. Capite primo & secundo, in quibus de natura Solis ac Lunæ, ceterorumque planetarum, tam superiorum, quam inferiorum, eorumque satellitum agitur; docentur, quæ ad Physicam magis, quam Astronomiam spectant, etsi Astronomus jure suo sibi ea arroget, quæ observationibus suis debentur. Quamobrem hinc discere licet, quomodo utiliter in Philosophia naturali, seu Physica, sit versandum; nimirum quomodo quærendæ sint observa-

tiones tam communes, quæ sua veluti sponte sese offerunt, quam studio quælitæ; ac inde a posteriori colligantur propositiones, quas a priori detegere non dabatur, principiis ad ratiocinandum necessariis deficientibus. Nos in Physica dogmatica, quam idiomate patrio evulgavimus, eandem viam ingressi sumus. Etsi autem facilis videatur hæc methodus; non tamen adeo facilem deprehendet, quantum putat, qui eadem rite uti voluerit. Nimirum acumine non nisi multa exercitatione acquisito opus est, ne observationibus inferantur, nisi quæ sensui patent; ut eadem ab omni prorsus vitio subreptionis, quod in Logica vocamus, sint liberæ: qua in re multum peccatur a Medicis, utut virorum experientissimorum titulum, quasi sibi proprium, dudum consecutis. Neque facilius est facta, quæ observantur, notione distincta comprehendere, & verbis aptis singula in eadem contenta enunciare, ut certi quid inde concludi possit. Artis præterea est, nec plus, nec minus inde colligere, quam certo ratiocinio inferri potest. Qui his accurate satisfacere voluerit, etsi in demonstrando nihil difficultatis deprehendat, nondum tamen ex voto omnia sibi succedere experietur. Quamobrem ad observationes, quas commemoramus, animus probe attendat; ut idea exemplaris eas rite describendi animo insinuetur; nec minorem attentionem afferat ad corollaria

laria, in quibus propositiones ex iisdem eliciuntur; ut modum stabilien- di per observationes principia, seu ex iis eruendi propositiones, comprehen- dat. Utilitatem non modo in Physica, verum etiam in ipsa Philosophia mo- rali & civili experietur. Inprimis etiam eandem animadvertet, qui Medicinam ad maiorem certitudinem perducere voluerit. Sed memini me de hisce jam plura dixisse, in Horis subsceivis, cum de Medico Astrono- mum imitante verba facerem. Non inanem operam sumet, qui ea, quæ in Logica de experientia præciuntur, cum observationibus ac inde dedu- ctis propositionibus confert: ita enim facilius intelliget regulas methodi, quas proprio Marte abstrahere non poterat. Immo praxin Logicæ, quoad hanc partem, hoc pacto sibi compara- bit. Qui novit, quantam utilitatem nobis afferat cognitio a posteriori ac- quisita; cum nunquam poenitebit stu- dii, quod in methodo hac intimius perspicenda collocaverit.

§. 309. Theoricam tradidimus jux- ta hypothesein COPERNICI, atque KEPLERI; nimirum supposito Ter- ræ motu, & orbitis Planetarum elli- pticis; in quibus Planetæ ea lege in- cedunt, quemadmodum sagacitate sua primus detexit KEPLERUS; pro- pterea quod sic prodit theoria cum coelo omnium maxime consentiens. Etsi autem methodum *Kepplerianam* exposuerimus computandi loca Pla- netarum; non tamen negleximus,

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

quæ recentiorum industria, postquam Geometria & Astronomia magis ex- culta fuit, ad ejus perfectionem ulterio- rem accesserunt. Quodsi tamen quis tertium cognitionis gradum intendit, ei suademus, ut, probe intellectis iis, quæ de motu Planetarum elliptico tra- duntur, Astronomiam quoque vete- rem perlustret, qualem tradidit PTO- LEMÆUS, juxta Epitomen a REGIO- MONTANO factam, & in subsidium vo- cato RICCIOLI *Almagesto*, in quo ex- ponuntur, quæ ad eam magis excolen- dam post eum accesserunt. Hinc enim omnium optime addiscet, quomodo Philosophia naturalis per hypotheses sit excolenda, ubi ad veritatem liqui- dam pertingere non licet; & eundem morem imitabitur in Medicina ad cer- titudinem successive evehendam; im- mo in reliqua etiam Philosophia, præ- sertim practica, ac ipsa praxi vitæ hu- manæ. Equidem non ignoro esse ho- die nonnullos, qui omnem hypothe- sium usum in Philosophia naturali & Medicina damnant; sed hi, propter abusum, ipsum etiam usum rejiciunt: id quod sine scientiæ incremento haud quaquam facere licet. Diximus non- nulla huc spectantia in Discursu præli- minari de Philosophia, quem Logicæ præmisimus, methodum philosophi- cam explicantes. Laudant quidam NEWTONUM, quod ex Philosophia naturali eliminaverit hypotheses; qui tamen hypothesis indulget in iis ipsis, in quibus cum ab iisdem ab- stinuisse existimant. Quid enim at-

B b b

tra-

tractio, seu gravitas universalis quæ per modum attractionis repræsentatur, aliud est quam hypothesis, quæ in gratiam quorundam phænomenorum sumitur, & ad omnem deinde materiam extenditur? Immo nonne explicatio systematis mundani, quæ præcipua pars est Principiorum Philosophiæ naturalis mathematicorum, per motum projectionis, & gravitationem in Solem, aut centrum Planetæ primarii, hypothesis philosophica est; quam HEVELIUS in *Cometagraphia*, ad imitationem motus projectorum a GALILÆO detecti, imaginatus est, & quæ in Mathesi utiliter surrogatur in locum hypothesis naturæ; phænomenorum autem causas physicas non attingit, quas scrutari debet Physicus? Facile quidem largior hoc non videre eum, qui soli Mathesi assiduam operam navavit, ac ideo notionibus imaginariis animum imbutum possidet: extemplo tamen videt, qui cum Matheseos studio Philosophiæ, præsertim Metaphysicæ, studium conjunxit. Sed mittamus hæc, & per nos suo quisque abundet sensu. Videamus potius, quomodo in cognoscenda methodo, per hypotheses cognitionem humanam promovendi, sit progrediendum. Quemadmodum in anterioribus observavimus, omnem cognitionem humanam initium capere ab observationibus communibus; ita similiter de parte Astronomiæ theoricæ idem dicendum. Ex observationibus communibus innotuit motus proprius Solis (§. 27 *Astron.*): quo scilicet indies, ab occasu versus ortum,

certo intervallo promovetur (§. 30 *Astron.*): non tamen tanquam verus; cum applicata Mathesi ad observationem constet (§. 571 *Astron.*), motum Solis eodem modo e Tellure spectari, sive ipse circa Terram intra orbitam quiescentem revera moveatur, sive Terra circa Solem quiescentem feratur. Quando itaque Astronomus sumebat Terram quiescere, & Solem motu annuo circa eandem ab occasu in ortum moveri; quod sumebat, hypothesis erat, quæ, admissio motu vertiginis Telluris, hypothesis naturæ æquipollet; si quod autem sumitur a veritate alienum, admissio motu communi tanquam vero, hypothesis non nisi imaginaria est, cui adeo in Mathesi quidem locus conceditur, minime autem in Physica. Finge jam Astronomum noluisse uti hypothesis: nemo Astronomiæ gnarus diffitebitur, cum statim in limine nobilissimam hanc scientiam deserere debuisset, nulla spe ad veritatem liquidam perveniendi relicta, absque conjecturis hypothesis in nixis. Immo si quis, posito motu communi tanquam vero, hypothesis imaginariam de motu Solis communi, in Philosophiam naturalem, tanquam veritatem, inferre voluisset; ecquis sanus Philosophus hoc approbare potuisset, propterea quod ea satisfacit Astronomo ad cognitionem mathematicam motus proprii Solis acquirendam? Ex observationibus itidem communibus, sed majore attentione factis, constabat, Solem ab eodem puncto digressum ad idem redire.

Hinc

Hinc primum erat inferre, quod Sol motu proprio feratur per lineam in se redeuntem, intra cujus ambitum collocata Terra. Enimvero cum infinitæ sint lineæ in se redeuntes, quemadmodum ex Geometria constat; quæstio incidebat, quænam linearum in se redeuntium sit orbita Solis. Ex Geometria elementari notum erat, in harum numero esse circulum, cujus proprietates & symptomata sunt magis obvia quam ceterarum. Sumebant igitur Astronomi, per modum hypotheseos, orbitam Solis esse circularem. Quodsi hypothesei uti nolissent, non sumendum esse contententes, nisi quod sit demonstratum; impossibile fuisset, ut theoriam motus Solis cœlo consentientem detegerent, & Astronomia adhuc deserta & inculta jaceret. Enimvero, quemadmodum in veritate investiganda accidit, ut, si uni quæstioni satisfacias, quantum datur, nimirum vel veritatem detegendo, vel conjecturæ locum faciendo, enascantur aliæ; ita etiam in casu præsentis jam quærebatur, in quonam puncto, intra ambitum circuli sito, posita sit Ter-

Tab.IV.
Fig. 41.

ra. Ex Geometria elementari tyronibus notum est, circulum AHPI habere centrum C, a quo singula puncta peripheria AHPI æqualiter distant. Quæstio igitur huc redibat, num Terra sit in centro orbitæ C, an vero extra centrum veluti in T. Eam dirimere non licebat, nisi denuo interea alterutro assumpto tanquam vero, consequenter confugiendo ad hypothesein. Nullum adeo est dubium, quin primus inven-

tor sumserit, veritatis investigandæ gratia, Terram esse in centro C. Inquirendum ergo erat, quomodo loca Solis definiantur ad datum tempus, in hac hypothesei, ut locus Solis computatus cum eo, qui per observationem eruitur (§. 203 *Astron.*), conferri, sicque hypotheseis ad examen referri posset. Hoc ubi investi-
Tab.IV.
Fig. 42.
gare volebat Astronomus, cum per principia Geometriæ elementaris ipsi perspectum esset, si arcus AD & DE sint æquales, angulos ACD & DCE esse æquales (§. 141 *Geom.*); nova incidebat quæstio, utrum Sol motu æquabili incedat in orbita sua, ut arcus AD & DE æquali tempore percurrantur, an vero inæquabili, ut iidem arcus absolvantur tempore inæquali. Nemo non videt, hic denuo confugiendum fuisse ad hypothesein, alterutrum horum assumendo tanquam verum; donec examen hypotheseos, per observationes decretorias, proderet quod certum est. Cum motus æquabilis sit uniformis, & intellectu facilius inæquabili; legibus artis conjectandi, quibus in assumendis hypotheseibus locus est, conveniens erat supponere, quod sit æquabilis. Unde enascebatur hypotheseis Solis concentrica, qua Sol supponitur motu æquabili incedere in orbita sua secundum signorum successionem, Terra in centro ejus collocata. Atque hoc pacto hypotheseis sufficienter determinata erat ad calculum geometricum instituendum; ut adeo non alia re opus esset, quam

Tab. IV. Fig. 43. ratiocinando hinc colligere, quæ ad eum spectant. Si Sol motu æquabili percurrit orbitam; arcus, quos percurrit AF & FG, consequenter etiam anguli ACF & FCG, sunt tempori proportionales. Quamobrem, ut dato tempori respondens angulus ACF, seu arcus AF, computari possit, notum esse debet, quo tempore Sol integram orbitam percurrat: quod cum fit facti, aliter innotescere non poterat, nisi per observationem. Observari nimirum debebat, tempore quodam, locus Solis in dato aliquo puncto A; ac porro observandum, quo tempore ad idem redeat punctum. Etsi autem initio indifferens videretur, quodcunque punctum eligatur; ubi tamen ad observationem accedebat Astronomus, non commode observari posse tempus advertit, quo Sol ad idem punctum promiscue assumptum redit. Quoniam itaque planum æquatoris determinari potest independentem a theoria Solis (§. 149 *Astron.*); commodissima videbatur huic instituto observatio appulsus Solis ad æquatorem; modo constaret, æquatorem constanter secare orbitam Solis in eodem puncto, seu, astronomice loquendo, puncta æquinoctialia esse fixa. Sumebatur hoc primum denuo per modum hypotheseos, & inquirebatur in modum observandi tempus, quo centrum Solis ad æquatorem appellit. Et sic incidebatur in armillas æquatoreales, quibus Veteres observasse æquinoctia novimus. Quo-

niam sic, etsi adhuc ruditer constare poterat quantitas anni solaris, si momentum æquinoctii vernalis sumebatur pro epocha; per regulam trium computari poterat locus Solis ad datum quemvis diem in hypothese concentrica, quemadmodum docuimus (§. 672, 673 *Astron.*). Quodsi jam loca computata conferebantur cum observatis (§. 203 *Astron.*); illa cum his minime consentire deprehendebantur; adeoque hypothese concentricam a veritate alienam esse palam erat. Quoniam igitur Terra intra ambitum orbitæ Solis constituitur, centrum illius extra centrum hujus situm esse debet in hypothese circulari. Atque adeo in locum concentrici circuli sumebatur, per modum hypotheseos, circulus eccentricus, retento motu æquabili. Ponamus jam in C esse centrum orbitæ, in T centrum Telluris, in H punctum æquinoctiale unum, in I alterum. Repræsentabit schema hypothese Solis circularem eccentricam. Inquirendum adeo erat, quænam ex ea consequantur, ut denuo quæ inde colliguntur cum observationibus, quibus inde deducta occasionem præbent, conferri possint. Quia nos Solem ex puncto T intuemur; statim apparebat, distantiam ejus continuo variari, cum TS sit major ipsa TL, eamque in A esse maximam, in P minimam (§. 303 *Geom.*). Atque sic nascebatur notio Apogæi A (§. 636 *Astron.*) & Perigæi P (§. 635 *Astron.*), atque eccentricitatis Solis TC (§. 639 *Astron.*)

Tab. V.
Fig. 44.

Astron.) Enimvero jam incidebat quæstio, utrum æquinoctium vernale, seu principium arietis supponendum sit in H, an vero in I; item in quo orbitæ solaris puncto, si ad eclipticam referatur, hæreat Apogæum A, in quonam Perigæum P, & quanta sit eccentricitas TC. Nemo non videt confugiendum hic esse ad observationes, quales autem eadem esse debeant, ut sint decisivæ, ex-hypothesi deducendum. Quodsi Sol sit in S; patet distantiam ab Apogæo in centro orbitæ C videri sub angulo ACS; ex Tellure autem in T sub angulo ATS: quod cum ita sese habeat per integrum semicirculum HAI; distantia Solis ab Apogæo semper minor videtur, quam revera est in eo semicirculo, in quo hæret Apogæum Solis A. Ex adverso si Sol sit in L, ex centro orbitæ distantia a Perigæo PL videtur sub angulo PCL, ex Tellure in T autem sub angulo PTL, adeoque in semicirculo IPH continuo apparet major, quam revera est, (§. 239 *Geom.* & §. 209 *Optic.*). Consideremus porro Solem in punctis æquinoctialibus H & I. Quodsi spectetur ex centro orbitæ C, distantia ab Apogæo A, nempe AI & AH, videntur sub angulis rectis ACI & ACH, ut adeo Sol videatur absolvisse semicirculum, ab uno æquinoctio usque ad alterum, dum revera semicirculum HAI percurrit, in quo Apogæum A hæret: enimvero ex Terra spectantur distantia AI & AH ab Apogæo A, sub an-

gulis ATI & ATH, qui sunt rectis minores (§. 239 *Geom.*); consequenter HAI minor semicirculo apparet (§. 209 *Optic.*), adeoque Sol minus temporis spatium consumere videtur in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A, quam in altero IPH, in quo hæret Perigæum P. Jam cum porro in semicirculo HAI distantia Solis a centro Terræ T sint majores distantia a centro orbitæ, veluti TS major CS, & in Apogæo A distantia TA sit maxima (§. 303 *Geom.*), in semicirculo autem IPH distantia Solis a Terra sint minores distantia a centro orbitæ, veluti TL minor CL, & in Perigæo P distantia TP sit omnium minima (§. cit. *Geom.*); Sol ipse major videri debet in semicirculo IPH, in quo est Perigæum, quam in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A. Quodsi jam meditationem cœptam eodem, quo hætenus, modo continuare velimus; observationes determinare licebit, quales esse debeant, quæ desiderantur. Sed ne justo prolixiores simus, filum abrumpendum est, contentis monstrasse viam, qua sit eundem, quantum ad præsens institutum sufficit. Annotabimus potius alia nonnulla, quæ usui esse possunt illis, qui Matheseos studio intellectum perficere gestiunt, ut eodem rite extra eandem utantur.

§. 310. Ex iis, quæ diximus, clarissime perspicitur, quomodo in investigandis veritatibus a posteriori sit procedendum, & quam indispensabilis usus sit hypothesium, ut, si iisdem

uti nolueris, nulla supersit spes veritatis unquam detegendæ. Non est quod excipias hypothefibus equidem locum esse concedendum in inveniendō, ab iis tamen esse abstinendum in libris, qui publici juris fiunt. Etenim ubi veritates ab iis, quæ nobis perspectæ sunt, principiis procul remotæ sunt, ut a priori denegatur ad eas accessus; non semper unius hominis est ea absolvere, quæ a posteriori accessibilem faciunt: quin potius haud raro sociæ requiruntur operæ, cum hic valeat illud pervulgatum, oculos plures plus videre quam oculum unum; & subinde qui accessum parare studet, laborem cœptum aliis continuandum relinquere tenetur. Qui animum ad ea attendit, quæ de theoria Solis investigata modo annotavimus, dictis facilem præbebit aurem; etsi rationes non perspiciat, quas dare poteramus, si prolixiores esse liceret. Quamvis igitur, examine instituto, hypothefes deprehendantur a veritate alienæ; non tamen ideo censendæ sunt inutiles; propterea quod aberrando a veritate deducimur ad veritatem, ubi methodo conjecturali opus est. Unde memini me sæpius auditoribus meis inculcasse, deberi etiam a veritate aberrantibus suas laudes, ubi nobis errandum fuisset, nisi ipsi priores errassent. In aliorum enim meritis censendis æqui esse debemus, ne quid admittamus, quod contra officium boni viri est. Nemo Astronomus vitio vertet ei, qui primus de

theoria Solis cogitavit, si hypothefin motus æquabilis in orbita concentrica excoluerit, utut successores eam a veritate alienam examine per observationes instituto deprehenderint. Videt enim eum fecisse, quod initio faciendum erat, & aliis perficiendum reliquisse, quod ipsi perficere vel non licebat, vel quod perficere volebat. Quodsi Physici Astronomos imitati fuissent, ex observationibus communibus eliciendo hypothefes, & has, per observationes studio quæsitæ & experimenta, examinatas corrigendo ac perficiendo, nullus profecto dubito, quin Philosophia naturalis dudum magis promota fuisset. Idem dicendum de Medicina, de qua jam differtius dixi in Horis subsæcivis, cum Medicum Astronomos imitantem in scenam producerem.

§. 311. Discimus etiam, quales esse debeant hypothefes, quibus in Philosophia concedendus est locus; nimirum quas methodus conjecturalis suggerit, qua in veritate investiganda utendum. Sumitur nimirum in gratiam nonnullorum phænomenorum, unde ratio eorum reddi potest; ac deinde inquiritur, num ceterorum quoque per id, quod sumitur, ratio reddi possit; quatenus ea, quæ ex hypothefi a priori colliguntur, conferuntur cum iis, quæ observantur. Perinde enim est, sive antea observaris phænomena, & postea demum inquiras, num eadem a priori ex hypothefi deducantur; sive primum a priori deducas

ducas ex hypothesi, quæ inde necessario consequuntur, & postea demum observes, num eadem quoque in rerum natura ita sese habeant. Patet autem certum esse debere, quod id, quod sumitur, in se spectatum possibile sit. Ita sumebatur in Astronomia, orbitam Solis esse circulum. Certum nimirum erat, eam esse lineam in se redeuntem. Quamobrem cum circulus sit linea in se rediens, in se spectatum non impossibile est, ut orbita Solis sit circulus. Non igitur probamus commentitias hypotheses, quas hodie bene multi in Philosophiam naturalem invehunt, quidvis pro lubitu fingentes, utut demonstrare minime possint talia, quæ sibi imaginantur, in rerum natura existere posse. Immo facile largimur, istiusmodi commenta non esse qualitatibus occultis scholasticorum meliora. Quamobrem in Physica, quam patrio sermone edidimus, maluimus phænomena ex phænomenis explicare, nec in hypothesibus admittere nisi quæ ex observationibus colliguntur; ne incerta cum certis confundantur, & in inventorum numerum referantur, quæ sunt in quæstionum numero. Omnium minime autem probamus, si ex commentitiis hypothesibus rationes reddantur in Medicina; quippe quæ non modo usum nullum in praxi habent, verum etiam nocent, si in praxi earum rationem habere volueris. Et huc dubio procul animum adverterunt; qui Philosophiam naturalem & Medicinam

ab hypothesibus liberam esse voluerunt; atque inter theoriam physicam & medicam in arte salutari distinxerunt. Propter abusum tamen hypothesium, non tollendus erat usus; sed hypotheses ad inveniendum veritatem aptæ discernendæ a figmentis, quæ in eorum locum surrogantur.

§. 312. Liqueat porro ex iis, quæ de theoria Solis analytice peruestiganda diximus, in veritate a posteriori investiganda perpetuum esse debere experientiæ ac rationis connubium. Neque enim ex observationibus communibus, quæ primo loco assumuntur, quicquam concluditur, nisi in subsidium vocatis principiis geometricis. Immo ipsæ hypotheses inde non derivantur ratiocinando, nisi vi illorum principiorum. Et ubi ex hypothesi a priori deducenda quæ ex ea necessario consequuntur, & sine quibus eadem examini subjici nequit, principiis mathematicis denuo opus habemus, neque absque horum ope observationes in hunc usum capiendæ determinari possunt. Quamobrem si Astronomos in Philosophia naturali, & eidem agnata Medicina, imitari velimus; cogitandum erat de theoria demonstrativa. Ontologia, qualem dedimus, suppeditat notiones directrices, de quibus plura diximus in Horis subsecivis. Et hisce inprimis locus est, ubi analyticam viam ingressuri colligere debemus, quid sit faciendum; quamvis etiam principia ontologica conducant ad conclusiones ex observationi-

vationibus & experimentis eliciendas. Subinde etiam usui sunt principia mathematica, de quorum ad experimenta applicatione nonnulla diximus in superioribus capitibus quinto, sexto, & septimo, cum de studio Mechanicæ, Hydrostaticæ, Aërometriæ, Hydraulicæ, & Opticæ ageremus. Ex observationibus quoque atque experimentis eliciendæ sunt propositiones determinatæ, eo modo quem in Logica capite 2, sect. 2, part. 2, exposuimus, cum methodum formandi iudicia intuitiva & notiones a posteriori traderemus; atque ex hisce principiis demonstranda sunt alia, quæ a priori inde deducuntur. Hoc enim pacto condenda forent Elementa Philosophiæ naturalis, eundem usum promittentia, quem habent elementa EUCLIDIS in Mathesi. Quamdiu enim desiderantur principia certa, quibus in ratiocinando utaris, luxurianti imaginationi omnia tribuuntur, atque adeo non mirum, si abortus imaginationis pro veritate in Philosophia & theoria medica obtruduntur. Neque mirum videri debet, quod de eodem subiecto meditati incidant in cogitationes toto cœlo diversas; ita ut unus per principia chymica explicare velit, quod alter explicat per mechanica, alius per figmenta, ad imitationem causarum sibi notarum, quæ effectum ei similem producant, cujus causa vel ratio quaeritur. Abstinemus ab exemplis, ne sint odiosa. Censere alios videri nolumus, dum docere nobis

propositum est. Quodsi Deus nobis vitam animi, ac corporis vires conservaverit, ut ad Physicam, Philosophia practica absoluta, progredi licuerit; operam dabimus, ut istiusmodi principia stabiliamus; ne facultatibus inferioribus tribuatur, quod ab intellectu expectandum. Eorum autem necessitatem in dubium revocare nequit, qui facultates cognoscendi earumque usum perspexit. Immo si distinctam ratiocinii notionem ex Logica hausit, eam agnoscere tenetur. Observatio enim, & experimentum, non supeditat nisi propositionem unam, quæ in syllogismo minoris vicem tuetur. Quodsi ergo hinc inferenda conclusio, principio opus est, quod maioris locum occupat. Cumque non semper unico syllogismo inferatur conclusio, pluribus quoque principiis opus. Quæ enim ratio est, cur multi multa cummulaverint experimenta, multas collegerint observationes rariores; nihil tamen inde intulerint, quod ad alia ratiocinando detegenda prodesset, ut phænomena nondum observata prævidere ac prædicere liceret? Sane non alia, quam quod deficient principia, quorum ad experimenta & observationes applicatione inferantur conclusiones. Observationes communes, quæ basis sunt omnis cognitionis astronomicæ, in vulgus notæ. Cur vero Astronomus hinc colligat, quæ alii inde colligere nequeunt, non alia ratio est, quam quod ille principia Geometriæ, quæ ipsi perspecta sunt, ad

ad illas applicet, his vero nulla sint principia, quæ ad easdem applicare possint. ROBERTUS BOYLE multa dedit de qualitatibus sensibilibus experimenta: quid vero hinc colligit? Nil nisi generalem hanc propositionem, quæ in Cosmologia ex principiis metaphysicis demonstratur, omnia in natura fieri mechanice. Provocare poteram ad Chymiam, cujus theoria fecunda, ad inveniendum apta, adhuc desideratur; & usus in Scientia naturali prædicatur, sed non ostenditur: sed in re per anteriora satis manifesta prolixiores esse nolumus.

§. 313. Astronomia quoque nos docet, conjunctis viribus scientiam esse excolendam, & inventa antecessorum esse emendanda, perficienda, confirmanda, prout occasio tulerit; consequenter quæ ab aliis tradita sunt ante addiscenda, quam ad scientiam amplificandam animum appellas. Quantum hic peccetur ab aliis, qui Astronomorum non sequuntur morem, in vulgus pro dolor! notum est. In inventorum numero esse volunt, qui discipulorum subsellia occupare debebant. Quæ ab aliis tradita sunt contemnunt, antequam ea didicerunt. Sibi soli sapere videntur, qui ex aliena doctrina sapere debebant: Sibi soli sufficere videntur, qui alieno auxilio maxime indigent. Quo quis indoctior, eo in censendis aliis audacior. Vana virium fiducia summa audent, quæ nullo negotio a se confici posse putant, cum vulgaribus capiendis eadem vix ac ne

vix quidem sufficiant. Non amore veritatis ducuntur, sed vanæ ambitioni litantes, vulgo imperito ut placeant unice student. Argumentis extrinsecis pugnant, qui rationes intrinsecas ut perspicerent, operam dare debebant. Quodsi Astronomi iisdem moribus fuissent præditi, nihil adhuc præclari de motu siderum sciretur, nec phænomena cœlestia tanta certitudine prædicere daretur, quemadmodum hodie ab Astronomis fieri solet. Quantum, quæso, promota fuit scientia astronomica altercationibus istis de motu Telluris? Quantum vero incrementi debet hypothese Terræ motæ legitime excultæ? Utinam igitur omnes Astronomi operam navarent, eamque analytice expenderent, quemadmodum paulo ante inculcavimus, quotquot ad scientias excolendas animum appellere decreverunt. Ego hunc fructum longe maximum judico, qui ex studio astronomico sperari potest; nec me poeniteret temporis quod in eo consumsi, etiamsi alium nullum inde reportassem. Discant hinc, quantum sibi desint, qui studium Astronomiæ negligunt, hac sola de causa, quod nullam ejus utilitatem esse sibi persuadeant in eo vitæ genere, quod olim sequi statuerunt. Quasi vero ea mentis metamorphosis, quæ a studio astronomico expectanda, nullius momenti sit in quolibet vitæ genere, quod Eruditi sequi tenentur. Vulgo quidem ingeminatur;

Didicisse fideliter artes

Emollit mores, nec sinit esse feros:

quod etsi multo laxiore sensu verum sit, quam vulgo accipitur, in praxi tamen parum attenditur. Nemo enim quærit, quantum studium aliquod faciat ad mores emolliendos, aut, ut clarius dicam, ad omnem facultatum nostrarum promptum & genuinum usum.

§. 314. Occurrendum vero est objectioni, quam forsan nonnulli movere poterant Astronomiæ non modo periti, verum etiam in eadem perficienda utiliter versati. Existimabunt enim, eo, quem diximus (§. 309), modo veritatem astronomicam non fuisse detectam. Incessisse inventores per multas ambages, antequam ad viam, qua sit eundem, ipsis pervenire datum fuerit, ac, multis frustra tentatis, tandem reperisse quod ad progressum ulteriorem faceret. Immo plures in deviis substituisse, antequam uni licuerit esse adeo felici, ut in viam rectam incideret. Multum haud raro temporis præterlapsum fuisse, antequam surgeret Astronomus, qui quid daret, cui in Analyfi nostra locus esse poterat. Non igitur tam ardua, qualia sunt Astronomorum inventa, tanta facilitate inveniri potuisse, quantam præ se fert analysis nostra. Ubi veritates detectæ sint, earum investigationem videri obviam, quæ prorsus inaccessible videntur, ubi adhuc ignorantur. Non nego, si facta sola respicias, vera omnino esse, quæ dicuntur:

neque enim nobis difficile foret exemplis ea confirmare. Verum enimvero nobis non jam quaestio est de eo, quod factum est; sed de methodo, qua veritas latens tandem in apicem producta. Quodsi regulæ methodi, quibus legitimus facultatum nostrarum usus præcipitur, primis invento-ribus distincte fuissent perspectæ, nec defecisset theoria, principia ad ratiocinandum necessaria suppeditans, aut hæc satis familiaria illis fuissent; in ambages inutiles non incidissent, sed rectam, qua eundem est, viam statim animadvertissent, nec in devia delapsi fuissent, multo minus in iisdem diu substitissent. Breviori adeo tempore ea dedissent, quæ in analysi nostra locum merentur, nisi quantum observandi opportunitas moram iniecis- set. Quando in apicem productum, quod quærebatur; quonam usu facultatum nostrarum id fuerit factum, reperire licet; ac tanto quidem evidenti- us id patet, si quis in principiis psychologicis fuerit versatus. Non igitur inutile, immo potius necessarium est, nisi incrementum Artis inveniendi negligere voluerimus, ut in eundem omni animi contentione inquiramus, atque cum ad distinctas no- tiones revocemus, ut constet, quomodo certa methodo reperiri potuis- set ab uno, quod nonnisi post multa tentamina, in quibus casui multum tribuitur, detectum. Qui ea perpen- dit, quæ de Logica artificiali in Prole- gomenis Logicæ inculcavimus, dictis facile

facile assentietur. Homines multi considerantur instar unius, in quo nonnisi locum habet rectus facultatum, quem fecerunt, usus; rejectis aberrationibus, quæ vel usus hujus defectui, vel abusui tribuendæ. Quod si enim extitisset homo, qui rectum facultatum suarum usum, absque ulla aberratione, facere potuisset; is nonnisi ea fecisset, quæ ad detegendam veritatem latentem spectassent. Quemadmodum in moralibus observandum illud CATONIS, ut ex alieno casu discas quæ vites, & nonnisi ea imiteris quæ ad rectum facultatum sum faciunt; ita similiter hoc tenendum in Arte inveniendi, & omni veritatis cognitione. Fictio illa, quæ hic admittitur, nihil absurdi habet, atque longe utilissima est. Meretur itaque attentionem, quoad omnia, quæ a facultatum humanarum usu proficisci possunt. Qui studio Matheseos intellectum perficere vult, non aliud intendit, quam ut rectum consequatur facultatum usum, aberrationes omnes, quantum datur, posthac evitaturus. Animum igitur attendere debet ad ea, quæ usum istum loquentur; parum sollicitus, utrum in eodem, an in diversis subjectis ea sint observanda; modo constet, nonnisi his factis ad scopum contendisse inventores, cetera vero ipsis nihil profuisse, sed inutiles tantummodo moras peperisse, ab illis minime intentas, sed moleste latas. Nisi hoc observaveris, aliorum exempla & casus tibi parum prode-

runt ad perfectionem propriam promovendam; quam tamen metam esse in Philosophia practica universali demonstravimus, ad quam continuo contendere tenemur, nisi obligationi nostræ naturali deesse, ac felicitati propriæ obicem ponere velimus.

§. 315. Nemo non videt amplissimum hic esse dicendorum campum, siquidem omnia, quæ ad præsentem scopum spectant, minutissime perscrutari velimus: sed tantæ prolixitati sese immergere non patitur præsens institutum. Neque etiam diffitemur, quod, si quis ulterius progredi voluerit, ei alios quoque autores consulendos esse, tum Veteres, quorum placita collegit RICCIOLUS in *Almagesto*, tum Recentiores, quos superius laudavimus, cum scriptores rerum astronomicarum recenseremus. Quod si enim ante sibi cognita atque perspecta reddiderit, quæ nos nostro more explicavimus, ut sine hæsitatione in legendis aliorum scriptis progredi possit, quam ad hæc legenda accedat; & ordinem temporis observet, quo prodita fuerunt, ut pateat, quodnam cogitata anteriora adjumentum attulerint ad posteriora: quæ exempli loco modo in medium protulimus haud difficulter imitabitur; præsertim si in disciplinis anterioribus, more nostro, fuerit versatus, nec ullibi suam passus desiderari operam. Hoc consilium qui sequi voluerit, sua sponte animadvertet, quomodo cum Geometria creverit quoque Astronomia. Sane quæ KEPPLE-

RUS dare non poterat, utut sagacissimi ingenii vir, non invita Minerva tentarunt alii; postquam nostro ævo Geometria magis exulta, & ad multo majus fastigium evedta, quam KEPLERI tempore attigerat. Est etiam Algebrae suus usus in parte Astronomiae theorica, cujus latissimus usus per universam Mathesin. KEPLERI ævo adeo ignorabatur, ut ne somnians quidem eum prævidere daretur; nec mirari debeamus, quod abjecta subinde vir summus de Algebra senserit. In gratiam igitur eorum, qui Algebrae studio delectantur, unum alterumque specimen dedimus, quo præclarum ejus in Astronomia usum insinuaremus. Plura suppeditat GREGORIUS in *Elementis Astronomia*, & illustria admodum exempla petere licet ex *Commentariis Petropolitanis*.

§. 316. Erunt forsitan nonnulli, qui sibi persuadebunt, inanem operam sumi in tractatione analytica studii astronomici, propterea quod absque ea Astronomi sua invenerint, ac hodiernum inventa antecessorum perficiant, novisque accessionibus nobilissimam scientiam locupletent. Enimvero facilis est responsio. Qui quæ ab aliis inventa sunt attenta mente considerant, eorum animis idea quædam exemplaris usus facultatum sese insinuat ad particulare hoc objectum restricta, quam, etsi confusam, imitantur quoad idem objectum, nescii

omnino quemnam facultatum usum faciant; quemadmodum accidit iis qui in tractandis negotiis imitantur alios in casu simili, theoria omni destituti. Neque diffitendum, hac imitatione niti omnem praxin Artis inveniendi in Astronomia; quidni etiam in Mathesi reliqua, si a regulis Algebrae, seu Analyseos Mathematicae recesseris; quamvis etiam in Algebrae praxi huic imitationi multus sit locus. Quam multum vero in hac imitatione tribuatur casui, & quam multis ideo tentaminibus locus sit, meum non est in præsentem exponere. Enimvero tota nostra tractatio analytica non alio tendit, quam ut idea ista confusa revocetur ad distinctam; quo facto, imitatio, quæ fuerat empirica, rationalis evadit, & multo latius extenditur, immo etiam casui subducitur. Nos jam potissimum intendimus, ut Philosophus imitetur Astronomum in qualibet Philosophiæ parte; immo Eruditus quicumque in suo scibili; cum de intellectu studio Matheseos perficiendo agamus, ut eodem extra Mathesin rite utamur. Hæc vero imitatio expectari nequit ab idea confusa, quæ Astronomo prodest in Astronomia excolenda. Immo si qui cam audent, quam sint infelices satis patet. Non deessent exempla illustria, quibus hoc doceri poterat; nisi consultius existimarem ab iis producendis abstinere.

CAPUT X.

De Studio Geographiæ, Gnomonica, & Chronologiæ.

§. 317. **G**eographia mathematica, cum qua hic nobis negotium est, multum affinitatis habet cum Astronomia, præsertim sphaerica; a cujus principiis tota pender. Unde etiam Veteres eandem ab Astronomia non separarunt, sed quæ in eadem traduntur, ad Astronomiam retulerunt. Quamobrem quæ de studio Astronomiæ sphaericæ dicta sunt, de Geographiæ quoque studio tenenda sunt. Et quoniam Geographia, quemadmodum modo diximus, principiis Astronomiæ sphaericæ præsertim nititur; ad eam accedere minime debet nisi eorundem gnarus. Quemadmodum itaque, in Elementis nostris, Astronomiam Geographiæ præmisimus; ita etiam in Astronomia ante versari debet, quam ad Geographiam pedem promoveat, qui inoffenso pede in hac progredi voluerit. Quod si quis, extra systema, Geographiam mathematicam tradere voluerit, ei multa explicanda sunt, quæ in Astronomia docentur; quemadmodum etiam a nonnullis factum vidimus.

§. 318. Qui nonnisi historicam Geographiæ cognitionem sibi acquirere student, iis sufficiunt, quæ ad Globum terrestrem, atque mappas geographicas, & tam illius, quam ha-

rum, usum cognoscendum faciunt. Ex capite itaque primo ea addiscere tenentur, quæ de figura Telluris, & circulis in ejus superficie concipiendis, habentur; prætermittis problematis ad investigandam semidiametrum Telluris spectantibus. Sufficit iisdem notasse, quæ de quantitate semidiametri Telluris, & unius milliaris Germanici, in pedibus Parisinis leguntur (§. 43 *Geogr.*). Curiosior si quis fuerit, addere potest magnitudinem superficiei, ac soliditatis Terræ (§. 44 *Geogr.*). Nec usu caret, si Tabulam, quæ in scholio problematis 7 (§. 46 *Geogr.*) exhibetur, de convertendis gradibus singulorum parallelorum in milliaria Germanica inspiciat. Ex capite secundo, definitiones distantiarum locorum, longitudinis item, ac latitudinis sibi perspectas reddere tenentur, & quod latitudo loci æqualis sit elevationi poli notent, ut intelligant, quid sibi velit Tabula Latitudinis & Longitudinis locorum (§. 60 *Geogr.*); prætermittis problematis de distantia locorum per Trigonometriam sphaericam solvendis. In capite tertio, ultra definitiones zonarum, & tempestatum statarum, non progrediendum, additis theorematis 8 & sequentibus, sed absque demonstrationibus. Eadem

fere tenenda sunt, in perlustrando capite quarto, nimirum ut, præter definitiones, nonnisi theoremata pleraque absque demonstratione notentur, & usus Tabulæ climatum (§. 138 *Geogr.*) inspiciatur. Nisi quis curiosior fuerit, caput quintum sicco pede transire potest; ex sexto autem, sufficient definitiones. Ex septimo, divisionem plagarum ad dignoscendos ventos cognosci perutile est, una cum theorematibus de ventorum proprietatibus, quorum usus est in dijudicandis tempestatibus vagis. Inprimis autem horum studio inservit caput 8, de Globi terrestris constructione & usu. Immo suademus ut Globus semper ad manus sit, in prima statim tractatione Geographiæ; quo facilius intelligantur, quæ in anterioribus docentur. Tandem ex capite nono, quod de mappis geographicis agit, nonnisi ea haurienda sunt, quæ eandem quandam earundem ideam animo ingenerant, & usum ipsarum explicant. Nimirum ad manus esse debent mappæ, tum universales, tum particulares, & addiscendum, quid denotent lineæ in iisdem descriptæ; quidque indigent numeri in margine adscripti. Ita enim constructio intelligitur, quantum sufficit ad earum usum: neque eo fine requiritur, ut quis modum construendi mappas geographicas capiat. Paucis adeo horis, studium Geographiæ absolvere potest, qui in historica ejus cognitione acquiescit; ultra quam nemini progrediendum, qui aliud non

intendit, quam ut mapparum geographicarum ideam quandam distinctam animo concipiat, quarum hodie promiscuus omnium usus est.

§. 319. Qui ad secundum cognitionis gradum adspirant, Elementa Geographiæ integra, eo quo a nobis conscripta sunt ordine, perlustrare debent; observatis iis, quæ ad nauseam usque inculcavimus, cum de studio Astronomiæ sphaericæ ageremus: neque enim inter theoremata ac problemata Astronomiæ sphaericæ & Geographiæ ulla differentia est, cum utrobique ad primum mobile referantur, seu a motu communi Solis & stellarum pendeant; ut adeo etiam, olim præsertim, problemata geographica ad problemata primi mobilis fuerint relata. Loquuntur demonstrationes, principia ubivis peti ex Astronomia. Unde, me tacente, intelligitur scientificam Geographiæ mathematicæ cognitionem acquiri minime posse, nisi ab eo qui in Astronomia fuerit versatus. Equidem non desunt, qui, quæ de aëciis, amphisciis, heterosciis & perisciis, nec non de antœcis, perioëcis & antipodibus docentur, pro futilibus habent, quæ utiliter ignorentur; judicium tamen præcipitant, vel terminorum insuetorum sono delusi, vel ex eorum definitionibus non prospicientes doctrinæ usum. Quibus terminorum insuetorum sonus imponit; illi cum Scholasticorum terminis metaphysicis nondum intellectos comparant, & quod de his inculcari audiverunt

runt iudicium, ad hos applicant, cœca imitatione, iis solenni qui de rerum valore ex ipsarum notionibus per se statuere nesciunt. Oppido autem falluntur: termini enim geographici accuratis definitionibus explicantur, quæ optime intelliguntur, modo terminos eas ingredientibus ex anterioribus habueris perspectos; non vero definitionibus magis obscurantur, quemadmodum a Scholasticis fieri suevit. Præterea ex his ipsis definitionibus demonstrantur accurata methodo, quemadmodum in ceteris Matheseos partibus, quæ ad cognitionem Telluris mathematicam spectant, adeoque in Geographia prætermittenda non sunt (§. 1 *Geogr.*). Non minor est præcipitancia eorum, qui negant, quæ prospicere nequeunt. In Geographia mathematica doceri debet omnis differentia phaenomenorum, quæ per universam Terræ superficiem a primo mobili pendent. Inter hæc vero etiam sunt umbrarum differentia, quæ corpora a Sole illuminata projiciunt, & differentia longitudinum dierum atque noctium, atque tempestatum statarum, nec non ortus & occasus stellarum. Has itaque cognoscere tenetur, qui omnem in diversis Telluris locis differentiam perspicere voluerit, etiamsi locum, quo ipse commoratur, nunquam fuerit egressus. Quæ ad umbras spectant, in doctrina de asciiis, amphisciis, heterosciis & perisciis explicantur; quæ vero ad dierum, & tempestatum statarum, aliorumque

phaenomenorum agnatorum, differentias pertinent, doctrina de antœcis, perioecis, & antipodibus continet. Non igitur nugæ inanes sunt, quæ hic demonstrantur, sed veritates necessariae, non modo animum sciendi cupidum oblectantes, verum etiam aliis in posterum inveniendis infervientes. Non jam inquirimus in casus, quibus interest cognosci statum Telluris in dato loco, quoad hæc phaenomena. Qui enim nulla sciendi cupiditate flagrat, eum quoque parum movebit utilitas, quam nondum existimat suam, sed alienam judicat. Unicum moneri consultum duco, de constructione mapparum geographicarum, præsertim universalium. Mappæ universales non sunt nisi projectiones sphaeræ in plano: unde sub hoc etiam nomine earum constructionem docuimus (§. 272 & seq. *Geogr.*). Non igitur diffitemur, si doctrinam de projectione sphaeræ præmittere libuisset, quemadmodum Sphaericorum Elementa præmisimus Astronomiæ, multo concinnius constructionem istam demonstrari potuisse. Quoniam tamen brevitati consulere decrevimus, quæ de projectione sphaeræ præsupponi debebant, ipsis demonstrationibus geographicis inseruimus. Non tamen ideo Elementa projectionis sphaeræ tanquam inutilia rejicimus: probe enim novimus, quantus eorum sit usus, tum in constructione Astrolabiorum demonstranda, tum etiam in projiciendis eclipsibus solaribus; quas projectiones

jectiones hodie non inutiliter adhibent Astronomi. Quoniam vero nos ea non attingimus, in quibus potissimum usus illorum sese exerit; nec præter necessitatem theoriam nostrorum Elementorum multiplicare volumus, abunde persuasi, quod nostrorum gnarus, absque ulla difficultate, ea aliunde haurire possit, siquidem iisdem habuerit opus.

§. 320. Abunde constat ex antecedentibus, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos via analytica progredi debere, ut inquirent in artificia, quibus veritas, quæ demonstratur, in apricum fuerit perducta. Utimur, in eruendis plerisque quæ traduntur, Trigonometria, tam plana, quam potissimum sphaerica. Quamobrem quæ in Astronomia eo fine dicta sunt, hic repetenda veniunt. Cetera ex principiis astronomicis, & geometricis, pauca quædam de umbris ex Opticis, communi methodo Logica deducuntur; adeoque patent per ea, quæ de usu Logicæ in veritate a priori investiganda docuimus in Opere logico, & uberius explicata fuerunt in superioribus, cum de studio Arithmeticæ & Geometriæ elementaris ageremus. Non itaque opus est, ut diutius hisce immoremur, cum ad Geographiam accedere minime debeat, nisi Arithmeticæ, Geometriæ & Astronomiæ, immo etiam Opticæ gnarus. Equidem dubitandum non est, esse etiam Algebrae in solvendis problematis geographicis usum, etsi

hactenus ad Geographiam parum applicata fuerit. Neque etiam dubitamus fore ut, quemadmodum Algebra applicari coepit ad partem Astronomiæ sphaericam, seu problemata primi mobilis, in posterum non defuturi sint, qui solutiones problematum in Geographia adhuc desideratorum dabunt. Sed cum ea, quæ nostro scopo sufficere visa sunt, absque Algebrae auxilio tradi possint; hac vice consultius visum fuit a calculis algebraicis abstinere. Neque enim Elementis Matheseos omnia inferenda sunt, quæ hactenus fuerunt detecta, aut per ea ulterius detegi poterant; ne studium Matheseos, per se satis amplum, reddatur nimis diffusum, & ejus faciamus desertores, quos ad idem allicere & ad ulteriora præparare intendimus. Quid quod nec nobis conveniat tempus in Mathesi consumere, quod Philosophiæ reformandæ impendere debemus; cum hodie non desint multi, qui Mathesi excolendæ utilem operam navant; nemo autem propemodum sit, qui similem Philosophiæ præstare velit. Unum tamen adhuc restat, quod silentio prætereundum non est. Constat hodie figuram Telluris non esse sphaericam, quemadmodum credidere Veteres, sed potius sphaeroidicam, prouti annotavimus (§. 4 *Geogr.*). Neque ignotum est, ope Algebrae, in figuram Telluris inquisivisse, non infelici successu, Geometras præclaros. Problema adeo tam illustre non videbatur omittendum; quod præsertim præ-

præstantiam Analyseos recentioris tam aperte loquitur. Enimvero monuimus, jam loco citato, sub judice adhuc esse litem de vera Telluris figura. Quamobrem cum controversia rationiis solis definiri minime possit; & figura sphaerica satisfaciat in Geographia, qualem tradere debuimus; a figura vera ejusdem determinanda abstinendum erat; præsertim quod ea, quæ a nobis tradita sunt de Analyse moderna, & ejus ad problemata physico-mechanica applicatione in Mechanica, abunde sufficiant ad intelligendas analyticas solutiones problematis de figura Telluris, quas dederunt Geometræ recentiores. Elementa nostra Matheseos non eo fine conscripsimus, ut Matheseos cultores a lectione aliorum librorum avocemus; sed ut eos ad eandem præparemus, & aptos efficiamus, non sine multo temporis ac laboris compendio, & ut iis pervia sit Mathesis, qui intellectus perficiendi gratia in eadem versari debent, quo eodem felicius extra eandem utantur: id quod ex tota hac tractatione de studio Matheseos recte instituendo abunde elucescit.

§. 321. In gratiam eorum, qui intellectus perficiendi gratia in Geographia versantur, ut eodem prompte extra eandem utantur, non est quod addam. Geographiam omnem methodo synthetica concinnavimus, qua usi sumus in Geometria elementari & aliis Matheseos partibus, imprimis etiam in parte Astronomiæ sphaerica, ad quam

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

proxime accedit. Quamobrem quæ eo fine ibidem inculcavimus, ea hic quoque observanda sunt. Neque vero existimandum est, propterea studium geographicum tuto negligi posse; cum ab eo sperandum non sit, quod non jam dederint disciplinæ aliæ, quibus ante operam navare tenemur, quam ad Geographiam pedem promoveamus. Etenim cum habitus omnis crebro exercitio acquiratur, & continuo exercitio conservetur ac perficiatur; non superflua videri debet opera, quæ Geographiæ analyticæ expendendæ impenditur. Neque est quod dicas, idem obtineri posse sola repetitione disciplinarum ceterarum. Præstat enim varietate obtinere, quod eorundem repetitio promittere videbatur. Quemadmodum nimirum varietas delectat, eorundem vero repetitio molesta accidit; ita quoque illa attentionem apprime hic necessariam excitat & conservat, quam hæc labefactat, ut difficilius conservetur. Exercitia itaque ad eundem habitum tendentia, quæ quoad hunc scopum eadem sunt, diversa tamen apparere debent; ita ut quasi continuo aliud agendo in eundem scopum collinees, & per diversa media finem tibi consequi videaris. Neque hoc singulare quidpiam ac insolitum existimandum. Sane in ipsa Arithmetica practica varietate exemplorum consequi studemus, quod repetitione ejusdem exempli obtineri poterat, si habitum acquirendum in se spectes.

D d d

§. 322.

§. 322. Hydrographia, quæ de navigatione per mare agit, apud nos nonnisi curiositatis gratia addiscitur. Quamobrem qui eam negligere voluerit, per nos negligat. Mathematicum tamen decet, ne eandem ignoret. Quodsi vero eandem perlustrare volueris, eodem prorsus modo in eo verfaberis, quemadmodum in Geographia. Eadem enim methodo conscripta est, qua Geographiam tradidimus, & perinde ac hæc, principiis astronomicis tota nititur; ut adeo hæc Matheseos pars longe utilissima fructus Astronomiæ sit &, si Astronomia non alium usum haberet, propter hunc solum, summo cum studio excoli mereretur. Qui animum sciendi cupidum possident, eos studium Hydrographiæ mirifice delectat; quatenus vident, quomodo ex principiis mathematicis, præsertim astronomicis, deducta fuerint quæ intellectui humano prorsus inaccessa videri poterant, & fecunditatem principiorum mathematicorum, quæ in se sterilia apparebant, ipso facto experiuntur. Plura non addimus: quæ enim dici poterant, ex anterioribus abunde intelliguntur.

§. 323. Quod studium Chronologiæ attinet, de eo non multa nobis dicenda sunt. Pleraque enim, quæ in Chronologia traduntur, non majorem requirunt attentionem, quam quæ acquirendæ cognitioni historiciæ sufficit. Qui nonnisi vulgarem Chronologiæ notitiam sibi comparare student, iis satisfaciunt definitiones diei,

& noctis, epochæ diei civilis, horæ, horæ astronomicæ, Europææ, & Judaicæ, minuti primi denique, atque secundi, ex capite primo. Ex secundo, perspectas sibi reddere debent definitiones omnes, una cum quantitate mensis lunaris communis, & embolimai, seu corollario primo definitionis 28. Ex capite tertio, sufficit annotasse, quæ de anno Juliano, & Gregoriano dicuntur. Si paulo curiosior fuerit, addet ea, quæ dicuntur de recente Judæorum & Turcarum anno. Ex capite quarto, ad intelligendum calendarium addiscant, quid sit cyclus Solis, cyclus Lunæ, & cyclus Indictionum, atque periodus Juliana; & ex capite quinto, petant, quid sit epocha Russorum, epocha mundi conditi Judaica, & epocha Muhamedica: qui vero in legendis Autoribus classicis versatur, addat definitiones epochæ Olympiadum, & epochæ Urbis conditæ. Denique, ad vulgarem Chronologiæ notitiam, sufficit aliqua Calendarii Juliani & Gregoriani cognitio, ex capite sexto haurienda, &, ubi quis curiosior fuerit, similem Calendarii Judaici, & Muhamedani, ex definitionibus potissimum capitis ultimi sibi comparat. Calculos enim, qui in problematis docentur, una cum corollariis, quibus eorum rationes continentur, tuto negligere poterit. Brevi adeo labore totum studium chronologicum absolvi poterit, in quo memoriæ omnes fere sunt partes. Me autem tacente, patet terminos nonnullos ex Astronomia per-

perspectos esse debere, ut definitiones chronologicæ intelligantur.

§. 324. Qui accuratiorem Chronologiæ cognitionem appetunt, eam totam perlustrare tenentur : id quod nullo fere negotio fiet, ubi in Astronomia fuerint versati ; cum eorum , quæ in Chronologia intricata sunt , & hoc studium perplexum atque molestum reddunt , nonnisi cognitionem historicam suggeramus. Hisce principiis imbutus, & in Astronomia cum laude versatus, adeat Autores, quos supra suo loco commendavimus, ubi spinosis difficultatibus sese immergere voluerit, ut iudicium ferre queat, quid veri subsit iis, quæ aliorum fide assumuntur. Neque enim existimandum est singula quæ dicuntur, ad chronologiam historicam spectantia, ex monumentis Veterum, quæ nobis supersunt, esse adeo aperta & explorata, ut de eorum veritate ambigi minime possit. Hoc omnino monendum esse duximus; ne, qui Elementa nostra Chronologiæ perlegit, miretur, cur vulgo conqueratur studium Chronologiæ esse abstrusum, perplexum, atque difficile; cum tamen nullum videatur, quod in eo collocandum, si comparatur cum eo, quod in tractandis ceteris Matheseos partibus hætenus præcepimus.

§. 325. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, in Chronologia quoque quædam invenient, quæ ad ipsorum sunt palatum. Juvabit perpendere, quomodo mensuræ tempo-

ris, ex motu siderum fuerint deductæ & ad usum civilem aptatæ, ut tempus civile cum astronomico in concordiam reducatur : quod posterius cum non uno modo factum sit, quatenus arbitrium humanum in determinationem influit ; observare hic licet, quæ in veritatibus necessariis locum minime habent. Singularem quoque hic attentionem merentur, quæ de characteribus temporis, præsertim artificialibus, & variis cyclis, atque periodo Juliana docentur. Denique probe perpendenda sunt, quæ de Calendario Christiano, & Judaico traduntur. Etsi enim calendarium Judaicum principiis nonnullis nitatur superstitiosis; calculus tamen, quo in computatione utendum, admodum ingeniosus est ; ut ab Artis inveniendi cupido probe perpendi mereatur. Præbet Chronologia exemplum, quomodo veritates, quas cognovimus, ad usum vitæ civilis aptentur ; ubi summus rigor attendi nequit, id tamen agendum, ne ab eo longius recedas in præjudicium finis intenti. Simile quid occurrit, ubi Jus naturæ ad definienda negotia humana, tam privata, quam publica, adhibetur, cujus rigor summus observari nequit ; ut adeo ex eodem condendum sit Jus civile, ac Jus gentium arbitrarium, quod ab eo quam minimum recedat, & quo cavetur, ne sine civitatum particularium & civitatis maximæ, quam Gentes constituunt, excidamus. Suppeditat itaque Chronologia, modo in abstrahendo

fatis fueris acutus, nec destituaris illo acumine, quo abstracta in concretis pervidemus, principia generalia, quæ notionum directricium loco esse possunt in istiusmodi casibus. Qui in Philosophia nostra fuerint versati, iis satis clara & perspicua erunt, quæ dicuntur. Nimis autem prolixi esse deberemus, si uberius explicanda essent, ne ceteris quoque obscura viderentur. Videmus adeo (id quod etiam haud pauca ante dicta ulterius confirmant), quam utile sit studium Philosophiæ verioris, qualem nos profitemur, cum studio mathematico conjungi; siquidem usus omnis, quem hoc præstat in intellectu perficiendo, compos fieri volueris. Ita demum obtinebitur, ut Mathesis prosit ad recte philosophandum: id quod sola applicatione, ad cognitionem Naturæ mathematicam promovendam, obtineri nequit; ut ut ea præclara sit, & maxime commendandum ingeniis excelsis, ut hoc cognitionis genus excolatur.

§. 326. Gnomonica disciplina tota practica est, in qua sola praxis intenditur. Quamobrem a perplexis quoque demonstrationibus abstinuimus, quas legere nolunt, qui intelligere poterant; ceteri autem non capiunt. Quodsi quis theoriā omnem aspernatur, nec nisi constructionem horologiorum solarium curæ cordique habet; ei satisfaciētes definitiones, & problematum resolutiones. Si quæ problemata ipsi magis curiosa, quam utilia videntur; suo stabit judi-

cio in omittendis iis, quorum notitia se carere posse existimat. Descriptionem horologiorum solarium adeo perspicue exposuimus, ut eadem facilitate absolvi possit, qua figuræ in Geometria elementari delineantur, & alia ejus problemata construuntur. Ne tamen hæreat circa terminos, nec satis intelligat quid fieri debeat; omnino consultum est, ut levem quandam Astronomiæ sphæricæ, Geographiæ, & Chronologiæ notitiā sibi comparet; qualem commendavimus iis, qui non nisi historicam cognitionem sibi comparare student. Inprimis autem hic usui est, si ideas, quæ lumen praxi Gnomoniæ affundere debent, ne in ea prorsus cœcutias, imaginationi insinuari cures. Exempli loco esse potest, si ipsam descriptionem horologiorum solarium, applicatione actuali horologii æquinoctialis, ad planum in quo describendum, ostendas. Usus hic habent machinæ gnomoniæ, quas in usum descriptionis horologiorum solarium commendat, & brevi quodam Tractatu descripsit PARDIES; quamvis instituto præsentī sufficiat horologium æquinoctiale simplici tantummodo modo descriptum, quemadmodum ex problemate quarto (§. 36. *Gnom.*) facile intelligitur.

§. 327. Etsi autem a perplexis & intricatis demonstrationibus, quales dedit CLAVIUS, & quas parum amant studio gnomonico sese mancipientes, consulto abstinuerimus, ne nobis scriberemus, dum alios erudire volumus;

id

id tamen egimus, ut, quanta fieri potuit brevitate ac facilitate, satisfacere-
mus iis, qui scientificam horologio-
rum solarium cognitionem appetunt,
ne ignorent genuinas constructionum
rationes. Ad hanc igitur qui adspi-
rant, eo modo in Gnomica versen-
tur, quo in Geometria elementari ver-
sandum esse docuimus, ubi secundus
cognitionis gradus intenditur. Haurit
Gnomonica principia sua ex Arithme-
tica, Geometria elementari, Trigonometria
utraque, Astronomiæ sphaerica
praesertim parte, Geographia, & Chronologia.
Antequam igitur ad illam
tractandam accedat scientificæ cogni-
tionis cupidus, harum tractationem
praemittere debet. Hoc pacto, in omni
Gnomonica nihil deprehendet, quod
non satis intelligat, & de cuius veritate
dubium quoddam supersit. Quo-
niam vero, quemadmodum modo di-
ximus (§. 326), Gnomonica tota pra-
ctica est; qui eidem operam navat,
singula quoque horologia in charta
delineare tenetur. Quodsi dicas, tibi
nunquam propositum esse, ut aliquan-
do horologium quoddam solare actu
construas; sed sufficere, ut intelligas,
quomodo construantur, & cur hoc
pacto construi possint; consequenter
te scopo tuo potiri posse, si tantum-
modo resolutiones problematum cum
schemate conferas; me per omnia
consentientem minime habes. Ete-
nim si horologia in charta ipsemet de-
linees, non modo facilius & clarius eo-
rum constructionem intelligis, verum

etiam ipsorum ideam memoriæ firmitus
imprimis. Quotiescunque veritates
practicas cognoscere studemus; sua-
dendum omnino est, ut eas in nobis-
metipsis experiamur. Hinc etiam, non
dissentiente CONFUCIO, summo Sina-
rum Philosopho, in Moralibus incul-
care soleo, ut eorum, quæ docentur,
veritatem in nobismetipsis experiri stu-
deamus: quod quantam afferat utili-
tatem, in parte altera Philosophiæ pra-
cticae universalis, a priori abunde de-
monstravimus. Qui adeo cognitio-
ni scientificæ operam navat, in omni
Mathesi solutiones problematum ipse-
met tentare tenetur, siue constructio-
nes geometricas, siue calculos arith-
meticos praecipiant.

§. 328. Qui ad tertium cognitio-
nis gradum adspirant, resolutionem
problematis tanquam incognitam sup-
ponere debent, & vi definitionis ho-
rologii, quod describi jubetur, inqui-
rendum, quomodo describi debeat.
Etenim, ex datis ratiocinando, colli-
gendum quod quaeritur. Non datur
nisi definitio horologii describendi,
quippe quæ ex anterioribus tanquam
data supponi potest ac debet: quaeri-
tur modus idem describendi, quem
resolutio explicat. Modus adeo de-
scribendi horologium, ratiocinando
erueendus ex ejus definitione. Defini-
tio horologii specialis supponit defini-
tionem horologii solaris generalem.
Quamobrem facile patet, eam quoque
tanquam datam supponi debere; nisi
eam inter principia referre velis, quæ

vi eorum, quæ definitioni speciali insunt, in memoriam revocantur. Ex definitione adeo petendæ sunt primæ propositiones, quarum ope in memoriam revocantur principia, ex Astronomia vel aliunde cognita, ut ex illa ratiocinando colligi queat conclusio. Satis hæc intelliguntur ex superioribus, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66 & seqq.). Non diffiteor, faciliorem fore operam, si demonstrationes problematum eo ordine concinnatæ essent, qui in methodo analytica observandus; non sumendo resolutionem tanquam hypothesin theorematis, quemadmodum in demonstrationibus syntheticis fieri solet (§. 51 & seqq.). Enimvero, si quis in Geometria elementari problemata analytice tractaverit, & methodum, qua ibidem usus, in aliis imitatus fuerit; ejus vires nec superabit analytica problematum gnomonicorum tractatio. Et quamvis tyronibus hoc difficile videatur, non tamen difficile erit eorum magistris, nisi quis intempestive docentium numero sese ingerat, qui discipulorum subsellia potiore jure occupare debebat. Elementa Arithmeticæ Germanica, methodo analytica, conscripsimus, eandemque in iis explicandis magis adhuc illustramus. Quod si ergo quis ideam quandam exemplarem inde hauscrit; ea ipsi facem præferet, non modo in Gnomonica, sed & in aliis Matheseos partibus; immo extra eandem in disciplinis aliis. Et si quis Elementa ista vel

non legit, vel legere nequit linguæ Germanicæ ignarus, aut etiam Batavæ, in quam conversa sunt; ideam tamen quandam animo concipiet vi analyseos demonstrationum, quam supra (§. 38 & seqq.) amplissime exposuimus. Non igitur opus esse judicamus, ut ad particularia descendamus.

§. 329. Ceterum Gnomonica in numero artium est, quemadmodum Mechanica practica, quæ machinarum compositarum structuram explicat. Quoniam in Gnomonica constructiones horologiorum solarium demonstrantur; ex ea discimus, quomodo Artes scientifica methodo tractandæ sint. Deducitur ea prorsus a priori, atque adeo methodi artes scientificæ tractandi ideam omnium optime exhibet. Artes ceteræ, si non omnes, saltem plurimæ, inventæ sunt a posteriori, etsi subinde in nonnullis a priori perfectæ. Ars poliendi vitra omnino a posteriori detecta, perinde ac constructio telescopii; etsi hæc deinde a priori, per principia dioptrica, magis fuerit perfectæ. Phænomena telescopiorum dudum ante a posteriori innotuerunt, quam earum accuratas & rigorosas demonstrationes dederint Mathematici. Idem dicendum est de speculis, quorum phænomena in Catoptrica demonstrantur. Ad Gnomonicam tamen quam proxime accedit Ars navigandi, & construendi globos artificiales, atque mappas geographicas, & hydrographicas. Quibus adeo animus fuerit scientiam artium excolendi,

di, illi hanc differentiam probe perpendere debent. Ex Gnomonica imprimis videre licet progressum artis a priori continuandum; quomodo scilicet inventa anteriora non modo ansam suppeditent de aliis cogitandi, quorum cogitatio alias animum minime subiisset; verum etiam ad ulteriora inveniendae adiumento sint; ut adeo idem sit in arte, qui in scientia progressus, eum utrobique eadem deprehendantur rationes. Huc imprimis animum advertere debent, qui Artem inveniendi ad formam Artis reducere gestiunt, quemadmodum Logicam ad eandem redactam videmus. Nos, qui nullum Matheseos usum aspernamur, ad ea quoque animum advertimus, quæ vulgo non attenduntur; & usum, quem Mathesis habere potest in excolendo intellectu, ut eodem in omni Scientiarum genere, in quavis Arte, & in ipsis negotiis, tam privatis, quam publicis, prompte ac rite utamur, majoris facimus, quam quem per se habere potest; ut ut singula æquo pretio æstimantes, nec meritam detrahamus iis laudem, qui in aliqua Matheseos

parte excolenda omnem ætatem consumunt. Neque enim ea est hominis ætas, immo nec eæ sunt ejus vires, ut unus omnia possit; & nisi essent, qui particulari studio scientiam egregie promoverent, nec is a Mathesi expectari poterat fructus in omni sua extensione, quem tantopere commendamus, & cui tantum statuimus pretium. Quamvis adeo in Gnomonica multa occurrunt, quæ magis curiosa, quam utilia videntur iis, qui utilitatem ex necessitate ad vitam commodè degendam metiuntur; immo quæ a severis inventorum censoribus ad lusus Mathematicorum referuntur, ipsis subinde Geometris excelsi ingenii, profundique acuminis non dissentientibus, propterea quod unusquisque suam amat & laudat Minervam; nobis tamen ea non contemnenda, sed magni facienda videntur, quatenus analytica eorundem consideratio prodest ad augendam Artem inveniendi; immo etiam sola eorundem scientifica cognitio intellectum perficit, etiamsi de eo perficiendo non cogites.

C A P U T XI.

De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris, & Architecturæ civilis.

§. 330. **P**Yrotechnia paucas continet demonstrationes, quæ ex Geometria elementari principia sua

mutuantur: quas negligere facile potest, qui soli praxi studet. Ceterum quæ ad praxin faciunt, non modo perspicue,

spicue, sed & distincte proposuimus; ut ideam distinctam eorum, quæ fieri debent, animo nullo negotio concipere detur. Nulli adeo dubitamus, quin studium pyrotechnicum per facile reddiderimus. Si quis praxi operam dare voluerit, is omnino ipso opere exequi tenetur, quæ præscribuntur: quo facto ipsemet in se experietur, resolutiones problematum eodem modo esse datas, quo resolutiones Geometriæ practicæ, veluti triangulorum constructionem, linearum perpendicularium descriptionem, in Geometria elementari exhibuimus. Quod si quis ante singulorum, quæ fieri jubentur, ideam distinctam sibi comparavit, quam ad ea facienda se conferat; is non solum ad id, quod faciendum, majorem attentionem conferet, sed & majore cum voluptate artem manuariam addiscet. Qui in nuda cognitione historica acquiescere volunt, iis quidem sufficere possunt, quæ tradimus; ubi tamen occasio offertur ipsis oculis usurpandi singula, quomodo parentur, eam negligere minime debent; cum hoc pacto ideæ efficiantur clariores, quatenus distincte explicatis insunt confuse percipienda.

§. 331. Quibus secundus cognitionis gradus curæ cordique est, non modo addere debent per paucas demonstrationes, quæ hinc inde adjiciuntur; verum etiam eorum, quæ ex principiis geometricis demonstrari nequeunt, rationes passim indicatas perpendere tenentur, & ad ea applicare studeant,

quæ sine illarum allegatione proponuntur. Dantur equidem nonnulla in Pyrotechnia, quæ Geometriæ sublimioris & Analyseos recentioris gnarus legibus mathematicis adstringere poterat, cum nunc solo arbitrio regantur; sed nobis minime vacat in talia inquirere. Hanc igitur telam aliis pertexendam lubentissime relinquimus, nobisque sufficit ea tradidisse, quæ ante perspecta habere debent, quam ingenii sui vires periclitentur.

§. 332. Pleraque, quæ in Pyrotechnia traduntur, sunt inventa, quæ artificum tentaminibus debentur, ubi casus multas sibi partes vindicat. Qui ad tertium cognitionis gradum adspiciant, & intellectum præsertim perficere intendunt, ut eodem extra Mathesin prompte ac rite utantur, hoc etiam inventorum genus probe expendere tenentur: neque enim rerum ceterarum, quemadmodum mathematicarum, tam exarsciata prostat theoria, ut superant principia, quorum via priori detegere licet omnia, quæ quæruntur. Empirica inveniendi methodus, qua utuntur artifices experientiæ qua pollent omnem facientes usum qui a notionibus confusis expectari potest, in rebus utilissimis detegendis omne fert punctum, modo eadem rite uti noris: id quod tibi promittere poteris, si eundo per exempla, qualia suppeditat Pyrotechnia, eam revoces ad notiones distinctas. Qui vel ea legit, quæ in Prolegomenis de differentia Logicæ naturalis & artificialis docuimus, non modo

modo dicta plene intelliget, verum etiam iisdem facilem habebit fidem. Quod si attentius resolutiones problematum pyrotechnicorum expendas, easque tanquam inveniendas tibi proponas; methodo empiricæ invenienti misceri rationalem, aut saltem misceri posse deprehendes: quemadmodum nemo hominum in actionibus suis totus empiricus est, ut non etiam rationi aliquæ deferantur partes. Et si forsan objecerit quispiam, te in modum inquirentem, quo eadem fuerint repertæ, haud raro, immo plerumque, incidere in alium ab eo, quo usi sunt inventores, prorsus diversum; non tamen inde conficitur, te nihil agere: sufficit enim si ostendere possis quod eo, quem concipis, modo reperiri potuerit quod quærebatur. Cum enim non alio fine in modum invenienti inquiras, quam ut eundem in casu simili imiteris; eundem ex asse consecutus, si vel maxime de eo non cogitavit, qui quid invenit: id quod de omni analysi notandum, quam quasi divinando cruere studemus. Ceterum, si quæ compositiones occurrunt, quarum nullam reddidimus rationem; in eam eo modo inquirendum, quo rationem compositionis pulveris pyrii casu detectæ eruimus (§. 17. & seqq. *Pyrotech.*)

§. 333. Qui Architecturæ militaris nonnisi cognitionem historicam desiderant, ex definitionibus terminos sibi perspectos reddere tenentur; nec inconsultum est, si ad manus fuerit idea quædam materialis munimenti,

Wolffii Opër. Mathem. Tom. V.

sive ex ligno, sive ex charta, sive etiam ex argilla parata. Cum enim terminos non alio fine addiscant, quam ut munimenta videntes singula suis nominibus indicare valeant, & ut nominibus auditis respondentes iisdem ideæ imaginationi præsentibus sistantur; ideæ hæc facilius memoriæ imprimuntur per conspectum ideæ materialis, quam notationibus distinctis, quibus definitiones constant. Quod si tamen hæc accedant, imprimuntur tanto firmiter, & jucundius, ut facilius eadem retineantur, nec sine voluptate labore hoc defungaris. Deinde sufficit munimenti unius vel alterius Protographiam saltem conficere, quæ nonnisi ambitum totius munimenti & operum externorum exhibet, ut hoc pacto idea munimenti integri acquiratur, nec ejus deinde conspectus adspicientem confundat. Idem tenendum est de operibus hostium campestribus, quorum in praxi offensiva & defensiva opus est. Neque Inconsultum est, ut, terminis intellectis, ichnographias munimentorum ad manus sumat, & per eos easdem explicare discat. Rudis hæc Architecturæ militaris notitia usui est iter faciendis & loca munita invisentibus; tum etiam prodest ad intelligendas novellas publicas, quando de obsidionibus urbium munitarum loquuntur.

§. 334. Qui cognitionem Architecturæ militaris scientificam sibi acquirere student, Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlustrare debent. Ex capite igitur primo, principia sibi perspecta reddere tenentur,

E c c

tur,

NOTA

tur, ex quibus omne de diversis muniendi formis iudicium pendet. Secundum hæc principia examinare debet diversas muniendi formas, quæ in capite secundo proponuntur. Neque parum sibi consulat, ubi deinceps ex STURMII Architectura militari hypothetica, simili examini alias adhuc muniendi formas subjiciat, vel ex aliis libris, quos de Architectura militari recensuimus, alias petat. Ita nimirum non modo principia ipsa sibi reddet multo clariora, eaque magis familiaria; verum etiam eorundem applicationem in suam magis rediget potestatem. Neque etiam contemnendus est calculus trigonometricus: quod qui faciunt, ejus utilitatem minime prospiciunt. Nemo non novit in qualibet muniendi forma non omnia sumi posse, principiis in capite primo expositis convenienter; sed per quædam assumpta determinari cetera. Horum adeo quantitas ex iis, quæ sumuntur, per calculum geometricum eruenda, siquidem accurate de eadem constare debet. Nullum equidem dubium est, ex iisdem, constructione geometrica, easdem lineas, eosdemque angulos determinari, & illarum magnitudinem, ope scalæ geometricæ, horum vero quantitatem, ope instrumenti transportatorii, investigari posse; nemo tamen est qui nesciat, methodum hanc, non modo supponere constructionem accuratissimam, verum etiam ne hac quidem supposita adeo accurate investigantur, quemadmodum per calculum trigonometricum eruantur quan-

titates linearum & angulorum. Quod si excipias, in praxi acribiam trigonometricam observandam non esse, immo nec semper observari posse, si vel maxime velis; utrumque largior: non tamen hinc recte infertur, quod inutile sit nosse angulorum ac linearum magnitudinem quam accuratissime. Etenim hinc non modo certus es, te in ea definienda nullum admisisse errorem, qui facile irrepere poterat eam mechanice investigando; sed & hinc attentior efficitur animus, ne in praxi a rigore magis recedas, quam par erat. Taceo, quod ad scientificam Architecturæ militaris cognitionem etiam requiratur, ut constet quomodo ex iis, quæ principiis in parte prima expositis convenienter sumuntur, investigentur cetera, quæ per ea determinantur. Ut vero tanto minus in dubium revocari possit utilitas calculi trigonometrici in Architectura militari; hoc unum adhuc probe perpendi velim. Subinde per ea, quæ in methodo muniendi sumuntur, vi principiorum generalium, molesta est constructio geometrica, si quidem accurata desideretur. Quod si vero lineæ aliæ supputentur, ex iis tanquam cognitis jam multo simplicior evadit & accuratior. Exemplum habemus in methodo muniendi *Blondelliana* (§. 151. *Arch. mil.*), cujus constructio, per calculum trigonometricum, ad *Paganianam* revocatur. Immo, ope hujus calculi, constructio, ex latere interno assumpto, potest revocari ad alteram, quæ ex externo procedit, & contra: id quod subin-

subinde usui esse potest, præsertim in munitionibus irregularibus. Munimenta irregularia expendimus capite tertio, & quænam hic sint observanda, exponimus. Enimvero in methodo muniendi irregulari imprimis opus est, ut principia generalia constanter ob oculos versentur, ne quid contra ea admittatur: id quod facere accidit, nisi per ea examinentur, quæ in delineandis munimentis irregularibus facis. Hic sane haud raro cœcutiunt, qui ea non satis perspecta habent, vel in eorum applicatione hæsitant. Unde apparet, quam necessaria sit scientifica Architecturæ militaris cognitio, cum irregularia munimenta sint frequentiora regularibus; ut adeo is demum Artis muniendi peritus sit dicendus, qui in delineandis munimentis irregularibus non hæret, nec cespitat. Denique qui rationes quoque operum campestrium, quæ capite ultimo describimus, perspicere voluerit, is duo scholia, quæ in fine adjicimus, attente perlegat, ut processus obsidionis ideam animo concipiat, & quænam obsessi defensionis gratia faciunt, intelligat. Hinc enim multo clarius intelliguntur, quæ de illis præcipiuntur.

§. 335. Quodsi quis praxi Architecturæ militaris operam dare decreverit, ei scientificam ejus cognitionem quam maxime commendamus, experientia domestica deinde magis illustrandam, ac confirmandam. Ab eo autem cum expectetur, ut accuratas & nitidas munimentorum delineationes dare possit; in iis quoque deli-

neandis multum operæ consumere tenetur, donec tandem multiplici exercitio eum consequatur habitum, quo se commendare possit. Vulgo peritiam Architecturæ militaris ex munimentorum delineationibus æstimare solent, fallaci admodum judicio. Et si autem in Arte muniendi excellere possit, qui in iis delineandis parum excellet; cum tamen qui eidem totum sese dat, nec ea negligere debeat, quæ Artem ornant, nitidas quoque delineationes ab eo jure exigimus; tanto quidem magis, quo certius est, haud raro, immo plerumque contemni Artem ornatu isto destitutam. Qui vero praxi operam dare, ipsamque Artem exercere non decrevit, etsi castra sequatur; ei vix suademus, ut in habitu isto comparando tempus fallat, quod longe utilius in aliis ad discendis consumere poterit.

§. 336. Quibus tertius cognitionis gradus curæ cordique est, in Architectura quoque reperient militari, quæ attentionem ipsius merentur, sive in sola Mathesi versari voluerint, sive intellectum perficere studuerint, ut eodem prompte ac rite etiam extracandem utantur. Cum Architectura militaris in numero disciplinarum practicarum sit, ratio ultima eorum, quæ in eadem traduntur, finis est, qui per eam intenditur. Quamobrem hic probe perpendendum venit, quomodo ex fine, qui in definitione indicatur, deducantur principia, quæ in capite primo proposuimus; applicata vero deinde ad eadem Geometria, cetera

hinc deriventur, sine quibus forma muniendi concipi nequit, multo minus munimenta actū excitare licet. Hinc enim non solum addiscere datur, quæ ad cognitionem Artis mathematicam venandam usui sunt; verum etiam quomodo in disciplinis practicis versandum, ut satis adequatas nanciscaris ideas, quæ praxi sufficiunt. Satis autem adequata est, si in ea singula, quæ fieri debent, determinentur; quemadmodum ex tractatione Architecturæ militaris abunde elucescit, modo attentionem tuam in ea desiderari minime patiaris. Diversæ dantur muniendi formæ; sed, ubi eas juxta principia in capite primo proposita examines, non omnes cum iis æque consentiunt. Unde aliæ aliis tanquam meliores præferuntur. Docet autem progressus Architecturæ militaris, quod primo inventæ muniendi formæ defectibus fuerint obnoxie, quos experientia detexit, primum ab inventoribus non animadversas, iis autem mederi studuerint, qui recentiores excogitarunt. Et si in usum Artis inveniendi non inutile foret, eo fine expendere omnes muniendi formas, quæ hæcenus publici juris factæ, & quidem eo ordine, quo luci publicæ expositæ fuerunt; nostri tamen instituti ratio minime ferebat, ut in tantas ambages descenderemus. Ne tamen hac in re prorsus deessemus Lectori ad tertium cognitionis gradum adspiranti, ea tradidimus, quæ ad ideam quandam hujus facti animo concipiendam sufficiunt, profuturam iis, qui in aliis

disciplinis practicis Architectos militares non infelicitè imitari voluerint. Non alia sane de causa exposuimus methodum muniendi *Belgicam*; utut propter defectus, quibus laborat, hodie antiquatam, ut nullius usus esse videatur, nisi quatenus adhuc extent munimenta bene multa hac methodo constructa, & iisdem subjunximus methodos muniendi Gallorum. Constat enim formam muniendi *Belgicam*, tanquam omnium optimam, celebratam fuisse; ejus autem navis animadversis, Gallos primum publicasse formas alias, quibus hisce mederi tentarunt. Ceterum applicatio Trigonometriæ ad Architecturam militarem, in usum tertii cognitionis gradus, etiam aliquam attentionem meretur; non modo quod hoc ipso confirmetur, quod in Arte inveniendi locum mereatur; verum etiam ut ejus amplissimus usus in majore luce constituatur.

§. 337. Architecturæ civilis cognitionem historicam acquisiturus legat definitiones, & problemata; exceptis iis, quæ ad delineationes Ordinum architectonicorum; & eorum usum in ordinandis januis, atque fenestris spectant, & quæ de Ichnographia & Orthographia ædium agunt. Quod si desit occasio ædificia juxta regulas architectonicas constructa contemplandi; Ichnographias & Orthographias externas ædificiorum æri incisas perlustret, ut ideam ædificii integri, juxta regulas architectonicas constructi, animo imprimat. Inprimis autem

autem terminos, & constructionem Ordinum architectonicorum sibi familiares reddat, ne in ornatu, qui inde petitur, cœcutiat. Hoc pacto obtinebit, ut non solum libros de Architectura civili conscriptos sine hæsitazione legere, sed quæ usui suo esse possunt, etiam addiscere, ac data occasione ad eundem transferre, queat. Historica igitur cognitio non ob solam curiositatem, sed & ob utilitatem, quam unicuique præstat, acquiritur. Sane qui peregrinantur, quemadmodum Germani facere solent studiis academicis absolutis, cognitione ista animum imbutum habere debent; ne in ædificiis, aliisque operibus architectonicis, spectandis ignorent, quid videant, laudaturi aliis, quod cur laudent, nullam afferre valent rationem. Male adeo sibi consulunt, qui studium architectonicum, quod ea fini intra paucas hebdomades absolvi poterat, in Academiis prorsus negligunt, non alia de causa, quam quod architecti fieri nolint. Perfacile autem hoc studium est, præsertim si ultra cognitionem historicam progredi nolueris. Quodsi otium suppetat, ruditer saltem delineare Ordinem aliquem architectonicum, veluti Toscanum, qui delineatu omnium facillimus, juvat; non modo ut idea Ordinis, sed etiam membrorum memoriæ firmitus infigatur: id quod tanto magis suadendum, cum norim plerosque fieri desertores studii architectonici, quod tædiosum videatur terminorum notitiam sibi comparare.

§. 338. Scientificam Architecturæ cognitionem desiderans Elementa integra, eo quo conscripta sunt ordine, perlegat, & eam attentionem afferat, quæ ad singula rite percipienda sufficit. Qui vel in Elementis Geometriæ versatus fuerit, ei attentio huc afferenda nulla fere videbitur: Mathematicum vero prorsus ignarus non majorem hic requiri experietur, quam qua in legendo libro alio quocunque utendum; immo minorem, cum omnia distincte explicentur, quod vulgo fieri non solet; nec occurrant verba, quorum dubius est sensus; præter doctrinam vero de Ordinibus architectonicis nihil occurrat, cujus non habeat Lector ideam vulgari experientia acquisitam. Nemo autem hic expectet demonstrationes, quales in Geometria dedimus; sufficit enim addisci eorum, quæ præcipiuntur, rationes, ut intelligatur, cur hoc potius modo fieri debeant, quam aliter. Inprimis etiam probe perpendat in Ordinibus architectonicis multa esse arbitraria; quorum etsi dentur, atque a nobis datæ sint rationes, absit tamen, ut quis rationes istiusmodi desideret, quales sunt ceterorum, quæ necessarias habent. Sane in Arithmetica, quæ rigidas demonstrationes admittit, cum veritates numerorum non minus necessariæ sint, quam linearum & figurarum in Geometria, eorum, quæ arbitraria sunt, veluti legis numerandi & notarum numericarum, non dari possunt rationes, quæ veritatibus necessariis conveniunt. Qui praxi architectonicæ sese

dedunt, iis inprimis opus est scientifica Architecturæ cognitione : Architectus enim in promptu habere debet rationes, quas reddat quærentibus, cur hoc vel illud ita fecerit (§. 3. *Arch. civ.*). Obtinebit præterea, ne cœca sit aliorum imitatio ; quam haud raro esse fallacem, ne opus probetur intelligentium judicio, experientia loquitur. Non desunt exempla, quibus quod dictum est, confirmari poterat ; sed nostrum jam non est perstringere ea, quæ ab aliis minus recte facta sunt, cum jam docere id unice intendamus, quomodo tractandum sit studium architectonicum, ut recte fiant omnia. Industriad præterea suam exercere debent in delineationibus architectonicis, quicumque Artem exercere decreverunt, & quæ paulo ante de delineationibus munimentorum annotavimus (§. 335), ea quoque hic notanda veniunt. Ex elegantia delineationum vulgo judicium fertur de peritia Architecti ; etsi male, ac subinde non sine damno fundatoris. Quamobrem cum dandum non modo sit aliquid opinioni, sed & qui in Arte quadam excellit, ea negligere non debeat, quæ ad ornatum faciunt ; nemo erit, qui ab Architecto elegantiam in delineandis ædificiis, aliisque operibus architectonicis, jure non desideret ; quamvis non probemus contemni propterea Artem in eo, qui eadem excellit, quia elegantiam in delineando non possidet. Qui enim hoc faciunt, suo, & aliorum, quibus a consilio esse debebant, hoc faciunt damno.

Immo si quis desideret delineationes elegantes ; aliorum opera eadem perfici poterunt ; modo, qui in Arte excellit, ea suppeditet, quæ ad eas perficiendas necessaria sunt.

§. 339. Qui denique ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos quoque juvabit Architectura civilis. In Architectura civili, regulæ omnes deducuntur ex fine, quem loquitur definitio ejusdem. Finis hic in eo consistit, quod ideam ædificii animo concipere, & juxta eam ipsum extruere debeamus, ita ut scopo fundatoris ex æsse satisfaciat. Quamobrem huc potissimum animum advertere tenetur, qui tertium cognitionis gradum intendit, quomodo ex hoc fine deriventur regulæ omnes, ita ut rationes earundem tandem in hanc rationem ultimam resolvantur. Monuit jam VITRUVIUS, & nos in Elementis nostris a priori ex ipso fine Architecturæ, ostendimus, regulas Architecturæ omnes redire ad firmitatem, utilitatem seu commoditatem, & venustatem atque ornatum ædificii, vel alterius operis architectonici cujuscunque. Quamobrem regulæ omnes rationem sufficientem, vel in firmitate, vel in utilitate, vel in venustate atque ornatu, vel hisce binis, aut omnibus simul sumtis agnoscunt. Sufficit itaque inquirere, quomodo ex hisce fontibus, vel immediate, vel mediate fuerint deductæ. Cum paucissimæ sint, quæ Geometriæ auxilium postulant ; hæc disquisitio plurimum proderit ei, qui disciplinas practicas a Mathesi sejunctas accurata metho-

methodo pertractare voluerit. Notandum præterea, si quis ideam ædificii animo concipit, dato fundatoris scopo, eum inventorem agere, ac regulis Architecturæ civilis uti, tanquam principiis in ratiocinando. Quamobrem qui ad modum, quo hoc facit, animum attendit; is hinc addiscere valet, quomodo theoriæ ad tractanda negotia, quæ levi brachio tractari minime possunt, dextre ac rite applicentur. Suademus ergo ut ædificiorum, supposito fundatoris scopo, inveniat constructio etiam ab iis, qui Artem exercere non intendunt: quod ut facilius succedat, ante in examinandis ædificiis juxta regulas architectonicas non inutiliter versabitur, quam ad telam istam pertexendam se accingit. Non adeo levem, nec contemnendæ utilitatis deprehendet demonstrationem, qui ædificium, dato fundatoris scopo, construendum sibi tanquam problema proponit, veluti *construere in data area, datoque loco, ædificium, quod huic fundatoris scopo ex asse satisfacit*; deinde quomodo extruendum sit eodem modo exponat, quo resolutiones problematum per universam Mathesin exhibuimus, & tandem demonstret pro datis circumstantiis scopo fundatoris ex asse satisfieri, siquidem hoc modo extruatur. Etenim qui in expediendis negotiis, tam privatis, quam publicis, eam certitudinem consequi voluerit, quam consequi datur; plurimum hinc lucis foenerabitur, quam aliunde vix ac ne vix quidem adeo commode expectet. Non igitur

erubescimus studium Architecturæ civilis, hoc modo instituendum, commendare iis, qui ad negotia publica gerenda sese præparant; ut eorum rite tractandorum ideam quandam exemplarem animo insinuent. Plura addere possem, quomodo prudentia Architecti prodesse possit in gerendis negotiis; nisi principiis, quæ in Philosophia practica tradimus, imbutus per se hoc videre possit, ubi ea, quæ hic commendamus, exercitia non neglexerit.

§. 340. Atque ita tandem nos satis docuisse confidimus, quomodo studium mathematicum tractandum sit, ut omnem consequamur usum, qui ab eo expectari potest. Non loquor nisi experta; ac ingenue profiteor, me nunquam ea, quæ hætenus in Philosophia conscripsi, & in posterum, si Deo ita visum fuerit, additurus sum, daturum fuisse, nisi adminiculis istis adjutus fuisset. Eadem experientia fretus docere quoque poteram, quomodo Mathesi uti possimus ad distinctas, & foecundas, in Philosophia prima, notiones venandas; & quomodo studio mathematico perfici possit etiam appetitus; sed cum hoc a præsentis instituto alienum sit, quæ hic dici poterant, alii occasione reservamus. Ne tamen dixisse videamur, quæ absorta sunt, unum saltem alterumque exemplum in medium afferre lubet. Poteramus hic tantummodo provocare ad ea, quæ alibi jam tradidimus, veluti quod notio generum, & specierum

(not. §. 72, 73 Log.) atque individui,

ex formulis algebraicis derivari possit (*not.* §. 74 *Log.*); & ipse modus, quo Deus universalia, eorundemque nexum, in singularibus intuetur, ex iisdem formulis eliciatur (*not.* §. 275 *part.* 1. *Theol. nat.*); sed ne lectorem ablegemus ad alibi quærenda, nec hic repetamus alibi dicta, consultius visum fuit, exempli loco, alia quædam proferre. Inter notiones difficiles referri solet notio determinati & indeterminati. Enimvero nos eandem derivavimus ex exemplis mathematicis: qua etiam de causa, singula quæ, in Ontologia, de determinato & indeterminato docuimus, exemplis mathematicis illustramus. Neque enim dantur alia hisce clariora, & notionem in Philosophia longe utilissimam feliciter illustrantia. In formula algebraica quacunque, veluti si $\frac{a+b}{2}$ dicatur numerus major, summa existente a , & differentia b ; numeri a & b dicuntur indeterminati; quia tam a , quam b explicari potest per numeros infinitos; consequenter de a affirmari potest, tum quod sit 6, tum quod sit 12, tum quod sit 19, & ita porro in infinitum, & de b affirmari potest, tum quod sit 2, tum quod sit 4, tum quod sit 5 & ita porro in infinitum. Indetermi-

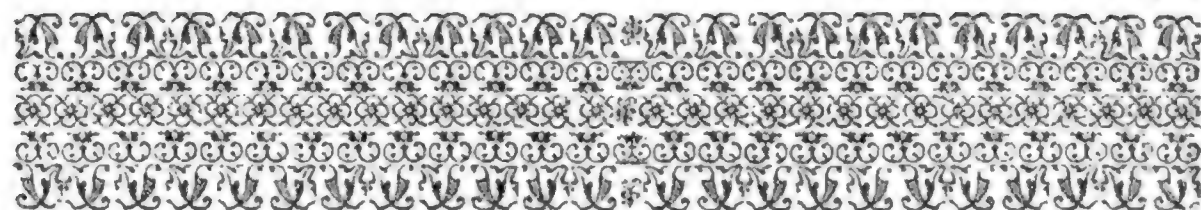
nata igitur dicitur summa, quatenus consideratur ut id, de quo affirmari potest numerus, 6, 12, 19 &c. nullus tamen adhuc de eadem affirmatur: quæ est ipsa notio indeterminati (§. 105 *Ontol.*). At si summa dicatur 6, determinata dicitur; quia jam constat, quinam numerus de ea sit affirmandus: quæ est ipsa notio determinati (§. 112 *Ontol.*). Idem patet de differentia b . Ordinis quoque notio distincta inter eas refertur, quæ difficiles sunt: sed ex seriëbus infinitis, quarum termini ordine dicuntur progredi, haud difficulter eruitur. Ex. gr.

$$\text{in serie } \frac{1}{1 \cdot 2} v^2 - \frac{1}{3 \cdot 4} A v^2 + \frac{1}{5 \cdot 6} B v^2 - \frac{1}{7 \cdot 8} C v^2, \text{ \&c. in infinitum, ubi } A$$

terminum primum, B secundum, C tertium denotat; terminus sequens determinatur ex præcedente eodem modo, ac ideo ordo in progressu terminorum adesse dicitur. Ex identitate determinationis nascitur similitudo (§. 217 *Ontol.*). Ordo igitur hic est similitudo obvia in modo, quo termini se invicem consequuntur; quemadmodum vult definitio nostra ordinis (§. 472 *Ontol.*). Sed pauca hæc sufficient.

Finis Commentationis de Studio Matheseos recte instituendo.

INDICES
IN
TOMOS QUINQUE
ELEMENTORUM
MATHESEOS UNIVERSÆ.



I.

CONSPECTUS ELEMENTORUM MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS I.

I.	De Methodo mathematica brevis commentatio ,	pag. 1
II.	Elementa Arithmeticæ ,	15
III.	Geometriæ ,	95
IV.	Trigonometriæ planæ ,	211
V.	Analyscos finitorum ,	233
VI.	infinitorum ,	417

TOMUS II.

VII.	Elementa Mechanicæ & Staticæ ,	1
VIII.	Hydrostaticæ ,	253
IX.	Aërometriæ ,	279
X.	Hydraulicæ ,	331

TOMUS III.

XI.	Elementa Opticæ ,	1
XII.	Perspectivæ ,	77
XIII.	Catoptricæ ,	103
XIV.	Dioptricæ ,	171
XV.	Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ ,	291
XVI.	Astronomiæ ,	341

TOMUS IV.

XVII.	Elementa Geographiæ & Hydrographiæ ,	1
XVIII.	Chronologiæ ,	85

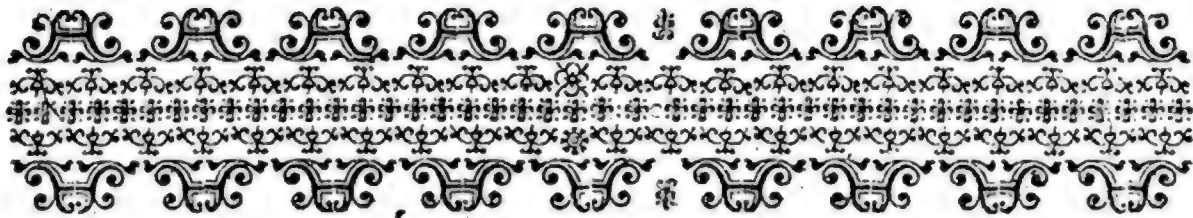
XIX.	Elementa Gnomonicæ,	pag. 151
XX.	Pyrotechniæ,	197
XXI.	Architecturæ militaris,	237
XXII.	Architecturæ civilis,	287

TOMUS V.

XXIII.	De præcipuis scriptis mathematicis brevis Commentatio,	I
Cap. I.	<i>De Cursibus, Operibus atque Lexicis mathematicis,</i>	3
Cap. II.	<i>De Arithmetica,</i>	21
Cap. III.	<i>De Geometria,</i>	24
Cap. IV.	<i>De Scriptis analyticis,</i>	38
Cap. V.	<i>De Trigonometria,</i>	55
Cap. VI.	<i>De Statica & Mechanica,</i>	60
Cap. VII.	<i>De Hydrostatica, Aërometria & Hydraulica,</i>	68
Cap. VIII.	<i>De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva,</i>	73
Cap. IX.	<i>De Astronomia,</i>	79
Cap. X.	<i>De Chronologia, Geographia & Gnomonica,</i>	99
Cap. XI.	<i>De Architectura civili,</i>	109
Cap. XII.	<i>De Pyrotechnia,</i>	118
Cap. XIII.	<i>De Architectura militari,</i>	120
XXIV.	Commentatio de studio mathematico recte instituendo,	129
Cap. I.	<i>De diversis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur,</i>	131
Cap. II.	<i>De modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa,</i>	190
Cap. III.	<i>De Studio Arithmetice, Geometria & Trigonometria plana in specie,</i>	200
Cap. IV.	<i>De Studio Algebrae seu Analyseos mathematica in specie,</i>	209
Cap. V.	<i>De Studio Mechanicæ,</i>	317
Cap. VI.	<i>De Studio Hydrostaticæ, Aërometria & Hydraulica,</i>	326
Cap. VII.	<i>De Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ,</i>	333
Cap. VIII.	<i>De Studio Sphericorum & Trigonometria sphericæ,</i>	346
Cap. IX.	<i>De Studio Astronomiæ,</i>	350
Cap. X.	<i>De Studio Geographiæ, Chronologiæ & Gnomoniæ,</i>	389
Cap. XI.	<i>De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris & Architecturæ civilis,</i>	399

FINIS TOTIUS CONSPECTUS.

II. INDEX



II.

INDEX

Ostendens paragraphos, in quibus definitiones & propositiones Elementorum Euclidis continentur.

Notes velim, Ar. designare Arithmetica, G. Geometria, An. Analysis finitorum.

Elementi I.					
Def. 1.	G. §. 6.	8. 9..	Def. 22.	G. §. 104.	Ax. 3. Ar. 91.
2.	10.	12..	23.	88.	4. 90.
3.	11.		24.	89.	5. 91. 92.
4.	17.		25.	90.	6. 93.
5.	28.		26.	91.	7. 94.
6.	29.		27.	92.	8. G. §. 161.
7.	36.		28.	93.	9. Ar. §. 84.
8.	54.		29.	98.	10. G. §. 250.
9.	54.		30.	100..	11. 50.
10.	65. 78.		31.	99.	12. 145.
11.	66.		32.	101..	13. 262.
12.	66.		33.	103..	14. 170.
14.	32.		34.	81.	Prop. 1. 198.
15.	37.		35.	102..	4. 179.
16.	37.		36.	111.	5. 184.
17.	39..		Post. 1..	20..	6. 253.
18.	135.		2..	21.	7. 202.
19.	34.		3.	131.	8. 204.
20.	87.		Ax. 1. Ar. 87. 89.		9. 209.
21.	97.		2.	88.	10. 210.

E f f 3.

Ph.

Pr. 11. G. §. 212.

12. 216.

13. 147.

14. 147.

15. 156.

16. 188.

17. 247.

18. 189.

19. 189.

20. 190.

21. 300.

22. 205.

23. 208.

26. 251.

27. 255.

28. 255.

29. 233.

30. 232.

31. 258.

32. 239. 240.

33. 257.

34. 335. 337.

35. 383.

36. 383.

37. 385.

38. 385.

41. 386.

44. 391.

45. 391.

46. 338.

47. 417.

48. 417.

Elem. II.

Pr. 1. An. 91.

2. 93.

3. 86.

4. Ar. 261.

An. 95.

Pr. 5. An. §. 88.

6. 94.

7. 90.

8. 90.

9. 89.

11. 258.

Elem. III.

Def. 1. G. 171.

2. 47.

3. 47.

4. 225.

5. 225.

6. 45.

7. 77.

8. 70.

9. 56.

10. 46.

Pr. 1. 295.

3. 291.

4. 332.

5. 288.

6. 287.

7. 303.

8. 302.

9. 173.

10. 203.

14. 298.

15. 299. 301.

16. 304. 305.

17. An. 291.

18. G. 308.

19. 309.

20. 313.

21. 315.

22. 350.

25. 295.

26. 315.

27. 315.

Pr. 28. G. §. 289.

29. 289.

30. 293.

31. 317.

318.

319.

32. 323.

35. 381.

36. 379.

37. 380.

Elem. IV.

Def. 3. G. §. 116.

6. 117.

Pr 5. 294.

297.

6. 353.

7. 351.

11. An. 279.

12. G. 355.

15. 357.

Elem. V.

Def. 1. Ar. 30.

2. 142.

3. 126.

4. 131.

5. 219.

6. 155.

7. 158.

8. 155.

9. 156.

10. 159. 216.

11. 159. 216.

13. 173.

14. 169.

15. 190.

16. 193.

17. 193.

18. 194. 195.

Def. 19.

Def. 19. Ar. §. 194.

20. 195.

Pr. 4. 185.

5. 188.

6. 188.

7. 168.

8. 203. 205.

9. 177.

10. 204. 206.

11. 167.

12. 155.

15. 178.

16. 173.

17. 193.

18. 190.

19. 188.

22. 194.

23. 198.

Elem. VI.

Def. 1. G. 175.

2. An. 261.

3. 258.

4. G. 227.

5. Ar. 159.

Pr. 1. G. 389.

2. 268.

3. 269.

4. 267.

5. 207.

6. 183.

8. 329.

9. 274.

10. 275.

12. 271.

13. 327.

16. 378.

17. 377.

18. 360.

Pr. 19. G. §. 398.

20. 403.

23. 376. 388.

30. An. 258.

33. G. 314.

Elem. VII.

Def. 1. Ar. §. 3. 4.

2. 10.

3. 30.

4. 30.

5. 142.

6. 72.

7. 73.

11. 75.

12. 79.

13. 76.

14. 80.

15. 66. 69.

18. 246.

19. 248.

20. 155.

22. An. 248.

23. Ar. 74.

24. 126.

26. 159.

27. 217.

Ax. 7. 210.

9. 212.

Pr. 1. 230.

2. 228.

11. 188.

12. 187.

13. 173.

14. 194.

16. 207.

17. 178.

18. 178.

19. 297. 299.

Pr. 20. Ar. §. 298.

22. 198.

Elem. VIII.

Pr. 11. Ar. §. 259.

12. 259.

13. 260.

Elem. IX.

Pr. 21. An. §. 72.

22. 75.

23. 75.

24. 72.

25. 73.

26. 74.

27. 73.

28. 72.

29. 74.

30. 79.

35. 119.

36. 248.

Elem. X.

Def. 1. Ar. §. 31.

2. 31.

6. 39.

7. 43.

Pr. 3. 230.

5. 163.

6. 160.

7. 163.

8. 164.

117. G. 421.

Elem. XI.

Def. 1. G. §. 444.

3. 486.

4. 494.

6. 476.

8. 498.

9. 564.

11. 445.

Def. 12.

Def. 12. G. §. 472.

13. 456.

14. 470.

15. 470.

16. 470.

17. 470.

18. 467.

19. 467.

20. 468.

27. 475.

28. 475.

29. 475.

30. 462.

Pr. 1. 478.

2. 480. 481.

3. 482.

4. 484.

5. 491.

6. 492.

7. 483.

8. 492.

9. 495.

10. 496.

Pr. 11. G. §. 505.

12. 502.

13. 488.

14. 497.

15. 500.

16. 499.

17. 501.

18. 506.

19. 508.

21. 452.

28. 537.

29. 535.

30. 535.

31. 535.

32. 573.

33. 578.

34. 580.

Elem. XII.

Pr. 1. G. 408.

2. 408.

5. 573.

6. 573.

7. 543.

Pr. 8. G. §. 578.

9. 580.

10. 547.

11. 573.

12. 578.

14. 573.

15. 580.

18. 579.

Elem. XIII.

Pr. 8. An. 294.

9. 275.

10. 279.

12. 268.

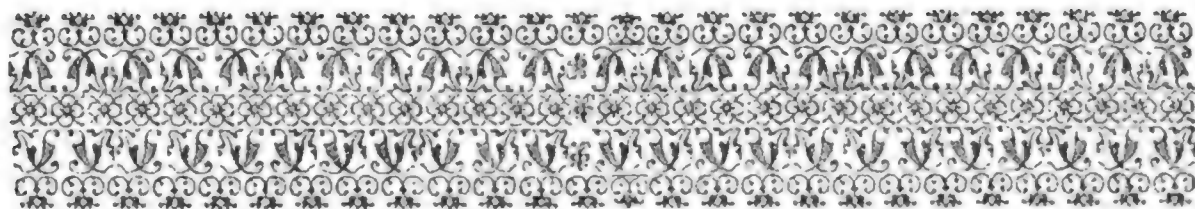
13. 299.

14. 305.

15. 302.

16. 311. &
feqq.17. 308. &
feqq.18. 301. 304.
307. 310.
311.*FINIS INDICIS SECUNDI.*

III. IN-



III.

INDEX AUTORUM,

*Qui in Commentatione de praeipuis scriptis mathematicis
recensentur.*

Notes velim Numerum Romanum Caput, ceteros vero §. §. ejusdem
designare.

A.

A Balphatus Asphahamenfis, III. 13.
 Albategnius, IX. 2. 12.
 Alberti, Andreas, VIII. 21.
 de Albertis, Leo Baptista, XI. 1. 2. 3.
 Alexander, Dominicus Jacobus, VI. 27. 31.
 Albazen, VIII. 2. 3. 31.
 Alimarus, Dorotheus, X. 20.
 Alingham, Wilhelmus, I. 8.
 Alphonsus IX. IX. 25.
 S. Andreas Hierosolymitanus, X. 2.
 Anonymi, VI. 26. VII. 8. IX. 2. 57. XI. 15.
 26. 30. XIII. 17. 27.
 Apollonius Pergæus, I. 1. 24. III. 11. 13.
 25. 28. 29. IV. 1. VII. 14.
 Aratus, X. 2.
 Archimedes, I. 24. 34. III. 11. 12. 13. 29.
 VI. 1. VII. 1. 14.
 Ardäfer, Joannes, III. 34.
 des Argues, XI. 24.
 Aristæus, III. 13. IV. 1.
 Aristarchus Samius, I. 34. VII. 14.
 Athenæus, I. 30.
 Auzout, I. 31. 37.
B Achetus, Casparus, IV. 2.
 Bacon, Rogerius, VIII. 5.
 Baker, Thomas, IV. 8.
 Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

Baldus, Bernhardinus, I. 30. XI. 1.
 Balianus, Johannes Baptista, VI. 5. VII. 10.
 Bara, J. VIII. 20.
 Baratteri, Johannes Baptista, XI. 26.
 Barlaamus Monachus, II. 5.
 Barrowius, Isaacus, III. 2. 11. 19. 29. IV.
 8. 23. VIII. 14.
 Bartholinus, Erasmus, IV. 6.
 Bartschius, Jacobus, V. 10.
 Bayerus, Johannes, IX. 35.
 Johannes Hartmannus, II. 16.
 Johannes Matthias, VI. 22.
 de Beaune, Florimundus, IV. 6.
 Bedford, Arturus, X. 6.
 Beeren, Thomas Leonhardus, XII. 1.
 Behr, Johannes Henricus, XIII. 25.
 de Belidor, VII. 18. XII. 8. XIII. 34.
 Berger, Christianus Philippus, VI. 27.
 IX. 36.
 Bernoulli, Daniel, VII. 12.
 Jacobus, IV. 18. 21. IX. 39.
 Johannes, IV. 14. 18. 19. 31. 33.
 35. 36. X. 21.
 Nicolaus, IV. 14. X. 21.
 Beroaldus, Franciscus, VI. 20.
 Besson, Jacobus, VI. 20.
 G g g Beve-

- Beveregius*, Guilielmus, X. 5.
Beyerus, Johannes Hartmannus, III. 31.
de Beze, I. 37.
Bierum, Henricus, X. 33.
de Billy, Jacobus, III. 26.
Bion, Joannes Theobaldus, I. 13.
 Nicolaus, IX. 35. X. 35. 38.
de Birac, XIII. 37.
Biton, I. 30.
Blanchini, Franciscus, IX. 8. 39. X. 7.
Bleau, Guilielmus, IX. 35. X. 39.
le Blond, XI. 9.
Biondel, Franciscus, I. 37. X. 7. XI. 10.
 XII. 8. XIII. 427.
Bäckler, Georgius Andreas, VII. 16. XI.
 5. XII. 7. XIII. 36.
Bäcklerus, Joannes, III. 31.
Bœthius, Anitius Manlius Severinus, II. 1.
Bombelle, XIII. 27.
Bombelli, Raphaël, IV. 3.
Bonannus, Philippus, VIII. 19.
Bone, Edmundus, III. 39.
Bonjour, Guilielmus, X. 7.
Borellus, Johannes Alphonfus, III. 13.
 VI. 3.
de Bergsdorf, Ernestus Fridericus, XIII. 9.
Borromini, Franciscus, XI. 19.
Bose, Georgius Matthias, IX. 43.
Bosse, Abrahamus, VIII. 20.
Boyle, Robertus, VII. 3.
Braikenridge, Guilielmus, IV. 37.
Brama, XI. 9.
Brand, Augustinus, XII. 6. 7.
Braunius, Ernestus, XII. 1.
Bremond, I. 36.
Briennius, Manuel, I. 34.
Briggius, Henricus, V. 11.
Browne, Wilhelmus, VIII. 15.
Brunetti, Franciscus Xaverius, IV. 39.
Buchnerus, Joannes Sigismundus, XII. 1.
de Buffon, IV. 27.
Bullet, XI. 29.
Bullialdus, Ismaël, III. 23. IV. 17. V. 16.
 IX. 3. 18. 20. 28. 41.
Buonaroti, Michaël Angelus, XI. 7.
- Byrgius*, Justus, III. 39. IV. 38. V. 10.
 14. IX. 2.
- C.
- Alvifius*, Sethus, X. 3. 7.
de Camus, VI. 19.
Cantzlerus, Bernhardus, III. 32.
Capellus, Angelus, IX. 44.
Carré, IV. 20.
Cartesius, Renatus, IV. 6. 20. VIII. 7.
Casatus, Paulus, VI. 2.
Cassini, Johannes Dominicus, I. 37. IX. 6.
 30. 53. X. 7. 24.
 Jacobus, IX. 6. 30.
Castellus, Robertus, XI. 17.
Castronius, Benedictus Maria, X. 37.
Caswellus, Johannes, I. 34.
Cataneo, Petrus, XI. 9.
Cavalerius, Bonaventura, III. 12. 24. IV.
 17. V. 15.
Ceva, Joannes, VII. 9.
 Thomas, I. 35.
Chamberus, Joannes, II. 5.
de Chambray, Roland Freard, XI. 9.
Chambers, E. I. 19.
Chamberus, Johannes, II. 5.
de Champdoré, Duræus, XI. 7.
Cherubim, VIII. 10.
Cheyneus, Georgius, IV. 22.
Christmannus, Jacobus, X. 8.
Claramentius, Scipio, -IX. 39.
Clarke, Joannes, IV. 39. VI. 16.
 Samuel, VIII. 12.
Clavius, Christophorus, I. 24. II. 12.
 III. 33. IX. 24. 38. X. 7. 9. 26.
du Clos, I. 37.
Coehorn, XII. 4. 7. 27. XIII. 6. 26. 27.
Coetsius, Henricus, X. 32.
Collins, Joannes, I. 34. IV. 34.
Colombonus, Angelus Maria, X. 38.
Colson, Joannes, IV. 27.
Combachius, Johannes, VIII. 5.
Commandinus, Fridericus, III. 8. VII. 16.
Commentarii Academiae Scientiarum Im-
 perialis Petropolitanae, I. 39.
 Gom-

Commentarii de Bononiensi Scientiarum & Artium Instituto atque Academia, [I. 40.](#)

Conradi, Johannes Michaël, [VIII. 17.](#)

Copernicus, Nicolaus, [IX. 2. 13. 26. 39.](#)

Cotes, Rogerus, [IV. 30. VI. 13.](#)

Crabtrius, Guilielmus, [IX. 4.](#)

Craige, Johannes, [IV. 23.](#)

de Crouzas, [IV. 13. 19.](#)

Cunitia, Maria, [IX. 27.](#)

Cunn, Samuel, [II. 17. III. 39.](#)

Curio, Jacobus, [IX. 15.](#)

D.

D*Asypodius*, Conradus, [I. 15. III. 4.](#)

Dechales, Claudius Franciscus Mil-

liet, [I. 4. II. 12. III. 2. 29. V. 20. VI.](#)

[11. VII. 5. 15. X. 11. 14. XI. 23.](#)

[XII. 1. XIII. 15.](#)

Deidier, [XIII. 27.](#)

Demontiosius, Ludovicus, [XI. 1.](#)

Deran, Philippus, [XI. 24.](#)

Derham, Wilhelmus, [VI. 26. IX. 39.](#)

Desiguiliers, J. Theoph. [VIII. 15.](#)

Desargues, [VIII. 20.](#)

Desgodetz, Antonius, [XI. 13.](#)

Detonvillaus, [III. 14.](#)

Dieussart, Carolus Philippus, [XI. 9.](#)

Dilichius, Wilhelmus, [XIII. 15.](#)

Diophantus Alexandrinus, [I. 23. 27.](#)

[IV. 2. 9.](#)

Ditton, Henricus, [VI. 15.](#)

Humphredus, [IV. 39.](#)

Dodartus, [I. 37.](#)

Doegen, Matthias, [XIII. 18.](#)

Domkey, [VI. 16.](#)

Doppelmeyer, J. Gabriel, [IX. 20. X. 31. 35.](#)

E.

E*chellenfis Maronita*, Abrahamus, [III.](#)

[13.](#)

Eisenschmid, Joannes Casparus, [V. 10.](#)

Elrich, Daniel, [XII. 1.](#)

Eratosthenes, [IV. 1.](#)

Errardus, [XIII. 27.](#)

Eslerus, Joannes, [IX. 24.](#)

Euclides, [I. 1. 2. 4. 7. 23. 24. 29. 32. 34.](#)

[II. 6. 4. III. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 10. IV.](#)

[1. VII. 14. VIII. 1. X. 15.](#)

Eulerus, Leonhardus, [VI. 18. VII. 12.](#)

Eustachius de Divinis, [I. 35.](#)

Eutocius, [I. 34.](#)

F.

F*aber Stapulensis*, Jacobus, [II. 3.](#)

Fabry, Honoratus, [IV. 37. VIII. 26.](#)

Fâsch, Joannes Ludolphus, [I. 22.](#)

Faulhaber, Joannes, [IV. 38. XIII. 30.](#)

du Fay, Abbas, [XIII. 5.](#)

Fermatius, [I. 31. IV. 8.](#)

Feuillée, Franciscus, [X. 22.](#)

Lodovicus, [IX. 9.](#)

Finæus, O. ontius, [III. 2.](#)

Fischer ab Erlaichen, Johannes Bernhar-

duus, [XI. 18.](#)

Flamstadius, Joannes, [I. 34. IX. 7. 28.](#)

[33. 34.](#)

von Flemming, Joannis F. idericus, [XIII. 37.](#)

Flussates Candalla, Franciscus, [III. 2.](#)

de Fontenelle, Bernhardus, [I. 37. IV. 33.](#)

Fournier, Georgius, [X. 14.](#)

Frenicle de Bessy, [I. 31. 37.](#)

Freytag, Adamus, [XIII. 1.](#)

Frezier, [XI. 25.](#)

Frisius, Gemma, [II. 14.](#)

Frontinus, Sextus Julius, [VII. 13.](#)

G.

G*alilaus Galilæi*, [III. 39. VI. 4. VIII. 6.](#)

[IX. 39. 41.](#)

Gallonus, [IV. 25.](#)

Gaubil, [IX. 9.](#)

Ganppe, Joannes, [X. 33.](#)

Gauricus, Lucas, [IX. 10. XI. 1.](#)

Gautier, Henricus, [XI. 27.](#)

Gaza, Theodorus, [X. 2.](#)

Gellibrand, Henricus, [V. 12.](#)

Gemma Frisius, [II. 14.](#)

Germanus, Georgius, [I. 24.](#)

Ghetaldus, Marinus, [I. 1. IV. 6. 9. VII. 1.](#)

Ghislerius, Antonius, [IX. 56.](#)

Girardus, Albertus, [I. 23.](#)

Glafer, Joannes Christophorus, [XIII. 35.](#)

Goldmann, Nicolaus, [III. 39. XI. 11.](#)

G g g 2

Gooden,

Gooden, Jacobus, V. 19.
Gordonius, Georgius, X. 18.
de Gottignes, Ægidius Franciscus, IV. 15.
Goulon, XIII. 31.
de Graaf, Abrahamus, I. 6. IV. 12.
Grandus, Guido, I. 35. III. 16.
s' Gravesand, G. J. IV. 12. VIII. 25.
Gray, Joannes, I. 36.
Gregorius à S. Vincentio, I. 35. III. 14.
 Jacobus, IV. 22. VIII. 14. 15.
 David, III. 2. IV. 22. VIII. 15.
 IX. 22. 40.
Griendel von Aach, Johannes Franciscus,
 VIII. 19. XIII. 14. 21.
de Grotte, Alexander, XIII. 7.
Gruber, Bernhardus, X. 37. 38.
 Sebastianus, XIII. 25.
Guarinus, X. 27.
Guisnée, IV. 11.
Guldinus, Paulus, III. 18. IV. 8.
Gulielminus, Dominicus, I. 40. VII. 11.
 15. XI. 26.

H.

H *Adley*, J. VIII. 15.
 Halfpenny, Guilielmus, XI. 22.
Halley, Edmundus, III. 13. 28. IV. 12.
 IX. 3. 7.
du Hamel, Johannes Baptistá, IX. 39.
Hanke, Johannes, IX. 43.
Hartmannus, XIII. 26.
Harriot, Thomas, IV. 5.
Harris, J. I. 18. IV. 6.
Harsdærffer, Philippus, I. 42.
Hartsäker, Nicolaus, VIII. 9.
Hafius, Johannes Matthias, III. 37. XIII. 33.
Hausen, Christianus Augustus, III. 16.
Hawney, Wilhelmus, V. 18.
Hayes, Carolus, IV. 24.
Hazan, Isaacus, IX. 25.
Heer, Christophorus, XIII. 14. 30.
Heidenmann, Christophorus, XIII. 14.
Henischius, Georgius, II. 10. IV. 3.
ab Herberstein, Ferdinandus Ernestus Com-
 mes, III. 26.
Herigonius, Petrus, I. 1. II. 12. III. 2. VIII. 1.

Herlinus, Christianus, III. 4.
 Ludovicus Andreas, XIII. 11.
Hermannus, Jacobus, IV. 33. VI. 17.
 VII. 11. 15.
Heron Alexandrinus, I. 30. VII. 16.
Hertel, Christianus Gottlieb, VIII. 18.
Herward ab Hohenburg, Johannes Georg-
 gius, II. 18.
Hevelius, Johannes, XI. 3. 31. 35. 39.
Hipparchus, IX. 1. 32. X. 2.
de la Hire, Philippus, III. 14. 15. 33.
 IV. 11. VI. 10. VII. 19. IX. 6. 30.
 43. 44. X. 28.
*Histoire de l'Académie Royale des Scien-
 ces*, I. 37.
Hodgson, Jacobus, X. 15.
Hooke, Robertus, VIII. 19. IX. 3.
Horocius, Jeremias, IX. 4. 17. 39.
Horrebowius, Petrus, IX. 41. 50. 51. 54.
Hortensius, Martinus, V. 6.
de l'Hospital, Marchio, IV. 11. 19. 20. 23.
 39. VI. 12.
Hostus, I. 29.
Hugenius, Christianus, I. 31. 35. III. 14.
 20. 25. IV. 6. 14. VI. 5. 7. 8. 12. 24.
 VIII. 8. 13. 18. IX. 39. 48. X. 21.
Hulsius, Levinus, III. 39.
Hyde, Thomas, IX. 32.

I.

I *Acquier*, Franciscus, VI. 16.
 Intieri, Bartholomæus, IV. 37.
Joannes de Sacro Bosco, I. 24. IX. 24. X. 9.
Joannes Peccamus, VIII. 4.
Jones, Wilhelmus, IV. 21. 30. 32. 34.
Jordanus, II. 3.
Isaacus Monachus, X. 2.
Julius Africanus, I. 30.
Jungenickel, Andreas, VI. 2.
Jurin, Jacobus, X. 12.

K.

K *Eiil*, Joannes, III. 8. IV. 34. 35. 36.
 VI. 9. 12. 23. X. 18.
Kepplerus, Joannes, II. 12. V. 10. VII. 3.
 VIII. 6. IX. 16. 17. 18. 27. 32. 39. 40. 55.
Kersey, Joannes, IV. 9.
 Kinck

Kinckhuysen, Gerhardus, IV. 12.
Kircherus, Athanasius, I. 2. III. 40. VIII. 16.
Klimmius, Johannes Albertus, IX. 44.
Kolhans, Johannes Christophorus, VIII. 17.
Kresa, Jacobus, V. 22.

L.

de **L** *Aigny*, I. 37.
Lalovera, Antonius, III. 16.
Lambion, Lambertus, XIII. 30.
Lamy, Bernhardus, III. 6. IV. 10. VI. 2.
 VII. 5. VIII. 21.
Landsbergius, J. H. XIII. 12.
Langhans, Christophorus, IX. 43.
Langley, Batty, III. 36. XI. 29.
 de *Lanis*, Franciscus Tertius, VII. 4.
Lansbergius, Philippus, I. 26. V. 7. IX.
 13. 16. 17. 28.
Lauterbach, Joannes Balthasar, XI. 14.
van Leenwenhoek, Antonius, VIII. 19.
Leibnitius, Godofredus Guilielmus, I. 11.
 12. 21. 34. II. 15. IV. 10. 20. 22. 23. 31.
 33. 34. 35. IX. 16.
Leotaudus, Vincentius, II. 12.
Leupoldus, Jacobus, VI. 20. VII. 19.
Leurmannus, Joannes Georgius, IV. 26.
 VIII. 18.
Leyborn, Wilhelmus, I. 5.
Liebknecht, J. G. X. 13.
Limpergh, Petrus, VI. 23.
Longomontanus, Christianus Severinus,
 IV. 14. 16. 27.
Lorenzini, Laurentius, III. 22.
Lorinus, Bonajutus, XIII. 19.
 de *Lorme*, Philibertus, XI. 24.
Lowthorp, Joannes, I. 36.
Lucas Pacioli de *Burgo S. Sepulchri*, II.
 6. IV. 3.

M.

M *Ac Laurin*, Colinus, IV. 37.
Massejus, Scipio, XI. 17.
Maginus, Joannes Antonius, IX. 55.
 le *Maître*, Alexander Christianus, XIII. 20.
 de *Malefieux*, III. 6.

Mallet, Allain Manesson, III. 30. XIII. 28.
Manfredi, Eustachius, I. 40. IX. 52. 53.
 56. X. 7.

Gabriel, I. 40. IV. 20.

Maphæus, Thomas Pius, X. 7.
Maraldus, IX. 6.

de *Marchettis*, Angelus, III. 7. 27.
Marinonius, Joannes Jacobus, VIII. 13.
Mariottus, I. 31. VI. 11. VII. 2. 10. 19.
 VIII. 13.

Marolois, XIII. 27.

de *Martino*, Nicolaus, III. 16.

Martius, Georgius Conradus, XIII. 25.

Maurolycus, Franciscus, I. 32. II. 9. VII. 14.

de *Maupertuis*, IX. 25. 39.

S. Maximus Martyr, X. 2.

de *Medrano*, Don Sebastian Fernandez,
 XIII. 24.

Megerlinus, Petrus, IX. 41.

Melder, Gerhardus, XIII. 1.

Menecbmus, IV. 8.

Menelaus, VII. 14.

Mercator, Nicolaus, I. 5. IV. 21. IX. 23. 27.

Mersennus, Marinus, I. 31. 37. VII. 14.

Merius, Adrianus, II. 14. III. 34. X. 39.

Meyer, Cornelius, XI. 26.

Mezzavacca, IX. 56.

Michaëlis, Georgius, X. 32.

Mierh, Michael, XII. 2.

Milnes, Jacobus, III. 14.

Miscellanea Berolimensia, I. 38.

Mästlinus, Michaël, IX. 2. 14.

de *Moiivre*, Abrahamus, IV. 14. 29.

Molerus, Elias, IX. 43.

Molyncux, Wilhelmus, VIII. 8.

de *Monmort*, Remundus, IV. 14.

Moore, Jonas, I. 3.

Morinus, Johannes Baptista, IX. 27. 58.

Morlandus, Samuel, II. 15.

Motte, Benjaminus, I. 36.

Muet, XI. 15.

Müller, Johannes Ulricus, X. 32.

Münsterus, Sebastianus, X. 8. 29.

Muhammedes Tixinus, IX. 32.

van *Musschenbroek*, Petrus, X. 23.

- Aldorgius, Claudius*, III. 14. VII. 14.
 N.
N*Eperus, Joannes*, II. 18. V. 8. 14.
Neubauer, Christianus, XIII. 8.
Newton, Joannes, V. 13. IX. 20. 28.
Newton, Isaacus, I. 34. IV. 12. 16. 18. 20.
 21. 22. 23. 26. 27. 30. 35. VI. 13. VII.
 6. 11. VIII. 12. 15. IX. 16. 40. X. 6.
Niceron, Joannes Franciscus, VIII. 22.
Nicomachus, II. 1. 6.
Nieuventyt, Bernhardus, IV. 33.
Noël, Franciscus, IX. 9. 22.
Norwood, Richardus, V. 17.
 O.
 de **O***Merique, Hugo*, IV. 16.
Ori, Rabbi, X. 8.
Origanus, David, IX. 55.
 de l'*Orme, Philibertus*, XI. 2. 6.
Osvwaldus, Erasmus, IX. 10.
Orho, L. Valentinus, V. 4.
Oughtredus, Guilielmus, I. 27. IV. 4. V.
 16. VI. 2. 26. VII. 1.
Ozanam, L. 7. 17. 33. 43. III. 15. 39. 33.
 IV. 10. 11. V. 20. 21. XIII. 24.
 P.
 de **P***Agan, Comes*, III. 23. IX. 19. 28.
 XIII. 2. 17. 27.
Palladius, Andreas, XI. 4. 5. 9. 10.
Palma, Johannes Baptista, III. 26.
Pappus Alexandrinus, I. 34. III. 13. 17.
 28. 29. IV. 4. VI. 1. VII. 14.
Pardies, Ignatius Galton, III. 6. VI. 2. 11.
 X. 36.
Parent, VI. 11.
Pascal, III. 14. IV. 14.
Paschalius, Julius, VI. 20.
Patoun, Archibaldus, X. 17.
Peletarius, Jacobus, III. 2.
Pemberton, Henricus, IV. 16. 27. 30.
Pena, Joannes, VIII. 1. 6.
Perrault, I. 37. VI. 3. 6. 24. XI. 2.
Petavius, Dionysius, X. 2. 5.
Philander, Guilielmus, XI. 1.
Philo, I. 30.
Philosophical Transactions, I. 36.
Picardus, I. 31. VII. 10. 19. X. 24. 28.
Pitiscus, Bartholomæus, V. 3. 5.
Pitot, X. 21.
Polenus, Joannes, II. 15. VII. 13. IX. 40.
Polynier, Petrus, III. 7.
Porphyrus, I. 34.
Porta, Joannes Baptista, VIII. 6.
Portius, Lucas Antonius, VII. 16.
Post, Petrus, XI. 16.
Preslet, Joannes, IV. 9. 10.
Pfellus, II. 2.
Ptolomæus, Claudius, I. 34. V. 1. IX. 2.
 10. 11. 32. 58. X. 9.
Purbachius, Georgius, V. 7. IX. 2. 11. 24. 25.
Puzzo, Andreas, VIII. 24.
 Q.
Q*uadrus, Joannes Ludovicus*, X. 38.
Quartaironius, Dominicus, X. 7.
 R.
R*Abuel, Claudius*, IV. 7.
 de *Ramellis, Augustinus*, VI. 2.
Ramus, Petrus, III. 5. VII. 14.
Ranzovius, Henricus, IX. 58.
Raphson, Josephus, IV. 12. 35.
 de *Rees, K. F.*, II. 14.
Regiomontanus, Joannes, V. 2. 14. IX. 2.
 11. 24. 25.
Reidius, I. 56.
Reinholdus, Erasmus, III. 38. IX. 16.
Rembold, Johannes Christophorus, VIII. 23.
Renau, X. 21.
Reyherus, Samuel, II. 18.
Reyneau, Carolus, IV. 25.
Rheticus, Georgius Joachinnus, V. 3. IX. 39.
Rhodium, Ambrosius, VIII. 4.
Riccatius, Jacobus, I. 40.
Ricciolus, Joannes Baptista, IX. 5. 22. 28.
 32. 39. X. 4. 10. 11.
Riccus, Michaël Angelus, IV. 21.
Richardus, Claudius, III. 13.
Richerus, I. 37.
Rimpler, Georgius, XIII. 10. & seqq.
Risnerus, Fridericus, VIII. 2. 3.
Rivius, Gualterus H., XI. 2.
Rizettus, Joannes, I. 40.
 Rober-

Robervallius, Ægidius Perfonerus, *L.* 31.
37. IV. 8.
Robins, Benjamin, VII. 12.
Ræmerus, Olaus, *L.* 37. VII. 10. IX. 50.
51. 54.
Robault, Jacobus, VI. 2.
Rolle, IV. 13.
Romanus, Adrianus, *L.* 25.
Ronayne, IV. 32.
Rondelli, Geminianus, V. 15.
Rosetti, Donatus, XIII. 7. 20.
de Rossi, Dominicus, XI. 12.
Rostius, Joannes Ludovicus, IX. 45.
Rothmannus, Christophorus, IX. 2.
Rozard, XIII. 23.
Rudolphus, Christophorus, IV. 3.
Ruggieri, Ferdinandus, XI. 20.
de Rußenstein, Henricus Rufius Baro,
XIII. 3.

S.

Saccherius, Hieronymus, III. 9.
de Saint Julien, Chevalier, XII. 5. 7.
XIII. 24. 27.
Salmasius, Claudius, XI. 1.
Santini, Vincentius, III. 16.
Sardius, XIII. 27.
Scaliger, Josephus, I. 24. X. 1.
Scamozzi, Vincentius, XI. 8. 9.
Scarlet, Eduardus, VIII. 15.
Scheffelt, Michaël, III. 39.
Scheinerus, Christophorus, VIII. 11. IX. 39.
Scheiter, Joannes Bernhardus, XIII. 8. 27.
Schenbelsius, Joannes, III. 3.
Scheubler, Joannes Jacobus, X. 34.
Schickardus, Wilhelmus, IX. 2. 35.
Schildknecht, Wendelinus, XIII. 16.
Schmidius, Joannes Andreas, III. 6.
Schonerus, Joannes, III. 5. V. 2. IX. 25.
35. 37. 46. 58.
Andreas, IX. 46.
à Schooten, Franciscus, III. 25. IV. 6. 7. 14.
Schottus, Casparus, I. 2. 41. II. 12. III.
40. VI. 28. 29. VII. 16. IX. 48.
Schreckenbachius, Erasmus Oswaldus, IX. 24.

Schwoenterus, Daniel, *L.* 42. III. 31.
Schyrlaus de Rheita, Antonius Maria, IX. 42.
Scipio Ferreus, IV. 3.
Serenus, III. 13.
Sererius, Josephus, I. 13. 20.
Serlius, Sebastianus, XI. 4.
le Seur, Thomas, VI. 16.
Seyler, Joannes Christianus, XI. 9.
Sharpus, Abrahamus, III. 35. IX. 7.
Simienovitz, Casimirus, XII. 1.
Slufius, Renatus, IV. 8.
Smith, Jacobus, XI. 2. 5.
Robertus, IV. 30. VIII. 26.
Snellius, Willebrordus, *L.* 1. III. 21. V. 6.
VIII. 7. IX. 2. 19. 23.
Speckle, Daniel, XIII. 13.
Stadius, Joannes, IX. 55.
Stengel, Johannes Peterfon, X. 32.
Stephanus de Angelis, III. 24.
Stevinus, Simon, *L.* 23. VI. 2. 3. VII. 14.
Stifelius, Michaël, II. 7. IV. 3. V. 14.
Stirling, Jacobus, IV. 26. 28.
Stone, Edmondus, IV. 19.
Strada, Jacobus, VI. 20. XI. 4.
Strauchius, Ægidius, IX. 35. X. 5.
Streete, Carolus, IX. 28.
Thomas, IX. 20.
Sturmus, Joannes Christophorus, I. 9.
III. 11. X. 30. XIII. 22.
Sturmus, Leonhardus Christophorus, I.
10. III. 38. VII. 19. X. 13. XI. 7.
II. 21. XIII. 5. 10. 27.
Sully, Henricus, VI. 27.
Survirey de St. Remy, XII. 3.
Sutherland, Wilhelmus, XI. 28.
Süttinger, Daniel, XIII. 10.
Svizer, Stephanus, VII. 16.

T.

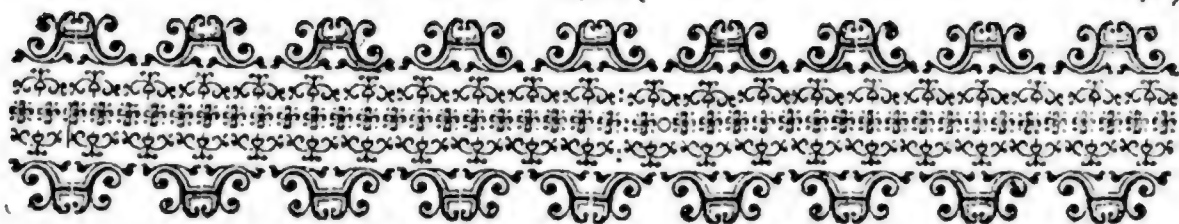
Tacquet, Andreas, *L.* 28. II. 11. III.
2. 11. 33. VIII. 14. IX. 15. 38.
Tartaglia, Nicolaus, II. 8. III. 2.
Tatius, Achilles, X. 2.
Taylor, Jacobus, I. 8.
Brook, IV. 31.
Teyler, Joannes, XIII. 33.
Theo-

Theodosius, I. 1. 4. 24. III. 11. 29. VII. 14.
Torricellius, Evangelista, I. 31. 37. III.
 12. VI. 5.
Traberus, Zacharias, VIII. 16.
Trapezuntius, Georgius, IX. 10.
Trevigar, L. IV. 39.
Treu, Abdias, III. 32.
de Tschirnhausen, Ehrenfried Waltherus,
 IV. 12.
Tycho de Brahe, IX. 2. 27. 32. 47.
 V.
V *Alk*, Gerardus, IX. 37.
Varcinus, Amatus, I. 4.
Varenius, Bernhardus, X. 12.
Varignonius, IV. 19. VI. 3. 4. 14. VII. 11.
de Vanban, Comes, XIII. 5. 17. 23. 26.
 27. 32..
Ubaldu, Guidus, VI. 2. VII. 14.
de la Vergne, Jacobus, XIII. 21.
Veteranus, Simon Laurentius, I. 28.
Victoria, X. 2.
Vieta, Franciscus, I. 1. 24. 25. IV. 4. 9. X. 7.
Vignola, Jacobus Barozzius, XI. 7. 9. 10.
de Ville, Antonius, XIII. 17. 27.
Villemot, Philippus, IX. 16.
Vingboon, Philippus, XI. 16.
Virdungus, Joannes, IX. 25.
Vitalis, Hieronymus, I. 16.
Vitellio, I. 3. L. VIII. 3.
Vitruvius, XI. 1. 10.
Viviani, Vincentius, I. 33. III. 13. 22. 26.
Vlacq, Adrianus, V. 11. 21.
Ulugh Beigh, IX. 32.
Vogel, Johannes, XI. 23.
Voigtel, Nicolaus, III. 38.
Ursinus, Benjamin, V. 9.
Uttenhoeffer, Casparus, X. 34.
 W.
W *Aller*, Richardus, X. 24.
Wallisius, Joannes, I. 34. II. 12.

IV. 17. 18. VI. 7. 8. VII. 5.
Waltherus, Bernhardus, IX. 2. 25.
Wardus, Joannes, X. 18.
 Sethus, V. 16. IX. 18. 19. 20.
Warnerus, Waltherus, IV. 5.
Weidlerus, Joannes Fridericus, III. 38.
Weigeliu, Erhardus, X. 7. 10.
Weinig, Joannes Christophorus, VII. 2.
Wells, Eduardus, II. 12.
Welperus, Eberhardus, X. 29. 30.
Wernerus, Joannes, IX. 2. 25.
Wertmüller, Johannes Jacobus, XIII. 29.
Whiston, Guilielmus, III. 2. IV. 12. IX.
 23. 28.
Wideburgius, Joannes Bernhardus, IX. 43.
Wilhelm, Joannes, XI. 23.
Wilhelmus, Landgravius Hassæ, IX. 2.
Willichius, Jodocus, II. 2.
Wilson, Henricus, III. 33. V. 16. X. 16.
Wing, Vincentius, IX. 2. 20.
de Witt, Joannes, IV. 6. IX. 38.
Wolfius, Christianus, I. 11. II. 13. III.
 10. VII. 7.
 Jeremias, XI. 21.
Wormbser, David, XIII. 19.
Wotton, Henricus, XI. 1.
Wren, Christophorus, VI. 7.
Wurstisius, Christianus, IX. 24.
a Wurtzelbauer, Joannes Philippus, IX. 49.
 X.
X *Ylander*, Guilielmus, II. 2. IV. 2. 3.
 Z.
Z *Abn*, Joannes, VIII. 16.
Zanottus, Franciscus Maria, I. 40.
a Zesen, Philippus, XIII. 28.
Zimmermann, Joannes Jacobus, IX. 29.
 41. 43.
Zumbach de Kæsfeld, Lotharius, IX. 36.
van Zyl, Joannes, IV. 23.

FINIS INDICIS TERTII.

IV. IN-



IV.

I N D E X

R E R U M E T V E R B O R U M

T O M O I.

C O N T E N T O R U M.

Notes velim, literam *c* Commentationem de methodo mathematica, *a* Arithmeticam, *g* Geometriam, *t* Trigonometriam planam, *f* Analysin finitorum, *i* Analysin infinitorum; & numeros §§. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime præcedentem.

A.

A Baci Pythagorici constructio, *a.* 109.
 necessitas, 110.
Abscissa, *f.* 37.
Additio. Definitio, *a.* 61. quomodo absol-
 vatur, 96. 98. in numeris concretis,
 99. examen, 101. 107. hujus funda-
 mentum, 103. signum, 63. quomodo
 addiscatur, 97.
Additio iterata ejusdem numeri quid sit,
a. 62.
Equalitas. Definitio, *a.* 15. signum, 18.
 19. unde colligatur, 87. 88. 91. 93.
 94. 175. 176. 177.
Equalitas angularum unde colligatur,
g. 167.
Equatio. Definitio, *f.* 133. natura expli-
 cata, 329. reductio per analogias, 259.
 266. 268. 289. transformatio in aliam,
 354. in locales resolutio, 620.
Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Equatio algebraica quænam dicatur,
f. 378.

Equatio biquadratica quomodo construa-
 tur, 616. & seqq. 622. quomodo resol-
 vatur, 362. quomodo ad cubicam re-
 ducatur, 361.

Equatio Circulorum superiorum generalis;
 517.

Equatio Cissoïdis, 548.

Conchoidis, 518.

Equatio cubica. Definitio, 139. quomo-
 do resolvatur, 358. quomodo construa-
 tur, 607. & seqq. 622.

Equatio Ellipsis, 420. 431. 432. 454.
evolutæ quomodo inveniatur;
i. 321.

exponentialis. Definitio, 270.

Equatio hyperbolæ respectu axis, *f.* 459. &
 seqq. 534. intra asymptotos, 488. 490.
 respectu diametri, 500. 502.

H h h

Equatio

Æquatio hyperbolarum infinitarum, f. 425.
Æquatio parabole externæ, 419. internæ respectu axis, 388. respectu diametri, 416.
Æquatio parabolæ infinitarum, 519.
Æquatio simplex. Definitio, 138. constructio geometrica, 252.
Æquatio quadraticea. Definitio, 139. constructio geometrica, 253. reductio ad inventionem linearum reciprocarum, 263. 265.
Æquationum superiorum constructio geometrica, 605. & seqq.
Æquemultiplicium proportio, a. 219. ex *Æquo proportionalia*, 194. 198.
Aggregatum. Definitio, 61.
Algebra. Definitio, f. 132. applicatio ad problemata arithmetica determinata, 144. & seqq. indeterminata, 223. & seqq. ad Geometriam elementarem, 250. & seqq. sublimiorem, 367. & seqq. Trigonometriam planam, 316.
Alternatio rationum, a. 173.
Altitudo figuræ. Definitio, g. 115. qualis linea sit, 227.
Altitudo oblongi, 229. quadrati, 229.
Altitudo trianguli quomodo inveniatur, 394. quomodo ex lateribus computetur, 287.
Altitudo trianguli rectanguli, 228.
Altitudines, quomodo metiamur, g. 284. & seqq. t. 75. 83.
Anagrammata omnia possibilia detegendi modus, f. 131.
Analysis mathematica. Definitio, f. 1.
Analyseos perfectæ exemplum, a. 84. 85.
Angulus. Definitio, g. 54. quomodo denominetur, 55. describatur, 155. alteri æqualis construatur, 208. metiendi modus, 152. bisectio 269. 269. 270. trisectio, f. 629. quantitas a cruribus independens, g. 140. quomodo hæc æstimetur, 58. 59.
Anguli quomodo distinguantur, g. 58.

quomodo in figura rectilinea per calculum eruantur, t. 54.
Angulorum æqualitas unde colligatur, g. 141. 142.
Angulorum æqualium quales sint mensuræ, ibid.
Angulorum circa idem punctum constitutorum ratio ad rectum, 159. 160.
Angulorum congruentia, 166. similitum ratio, 174.
Angulus acutus. Definitio, g. 66. relatio ad rectum, 146.
Anguli alterni. Definitio, g. 68. ratio intra parallelas, 233.
Anguli contigui. Definitio, g. 60.
Angulus contactus. Definitio, 76. qualis sit, 305. 306.
Angulus deinceps positus. Definitio, 62. qualis sit, 63. 64. quando in campo eum metiri teneamur, 150. 151.
Angulorum deinceps positorum ratio ad rectum, 147. quoti idem sint graduum, 148.
Angulus ad centrum. Definitio, g. 72. qualis sit, 73. ratio ad angulum ad peripheriam, 313.
Angulus extra centrum. Definitio, 74. 75. mensura, 315.
Anguli homologi. Definitio, g. 110.
Angulus obliquus. Definitio, 66.
Angulus obtusus. Definitio, 66. relatio ad rectum, 146.
Angulorum obtusorum sinus, t. 6.
Anguli oppositi. Definitio, g. 69. oppositus externus, ibid. internus, ibid.
Angulus ad peripheriam. Definitio, g. 70. Mensura, 314.
Anguli ad peripheriam quando æquales, 315.
Angulorum in polygono summa quomodo inveniatur, 343.
Angulorum in polygono regulari quantitates, 345. quomodo inveniuntur, 344. 349.
Angulus segmenti. Definitio, g. 77.
Anguli majoris segmenti mensura, 323.
Angulæ

Anguli minoris segmenti mensura, g. 322.
Angulus in segmento. Definitio, g. 70.
Angulus in maiore segmento qualis, 318. ratio ad angulum maioris segmenti, 323.
Angulus in minore segmento qualis, 319. ratio ad angulum minoris segmenti, 323.
Angulus in semicirculo qualis, 317.
Angulus reſtus. Definitio, g. 65. mensura qualis, 143. 144.
Anguli reſti quando æquales, 145.
Angulus ſolidus. Definitio, 445. 448. proprietates, 446. & ſeqq. æqualitas, 449. ſimilitudo, 451. magnitudo, 452.
Anguli verticales. Definitio, g. 67. ratio ad ſe invicem, 156.
Annuli area quomodo inveniatur, 433.
Antecedens rationis, a. 126.
Antilogarithmus, t. 31.
Arcus. Definitio, g. 41. quomodo biſectetur, 293. perficiatur, 295. triſectetur, f. 629. per datum numerum multiplicetur, 326. in communi menſura per calculum inveniatur, t. 49.
Arearum ichnographiæ quomodo perficiendæ, g. 363. & ſeqq.
Area curvæ elementum, i. 99.
Arithmetica. Definitio, a. 1.
Arithmetica practica. Definitio, a. 1. an ſit methodus inveniendi, 2.
Arithmetica infinitorum. Definitio, i. 333. uſus in Geometria, 348. & ſeqq.
Arithmetica irrationalium. f. 59. & ſeqq.
Arithmetica ſpecioſa. Definitio, f. 2.
Arithmetice proportionalia. Definitio, a. 323. proprietates, 324. & ſeqq.
Artis characteriſtica præſtantia, a. 52.
Artis inveniendi regulæ ab Algorithmò abſtractæ, a. 125.
Aſymptotus Cissoïdis, f. 549.
 Conchoidis, 537.
Aſymptoti Hyperbolæ. Definitio, 474.
Aſymptoti curvarum algebraicarum quomodo determinentur, t. 46.
Atramentum in Geometria practica quale commendandum, g. 124.

Axioma. Definitio, c. 30. quænam propoſitiones in hunc numerum referantur, 31. abuſus circa ea vitandus, 32. quomodo numerus minuatur, 33. quænam cum axiomatis confundantur, 34.

Axiomata mathematica, a. 81.

Axis conjugatus. Definitio, f. 461.

Axis ſphæræ, g. 470.

Axis tranſverſus. Definitio, f. 459.

B.

B*aculi* quomodo in linea recta terræ inſigantur, g. 125.

Basis figuræ. Definitio, 112. 113.

Binomium quomodo ad dignitatem quamcunque evchendum, f. 95. & ſeqq.

Biquadratum. Definitio, a. 252.

C.

C*alculus differentialis.* Definitio, i. 1. regulæ, 10. & ſeqq., uſus in determinandis tangentibus, 20. & ſeqq. in determinandis maximis & minimis, 61. & ſeqq.

Calculus differentio-differentialis. Definitio, i. 293. uſus in determinandis evolutis curvarum & radio oſculi, 313. & ſeqq. item puncto flexus contrarii, 301. & ſeqq.

Calculus exponentialis. Definitio, i. 263. regulæ, 266. 267. uſus, 271. & ſeqq.

Calculus integralis. Definitio, i. 91. uſus in quadrandis curvis, 97. & ſeqq. in reſtificatione curvarum, 143. & ſeqq. in cubandis ſolidis, 196. & ſeqq. in doctrina Logarithmorum, 255. in methodo tangentium inverſa, 72. & ſeqq.

Calculus literalis in integris, f. 27. & ſeqq. in fractis, 41. & ſeqq. pro potentiis, 54. & ſeqq. uſus in inveniendis theorematibus, 72. & ſeqq.

Calculus potentiærum, f. 54. & ſeqq.

Calculus ſummatorius. Definitio, i. 91.

Calculi univerſalis idea, a. 95.

Cathetus. Definitio, g. 96.

Centrum. Definitio, g. 37.

Centrum Hyperbolæ. Definitio, f. 461.

H h h 2

Con-

- Centrum sphaerae*, g. 470.
- Chorda*. Definitio, g. 38. quanam maxima, 299. quomodo ex arcu inveniatur, 171. quomodo ex alia Chorda data, i. 184.
- Chordarum proprietates*, f. 320. & seqq. relatio ad se invicem, g. 301. in circulo ductarum proprietates & symptomata, 289. 290. 291. 292. 298. 312. se mutuo secantium proprietates, 334. 381.
- Chorda arcus dimidii* quomodo inveniatur, g. 423.
- Chordae arcuum multiploarum* quomodo inveniuntur, f. 326.
- Circinus* qualis esse debeat, g. 133.
- Circulus*. Definitio, g. 37. descriptio, 131. 132. 194. per quæ determinetur, 294. quando alterum secet, 197.
- Circuli ad triangulum sibi æquale reductio*, g. 410. subtangens, i. 23. subnormalis quomodo determinetur, 38. rectificatio, 153. 157. 158. quadratura, 124. area quomodo inveniatur, g. 429. & seqq.
- Circulo* quomodo quadratum circumscribatur, g. 351. quomodo polygonum regulare, 335.
- Circuli concentrici*. Definitio, g. 44. symptomata, 137.
- Circuli eccentrici*. Definitio, g. 44. quanam sint, 49. 287. 288.
- Circuli se extus tangentes* quales sint, g. 49.
- Circuli se intus tangentes* quales sint, 287.
- Circuli se mutuo secantes* quales sint, 288.
- Circuli superiorum generum*. Definitio, f. 516. æquatio, 517.
- Circularum aequalitas* unde colligatur, g. 171.
- Circularum congruentia* unde colligatur, g. 164. 296.
- Circularum ratio* ad se invicem, 409. 411.
- Circularum sectio*, 203.
- (y nptomata, 287. & seqq.
- Circularum infinitorum* maxima applicata, i. 65. subtangens, 24. subnormalis, 39.
- Cissois Dioclis*. Definitio, f. 544. æquatio, 548. genus, 550. proprietates, 545. & seqq. subtangens, i. 31. subnormalis, 43. quadratura, 133.
- Citationum* usus in demonstrando, c. 44.
- Combinationes* omnes possibiles quomodo inveniuntur, f. 220.
- Combinationum* numerus quomodo inveniatur, 119.
- Commensurabilia*. Definitio, a. 31. quanam sint, 160. ratio ad se invicem, 163. 164. rationis exponens, 166.
- Communicantia irrationalia*, f. 61.
- Complementum ad totum* quid dicatur, a. 9.
- Compositio* rationum, 190.
- Compraesentia* quid significet, 27.
- Conchilis*, f. 535.
- Conchois Nicomedis prima & secunda*. Definitio, f. 535. æquatio, 538. proprietates, 536. 537. punctum flexus contrarii, i. 310. quadratura, 138. subtangens, 49. subnormalis, 49.
- Conchoidum* species, f. 540. 543.
- Conchoides infinitæ*, 541.
- Congruentia*. Definitio, g. 1. quid sit, 161.
- Congruentia* angulorum, 166. linearum, 163. magnitudinum, 162.
- Conoides parabolicum* quomodo cubetur, i. 202. 214. 352. quomodo superficies ejus complanetur, 223.
- Conoidis hyperbolici* cubatio, i. 208. 209.
- Conus*. Definitio, g. 467. proprietates, 468. constructio, 523. ad prisma reductio, 547. quomodo soliditas inveniatur & superficies, g. 548. i. 199. 220. 351. quomodo superficies ad triangulum, g. 519. ad sectorem reducatur, 520.
- Conus rectus*. Definitio, g. 467.
- scalenus*. Definitio, g. ibid.
- Coni truncati* constructio, 524. soliditas & superficies computanda, 549.
- Coni superiorum generum*. Definitio, f. 527.
- Conorum* aequalitas unde colligatur, g. 542. ratio ad se invicem, 572. & seqq.

Cono-

Conorum equalium proprietates, g. 580. quanam maximam superficiem habeat, i. 87.
Conorum similium ratio, 570. 578.
Consequens rationis terminus, a. 126.
Contraharmonice proportionalium inventio, f. 194. 195.
Convergentia linearum. Definitio, g. 83. proprietates, 262.
Conversio rationum, a. 193.
Corollarium. Definitio, c. 49. quando demonstratione indigeat, 50.
Corpora Platonica, g. 454.
Corpus. Definitio, g. 444. quomodo construatur, 529. quomodo soliditas invenitur, 559.
Corporis cavi soliditas quomodo invenitur, g. 563.
Corpus irregulare. Definitio, 453. quomodo soliditas invenitur, 559. 561.
Corpus regulare. Definitio, 453. proprietates, 455. quomodo soliditas ac superficies invenitur, 558. & seqq. quomodo hæc corpora construuntur, 525. & seqq. quot eorum sint, 530.
Corporum similium proprietates, g. 565. & seqq. ratio inter se, 578. f. 128.
Cosecans. Definitio, t. 11.
Cosinus. Definitio, t. 11. quomodo invenitur, 16. angulorum multiplo-
 rum quomodo invenitur, f. 325.
Cotangens. Definitio, t. 11.
Crus anguli. Definitio, g. 54.
Cubatio solidorum rotatione genitorum, i. 197.
Cubus, cubicus numerus. Definitio, a. 248. logarithmus qualis, 339. quomodo in progressionem arithmeticam resolvatur, f. 171.
Cubicorum numerorum in serie naturali pro-
 gredientium differentia, f. 84. sum-
 matio, 200.
Cubocubus, a. 252.
Cubus cubi, ibid.
Cubocubocubus, ibid.
Cubus, solidum. Definitio, g. 459. pro-

prietates, g. 460. 461. quale corpus, 530.
 constructio, 513. quomodo superficies
 & soliditas invenitur, 531. 532. quo-
 modo dato corpori æqualis invenitur,
 576. parallelepipedo æqualis construa-
 tur, f. 628.
Cubi duplicatio, f. 625.
Cuborum ratio inter se qualis, g. 534.
Cubi diametri ad sphaeram ratio, 552.
Curva. Definitio, g. 22. quadratura, i.
 100. & seqq.
Curva algebraica. Definitio, f. 377. divi-
 sio, 381. 382. quomodo natura inve-
 stigetur, 579. & seqq. puncta quocun-
 que inveniantur, 631.
Curvarum algebraicarum æquatio genera-
 lis, f. 385. subtangens, i. 32.
Curva primi, secundi, tertii &c. generis.
 Definitio, f. 381.
Curva ex evolutione descripta, i. 313.
Curva exponentialis. Definitio, i. 269.
 constructio, 268. quadratura, 285. sub-
 tangens, 271. & seqq. subnormalis quo-
 modo invenitur, 283.
Curva mechanica. Definitio, f. 381.
Curva normalis constantis, i. 235.
 subnormalis constantis, 227.
 subtangens constantis, 242.
 tangens constantis, 250.
Curva transcendens. Definitio, f. 380.
Cyclois. Definitio, f. 573. proprietates,
 f. 574. & seqq. quadratura, i. 131. 132.
 182. rectificatio, 168. subtangens, 52.
 circulus eam osculans, 328. sui evolu-
 tione seipsam describit, 330.
Cyclois punctum flexus contrarii habens,
 304.
Cylindrus. Definitio, g. 465. constructio,
 518. quomodo superficies & soliditas
 invenitur, 541. superficiem ad paralle-
 logram num reductio, 516.
Cylindrorum æqualitas unde colligatur,
 525. ratio inter se, 572. & seqq.
Cylindrorum æqualium proprietates, 580.
 similium ratio, 570. 578.

Cylindrus rectus, g. 465.

scalenus, 465.

D.

D*ecagoni regularis circulo inscribendi* latus quomodo inveniat, f. 275.

Definitio quid sit, c. 13. quomodo dividatur, 16. quotuplici modo consideretur, 30.

Definitiones superflue num dentur in Mathesi, 56.

Definitio nominalis quænam sit, c. 17. quomodo ad eam perveniatur, 19. & seqq. quomodo realitas demonstretur, 23. 24.

Definitio realis quænam sit, 18. quomodo inveniat, 25. & seqq. quomodo possibilitas demonstretur, 29.

Demonstratio quam habere debeat formam, c. 46. 47. quænam circa eam observanda, 39. & seqq.

Demonstrationes quomodo tyronibus faciliuntur, g. 158. num superflue dentur in Mathesi, c. 56.

Denominator rationis. *Definitio*, a. 36. f. 113. num. 117. & quando cum exponente idem, 115.

Determinari eodem modo quænam dicantur, g. 119.

Diagonalis. *Definitio*, g. 111. in quadrato quomodo se habeat ad latus, 421. in polygono quocunque quomodo omnis inveniat per calculum, t. 51. 53.

Diameter circuli. *Definitio*, g. 39. quomodo circulum dividat, 135. quomodo inveniat, 328. 434. quam rationem ad peripheriam habeat, 413. 414. quomodo inveniat, 425. quanta sit, 426. 427.

Diameter curvæ. *Definitio*, f. 368. quomodo in Parabola, 414. 415. in Ellipsi, 449. 450. 452. in Hyperbola determinetur, 492. 493.

Diameter conjugata. *Definitio*, f. 374.

transversa. *Definitio*, f. 373.

Differentia. *Definitio*, a. 64.

Differentiales, t. 31.

Differentiale. *Definitio*, i. 6. signum, 81. gradus, 296. quomodo integretur, 95. quomodo denuo differentietur, 267. & seqq.

Differentiale area. *Definitio*, i. 97. arcus, 144.

Differentiale exponentiale quomodo integretur, i. 267.

Digitus. *Definitio*, g. 25.

cubicus, *Definitio*, g. 477.

quadratus. *Definitio*, g. 118.

Dignitas. *Definitio*, a. 250. gradus, 252. signa, 254.

Dissimilitudo. *Definitio*, a. 24.

Distantia. *Definitio*, g. 15. exemplum, 16. puncti a linea & plano, 225. puncti a puncto in plano 192. punctorum peripheriæ a centro circuli, 193.

Distantiæ locorum quomodo inveniantur, g. 194. 195. 228. & seqq. t. 56. 65. 74.

Divergentia linearum. *Definitio*, g. 83. proprietas, 261.

Dividendus. *Definitio*, a. 69.

Divisio. *Definitio*, a. 69. signum, 71. exan en, 124. regulæ, 117. 119. 120.

Divisio ejusdem per majus & minus, 202. majoris & minoris per idem, 182.

Divisio rationum, 193.

Divisor. *Definitio*, 69.

Dodecaëdram. *Definitio*, g. 475. constructio, 528. quale corpus, 530. quomodo sphaeræ inscribatur, f. 310. quomodo latus sphaeræ inscribendi inveniat, 308. hujus ratio ad radium, 314.

Dolii soliditatem in mensura fluidorum reperire, g. 588. & seqq.

DURERI curva fornicum qualis sit, f. 601. E.

E*fficiences*. *Definitio*, a. 66.

Elementum area, i. 98.

lineæ curvæ, 144.

solidi rotatione geniti, 197.

superficieij ejusdem, 219.

Ellipsis. *Definitio*, f. 420. descriptio, 426. 435. 436. 515. 594. 598. 600. proprietates,

- tates, f. 421. & seqq. quod sit sectio conica, 512. maxima applicata, i. 66. osculator circulus, 325. quadratura, 126. & seqq. rectificatio, 172. subtangens, 25.
- Ellipsis Apolloniana*, f. 521.
- Ellipses infinitæ*. Definitio, f. 522. maxima applicata, i. 66. subnormalis, 40. subtangens, 26.
- Elliptoides*. Definitio, f. 522. cubicales, ibid. biquadratica, ibid.
- Epicyclois*. Definitio, f. 576. superior, ibid. inferior, ibid.
- Error in metiendis altitudinibus admissus* quomodo æstimeretur, t. 76. & seqq. in metiendis distantis admissus quomodo æstimandus, 58. & seqq. 66. & seqq.
- Evoluta*, i. 313.
- Examen* quomodo differat a demonstratione, a. 102.
- Examen additionis*, a. 101. & seqq. subtractionis, 106. 107. multiplicationis, 122. divisionis, 124. extractionis radicum, 289. angulorum rite dimensionum, g. 151.
- Experientia* quid sit, c. 34. ejus objectum, 35. quomodo Mathematici circa eam versentur, 36. 37.
- Exponens dignitatis*. Definitio, a. 251.
- Exponens rationis*. Definitio, a. 136. quando sit terminus primus, 138. quomodo se habeat ad unitatem, 140. quomodo exprimitur, 141.
- Exponens rationis potentiæ* qualis sit, 290.
- Extensionis* notio, g. 2.
- Extractio radicis quadratæ*, a. 269. & seqq.
- Extractio radicis cubicæ*, a. 282. & seqq.
- Extractio radicis ex dignitate*. Definitio, 256.
- Extractio radicis ex linea recta*, g. 331.
- Extractio radicis ex æquatione quadrati-*
- ca*, f. 143. cubica, 358. biquadratica, 362. quacunque per approximationem, 363. & seqq. ex serie infinita, 366.
- Extractio radicis indeterminatæ*, 98. & seqq.
- F.
- F***actum*. Definitio, a. 66. ex quoto in divisorem, 212.
- Facta* quales numeri, 211. æqualium factorum, 201. 208.
- Facti Logarithmus*, 337.
- Factores*. Definitio, 66.
- Factorum & efficientium* quando eadem ratio, 178.
- Familia curvarum*. Definitio, f. 383.
- Figura*. Definitio, g. 32. 33. in campo designatio, 369.
- Figura æquiangula*, 105. æquilatera, 88. circulo inscripta, 116. circulo circumscripta, 117. curvilinea, 37.
- Figura irregularis*. Definitio, 106. constructio, 359. 360. 361.
- Figura mixtilinea*, 34. multilatera, 104. obliquangula, 97. plana, 36.
- Figura polygonæ*, 104. quadrilatera, 97.
- Figura rectilinea*. Definitio, 34. divisio in partes æquales, 441.
- Figura regularis*. Definitio, 106. proprietates, 348. 401. quomodo circulo inscribatur, 342.
- Figura rectangula*, 97.
- Figure congruentes* quales sint, 177.
- Figure inter se æquiangule*, 109. æquilateræ, 108.
- Figure similes* quales sint, 175. 176. earum ratio, 406. circulo inscriptarum & circumscriptarum ratio, 408.
- Fluidi* quantitatem in dolio non pleno determinare, 600.
- Fluxio*. Definitio, i. 6. signum, 9.
- Focus*. Definitio, f. 321.

Focus Parabolæ, quomodo inveniatur, f. 396. & seqq. proprietates, 418.
Focus Ellipsis quomodo inveniatur, 463. proprietates, 434. 457. 458.
Focus Hyperbolæ quomodo inveniatur, 463. proprietates, 464. 465. 470. 503. 504.
Fraçtio. Definitio, a. 38. scriptio, 59. 60. quando integro major, minor, eidem æqualis, 221. quænam major, minor altera, 225. quomodo ad minores terminos reducatur, 231. & seqq. quomodo ad eandem denominationem, 235. quomodo in aliam datæ denominationis convertatur, 303.
Fractionis Logarithmus quomodo inveniatur, 351. & seqq. quomodo valor ad communem mensuram reducatur, 304.
Fractiones quænam æquales, a. 225. quod sint rationes, 129.
Fractionum algorithmus, 236. 237. 239. & seqq. 243. identitas unde colligatur, 226. reductio ad alias æquales, 227. in infinitum certa lege decreſcentium summa quomodo inveniatur, i. 334.
Fraçtio decimalis. Definitio, a. 361. scriptio, 306. 364. 365. logarithmus quomodo inveniatur, 366. 368. quomodo alia ad eam reducatur, 305.
Fraçtio decimalis exaça. Definitio, 370.
Fraçtio decimalis approximans. Definitio, 370.
Fractionum decimalium algorithmus, 373. & seqq.
Fractiones ſexageſimales. Definitio, 385. algorithmus, 391. & seqq. quomodo ſcribantur, 387.
Fraçtio ſpuria quænam dicatur, 222. quomodo ad integra reducatur, 223.

G.

G*Geometria*. Definitio, g. 1.
 ſublimior. Definitio, f. 367.
Geometrice proportionalia quænam dicantur, a. 323.
Gradus. Definitio, g. 41. inæqualitas in circulis inæqualibus, 42.

H.

H*Armonica proportio*. Definitio, f. 186.
Harmonice proportionalium inventio, 187. & seqq.
Helix, f. 569.
Heptagonum. Definitio, g. 104.
Heterogenea quænam ſint, a. 32.
Hexaëdrum. Definitio, g. 475. quomodo ſphæræ inſcribatur, f. 304. ſphæræ inſcribendi latus quomodo inveniatur, 302. huius ad ſphæræ ſemidiametrum ratio, 314.
Hexagonum. Definitio, g. 104.
Hexagonum regulare quomodo conſtruat, 358. quomodo circulo inſcribatur, 357.
Homogenea quænam ſint, a. 32.
Hyperbola. Definitio, f. 459. deſcriptio, 471. 472. quod ſit ſecçio conica, 513. quadratura, i. 120. 123. rectificatio, 175. 179. ſubtangens, 17. circulus eam osculans, 327. recta ad eam perpendicularis, 74. 75.
Hyperbolæ intra aſymptotos conſtructio, f. 489. proprietates, 475. & seqq. ſubtangens, i. 29. ſubnormalis, 42. quadratura, 123.
Hyperbola æquilatera. Definitio, f. 505. proprietates, 506. & seqq. deſcriptio, 531. 532.
Hyperbola Apolloniana quænam dicatur, 425.
Hyperbolæ infinitæ. Definitio, f. 425. ſubtangens, i. 28. quadratura, 118.
Hyperboloides. Definitio, f. 425.
Hypothenuſa. Definitio, g. 95.

I.

I*chnographia arcarum* quomodo perſicienda, g. 363. & seqq.
Icoſaëdrum. Definitio, g. 475. conſtructio, 527. quale corpus, 530. quomodo ſphæræ inſcribatur, f. 311. ſphæræ inſcribendi latus quomodo inveniatur, 311. huius ad ſemidiametrum ſphæræ ratio, 314.

Inaqua-

Inaequalia. Definitio, a. 15. eorum ad se invicem relatio, 16. 17. 21.

Inclinatio plani ad planum. Definitio, g. 476.

Incommensurabilia. Definitio, 4. 31. ratio ad se invicem, 163. 164. quod dentur, g. 422.

In directum situm quid significet, g. 61.

Infiniteſima. Definitio, i. 2.

Infinitinomium quomodo ad dignitatem quamcunque elevetur, f. 101. 103. 104.

Inſiſtere quando angulus dicatur, g. 56.

Instrumentum transportatorium quodnam & quale sit, g. 153. 154.

Instrumenti transportatorii rectilinei constructio, t. 42. usus, 43. 44.

Integratorum per fractiones divisio, a. 245. ad fractiones reductio, 224.

Inversio rationum, 169.

Irrationalium ad eandem denominationem, f. 59. 146. ad simpliciore[m] expressionem reductio, 61. algorithmus, 67. 68. ratio rationalis quomodo inveniat[ur], 64.

Judicium quando & quomodo acuat[ur] studio Matheseos, c. 53. 54.

L.

Lamellarum Neperianarum constructio, a. 113. usus, 115.

Latus Coni. Definitio, g. 467.

Latus educere ex dignitate quid significet, a. 256.

Latus figure. Definitio, g. 35. quomodo quodlibet in figura rectilinea per calculum eruatur, t. 52.

Latus hexagoni regularis quomodo se habeat ad radium circuli circumscripti, g. 356.

Latus numeri polygoni. Definitio, f. 208. quomodo inveniat[ur], 213.

Latus pentagoni regularis quomodo ex data diagonali inveniat[ur], f. 294.

Latus polygoni regularis circumscripti quomodo ex latere inscripti inveniat[ur], g. 424.

Wolſii Oper. Mathem. Tom, V,

Latus potentiae. Definitio, a. 252.

Latus quadrati parallelogrammo vel triangulo aequalis quomodo inveniat[ur], g. 395.

Latus rectum. Definitio, f. 388.

transversum. Definitio, 459.

Latera homologa quanam dicantur, g. 110.

Latera polygonorum regularium in fractionibus decimalibus radii, g. 47.

Limites aequationis quomodo inveniantur, f. 356.

Linea. Definitio, g. 10. termini, 11. proprietates, 12. 13. usus, 14. quanam brevissima inter duo puncta, 191.

Linea, pars digiti, 25.

Linea curva. Definitio, g. 22.

Linearum congruentia, 163.

Lineae convergentes. Definitio, 83. unde convergentia colligatur, 261. 263.

Lineae divergentes. Definitio, 84. unde divergentia colligatur, 261.

Linea normalis, 78.

obliqua, 80.

Linea parallela. Definitio, g. 81. quomodo alteri ducatur, 258.

Linearum parallelarum symptomata, 230.

& seqq. 238. & seqq. 260.

Linea perpendicularis. Definitio, 78. quando sit, 79. quomodo ducatur.

Linearum proportionalium inventio, g. 271. & seqq. 327. 338. duarum mediarum in continua proportionem inventio, f. 624. proprietates, g. 377. 378.

Linea reciproca. Definitio, f. 261. quomodo inveniantur, 262. & seqq.

Linea recta. Definitio, g. 17. differentia ab alia, 18. quomodo gignatur, 19. ducatur, 121. bifecetur, 210. in partes aequales, 274. proportionales dividatur, 275. quomodo media & extrema ratione secetur, f. 258. quomodo eam meriamur, g. 126. & seqq. quando centro applicata in peripheria terminetur, 173.

Linearum rectarum sectio qualis sit, g. 250. congruentia, 168. & seqq.

Iii

Linea

Linea recta ad planum perpendicularis. Definitio, 486.
Linea secantium. Definitio, f. 362. proprietates, 363.
Linea sinuum. Definitio, 360. proprietates, 361.
Linea tangentium. Definitio, 362. proprietates, 363.
Locus geometricus. Definitio, f. 584. planus, 585. solidus, 585. primi, secundi, tertii &c. ordinis, 585.
Locus ad circumulum. Definitio, 584. constructio, 589.
Locus ad rectam. Definitio, 584. constructio, 586.
Locus ad ellipsin quomodo construatur, 588.
Locus ad hyperbolam quomodo construatur, 590. 591.
Locus ad parabolam quomodo construatur, 587.
Logarithmica. Definitio, f. 552. proprietates, 554. & seqq. circulus osculator, i. 332. quadratura, 134. & seqq. 174. & seqq. rectificatio, 177. subnormalis, 280. subtangens, 54. 243.
Logarithmi. Definitio, a. 334. proprietates, 337. & seqq. quomodo fuerint computati, 346. quomodo in Logarithmica, f. 555. in Hyperbola, i. 256. per arcus tractoriae repræsententur, 253. quomodo inveniuntur, 255. quomodo eisdem respondentes numeri inveniuntur, 260. differentiale quomodo interpretetur, 266.
Logarithmorum Canonis constructio, a. 346.
Logarithmus hyperbolicus binarii, i. 257.
Logarithmus secantis quomodo inveniatur, t. 30.
Logarithmus sinus quomodo inveniatur, i. 261. t. 28.
Logarithmus tangentis quomodo inveniatur, t. 29. i. 262.
Logistica speciosa. Definitio, f. 2.

Logistica linea. Vide Logarithmica.
Logistici solidi cubatio, i. 277. & seqq.
Logistica spiralis. Definitio, f. 557.
Logistica spirales infinitæ, 559.

M.

M *Agnitudo scalaris.* Definitio, a. 250.
Majoritas unde colligatur, 89. 90. ejus signum, 22. 23. 204.
Majus. Definitio, a. 10.
Mathesis quomodo & quando judicium acuat, c. 53. 54.
Maxima chorda in circulo, i. 64. g. 299.
Maxima vel minima applicata in curvis algebraicis quomodo determinetur, i. 63.
Media proportionalis linea quomodo inveniatur, g. 327. quomodo inveniuntur duæ in proportionem continua, f. 624.
Medii arithmetici inventio, a. 330.
Medius proportionalis numerus quinam dicatur, 156. quomodo inveniatur, 301.
Mensura. Definitio, g. 23. 24.
Mensura anguli. Definitio, 57. quo radio describatur, 139.
Mensura anguli ad peripheriam, 314. extra centrum, 316. figura. Definitio, 118.
Mensura linearum. Definitio, 25. divisio, 26. diversitas in diversis locis, 26. unius ad aliam reductio, 130. ex qua materia fieri debeat, 127. & seqq.
Mensura numeri, communis, maxima, communis maxima. Definitio, a. 77. 78. communis maxima quomodo inveniatur, 228. 230.
Mensura solidi. Definitio, g. 477.
Mesologarithmus, t. 31.
Methodus mathematica. Definitio, c. 12. cur ita dicatur, 52. forma, 2. 13. 14. 15. ab objectionibus vindicata, 55. & seqq.
Methodi tangentium inverse exempla, 286. & seqq.
Methodus de maximis & minimis. Definitio, i. 61.
Metiri quid significet in Geometria, g. 23. quid.

quid in Arithmetica, a. 74.
Minuendus numerus quinam dicatur, a. 64.
Minus. Definitio, a. 20. unde colligatur, 89. 90. 206. signum, 22. 23.
Minutæ physicales, a. 385.
Minutum primum, secundum &c. Definitio, a. 388.
Minutum primum, secundum &c. gradus, g. 41. qualis sit fractio, 43.
Miraculosa in definitionibus geometricis admittenda, g. 469.
Multa. Definitio, a. 7.
Multiplicatio. Definitio, a. 66. quid sit, 67. signum, 68. regulæ, 111. 112. 115. 116. examen, 121.
Multiplicandus. Definitio, 66.
Multiplicator, 66.
Multitudo. Definitio, 8.
 N.
Nomen rationis, a. 136.
Normalis linea. Definitio, g. 78.
Normæ constructio & usus, 212. 216. examen, 321.
Notæ numericae, a. 49. 51.
Notæ fractionum decimalium. Definitio, 372.
Notio. Definitio, c. 4. differentia, 5. & seqq. qualis in definitionibus mathematicis admittatur, 13. & seqq.
Notio adæquata. Definitio, c. 10. gradus, 11.
Notio clara. Definitio, 6. divisio, 8. 9. confusa, 9. distincta. Definitio, 8. divisio, 10. 12. inadæquata, 12. obscura, 7.
Numerare quid in Arithmetica significet, a. 74.
Numerandi lex, 44. 46.
Numerus. Definitio, 10. & seqq. quomodo scriptus enunciatur, 55. quomodo occulte scribatur, 53. 54.
Numeri compositi inter se. Definitio, a. 80.
Numeri dati cur in divisione & multipli-

catione non debeant esse homogenei, 70.
Numeri heterogenei inter se, 35. 36. homogenei, 36.
Numeri primi inter se, a. 39.
Numerorum nomina, 45. 47. 48. notæ, 49. 51. progressio, 50.
Numerus abstractus quinam, a. 34. angulorum. Definitio, f. 208. 209. compositus, a. 76. concretus, 34.
Numerus cubicus. Definitio, a. 248. genesis, 276. & seqq. tabulæ horum numerorum quomodo construuntur, f. 85.
Numerus determinatus, a. 13. effabilis, 39. fractus, 38.
Numerus heptagonus. Definitio, f. 106. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus hexagonus. Definitio, 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 112.
Numerus indeterminatus, a. 13. ineffabilis, 43.
Numerus integer. Definitio, 37. quid exprimat, 139. quando radicem perfectam non habeat, 193. 294.
Numerus irrationalis. Definitio, a. 43. per lineas expressio, g. 420. f. 630.
Numerus impar. Definitio, a. 72. proprietates & symptomata, f. 72. & seqq.
Numerus numerans, a. 33. 34. numeratus, 33.
Numerus octogonus. Definitio, f. 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus par. Definitio, a. 72. proprietates & symptomata, f. 77. & seqq.
Numerus pentagonus. Definitio, f. 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
Numerus perfectus quinam sit & quomodo inveniatur, f. 248.
Numerus polygonus. Definitio, 206. quomodo inveniatur, 210. summetur, 212.
 I. i i 2 Nume-

Numerus primus in se, 475.

Numerus pronicus. Definitio, f. 196. quomodo inveniatur, 198.

Numerus pyramidalis primus, secundus &c. triangularis, pentagonalis &c. Definitio f. 214. summatio, 216. 217.

Numerus surdus, a. 43.

Numerus triangularis. Definitio, f. 206. quomodo inveniatur, 211. summetur, 212.

Numerorum proportionalium symptomata analytice investigata, f. 173. & seqq.

O.

Obligua linea. Definitio, g. 80.

Oblongum. Definitio, 100. constructio, 339.

Octaëdram. Definitio, g. 475. constructio, 526. quale corpus, 530. quomodo sphaeræ inscribatur, f. 307. latus sphaeræ inscribendi quomodo inveniatur, 305. hujus ad radium ratio, 314.

Octogonum. Definitio, g. 104.

Octogoni regularis latus quomodo inveniatur, f. 172.

Opponi quænam dicantur, g. 85. 86.

Ordinata ratio, a. 194.

Ordinatim applicata. Definitio, f. 370.

Ordo Mathematicorum an jure taxetur, c. 57.

Ordo naturæ quinam, 57.

scholæ quinam, 57.

Osculatio curvarum, i. 314.

P.

Parabola. Definitio, f. 388. constructio, 393. 400. 401. proprietates respectu axis, 390. & seqq. respectu diametri, 416. 417. quod sit sectio conica, 511. circulus osculator, i. 323. ad eam perpendicularis, 72. 78. quadratura, 103. 104. 107. 349. 350. rectificatio, 146. hujus dependentia a quadratura hyperbolæ, 147. subnormalis, 36. subtangens, 11.

Parabolæ externæ proprietates, f. 419.

secundi generis rectificatio, i. 150.

Parabola Apolloniana quænam dicatur, f. 519.

Parabolæ infinitæ seu superiorum generum. Definitio, f. 519. constructio, 581. 583. circuli osculatores, i. 323. quadratura, 105. 106. rectificatio, 152. subnormalis, 37. subtangens, 22. quod sint sectiones conorum superiorum, f. 528.

Paraboloides cubicales, biquadraticales, surdesolidales &c. Definitio, f. 519.

Parallela linea. Definitio, g. 81. quomodo ducatur, 258. symptomata, 255. & seqq. 260.

Parallelismi constructio & usus, 258. 259.

Parallelogrammum. Definitio, g. 102. bisectio, 439. in partes æquales divisio, 440. proprietates, 335. 337.

Parallelogramma quotnam sint, 336.

Parallelogrammorum ratio, 388. proprietates, 388. æqualitas unde colligatur, 383. 384. 389. similium proprietates, 396. & seqq.

Parallelopipedum. Definitio, g. 462. proprietates, 463. 464. descriptio in plano, 510. constructio, 514. bisectio, 537. 111. superficies & soliditas quomodo inveniatur, 536.

Parallelopipedorum æqualitas unde colligatur, 535. ratio, 572. & seqq. æqualium proprietates, 580. similium ratio, 578.

Parameter. Definitio, f. 388.

Pars aliquanta. Definitio, a. 30.

Pars aliquota. Definitio, a. 30.

Partes. Definitio, a. 9. quando similes, 170.

Partium similium ratio ad totum, 170. inter se, 171.

Pennæ optimæ quænam sint, g. 123.

Pentagonum. Definitio, 104.

Pentagoni regularis latus circulo inscribendi quomodo inveniatur, f. 179.

Perimeter, g. 31.

Peripheria circuli, 37. 41.

Permutatio rationum, a. 173.

Perpen-

Perpendicularis linea. Definitio, g. 78. quomodo dicatur, 210. 212. 216. inimpotomata & proprietates, 213. & seqq. 217. 224.
Perpendicularis ad curvam quanta sit, i. 76. 85.
Perpendicularis ad parabolam, 72. 78.
Perpendicularis ad hyperbolam æquilataram, 74.
Perpendicularis ad hyperbolam scalenam, 75.
Pertica cubica, g. 477. quadrata, 118.
Perturbata ratio, a. 198.
Pes, g. 25. cubicus, 477. quadratus, 118.
Planum, g. 36.
Planum plano parallelum, 428. ad planum perpendiculare, 424.
Plura. Definitio, a. 7.
Polus conchoidis, f. 535.
Polygonum. Definitio, g. 104.
Polygonum regulare quomodo construatur, g. 352. t. 48. quomodo circulo inscribatur & circumscribatur, g. 353. 355. t. 46. quomodo circulus eidem circumscribatur, g. 347. ejus ad circumscriptum & circumscriptum relatio, 416. proprietates, 407. area quomodo inveniatur, 402. 416.
Polygonorum similitum proprietates, g. 403. 406.
Polynomium quomodo ad dignitatem quamcunque evehatur, f. 101.
Postulatum. Definitio, c. 30. quænam propositiones huc referantur, 31.
Potentia. Definitio, a. 250. signa, 254. logarithmus, 332. quomodo prodeat, 341. quomodo ex additione numerorum imparium procreetur, f. 170. 171.
Potentiarum proportio, 259. 260.
Potentia numerorum naturalium quæcunque quomodo summentur, f. 203. 205.
Potentia hyperbolæ. Definitio, f. 477.

quomodo determinetur, 478. & seqq.
Potestas. Definitio, a. 250. signa, 254.
Practica Italica, a. 316. & seqq.
Prisma, rectum, obliquum, triangulare, quadrangulare &c. Definitio g. 456. proprietates, 457. 458. in plano descriptio, 510. constructio, 515. superficies & soliditas quomodo inveniatur, 539.
Prismatum ratio, 572. & seqq. æqualitas unde colligatur, 535.
Prismatum aequalium proprietates, 580. similitum ratio, 578.
Prismatis triangularis ad pyramidem reductio, 543. 545. ad parallelopipedum ratio, 538.
Problema quale sit & quibus constet partibus, c. 48. quomodo algebraice solvatur, f. 141.
Problema Deliacum, f. 626.
Problemata arithmetica, f. 144. & seqq. arithmetica indeterminata, 223. & seqq. geometrica 250. & seqq. geometrica indeterminata per Algebram soluta, 255. & seqq.
Problematis Kepleriani solutio, i. 193.
Productum quid dicatur, a. 66.
Progressio arithmetica. Definitio, a. 333. proprietates, f. 106. summa quomodo inveniatur, 107. 108.
Progressionis arithmeticae problemata per Algebram soluta, f. 164. & seqq.
Progressio geometrica. Definitio, a. 322. proprietates, f. 118. & seqq. summa quomodo inveniatur, 120.
Progressionis geometricæ problemata per Algebram soluta, f. 182. & seqq.
Progressionum geometricarum ab unitate incipientium proprietates, f. 126.
Proportio. Definitio, a. 155.
Proportio æquemultiplicium, 219.
Proportionum regula, 301. & seqq.
Proportio continua. Definitio, i. 156. contraharmonica, f. 193. discreta, a. 156.
Proportionalitas quid sit, a. 157.

Proportionales quantitates quanam dicantur, [155](#).

Propositionis partes, c. [39](#). [40](#).

Propositiones Elementi II. EUCLIDIS analytice demonstratae, f. [86](#) & seqq.

Punctum. Definitio, g. [6](#). theoria, [7](#). [8](#). [9](#).

Punctum flexus contrarii. Definitio, [i. 301](#). quomodo determinetur, [302](#). [309](#).

Punctum regressus, [301](#).

Pyramis. Definitio, g. [472](#). proprietates, [473](#). [474](#). in plano descriptio, [512](#). constructio, [515](#). [521](#). ad prisma triangulare reductio, [543](#). [545](#). [546](#). superficies ac soliditas quomodo inveniatur, [548](#). [i. 351](#).

Pyramidum aequalitas unde colligatur, g. [542](#). ratio, [572](#). & seqq.

Pyramidum aequalium proprietas, [580](#). *similium* ratio, [578](#).

Q.

Quadratrix curvæ, [i. 234](#).

Quadratrix DINOSTRATIS. Definitio, f. [564](#). subtangens, [i. 55](#).

Quadratrix TSCHIRNHUSIANA, f. [566](#). [568](#).

Quadratorum numerorum in serie naturali differentiae, f. [81](#). [83](#). quomodo summentur, [200](#). quomodo duorum summa in duo alia quadrata dividatur, [230](#). logarithmus, a. [338](#). Vid. numerus quadratus.

Quadratum. Definitio, g. [98](#). constructio, [338](#). area quomodo inveniatur, [370](#). & seqq.

Quadratorum ratio ad se invicem, [374](#). additio, [419](#).

Quadrati quadratum, a. [252](#).

Quadrato-cubus, ibid.

Quadratocubocubus, ibid.

Quadratoquadratum, ibid.

Quadratoquadratocubus, ibid.

Quadratum Cubi, ibid.

Quadratum surdesolidi, ibid.

Quadrata reciproca quomodo construantur, f. [285](#). [286](#).

Quadrilateri circulo inscripti proprietates, g. [350](#). f. [324](#).

Quadrilaterorum similium proprietas, g. [350](#).

Quantitas quid sit, a. [13](#). [14](#). quomodo ad dignitatem evehatur, [255](#). f. [95](#). quomodo differentietur, [i. 12](#). & seqq.

Quantitatum signa, a. [57](#). [58](#).

Quantitatum permutatio quomodo inveniatur, f. [129](#).

Quantitas affirmativa, f. [16](#).

Quantitas constans. Definitio, f. [375](#). signum, [376](#).

Quantitas exponentialis. Definitio, [i. 264](#). signum, [265](#). constructio, [268](#).

Quantitas infinite parva. Definitio, [2](#). quando habeatur pro nulla, [3](#).

Quantitas nihilo major, f. [16](#). minor, [16](#).

Quantitas positiva. Definitio, f. [17](#). quomodo prodeat, [17](#).

Quantitas privativa. Definitio, [16](#). quomodo prodeat, [17](#).

Quantitas variabilis. Definitio, [375](#). signum, [376](#).

Quantitates continue equidifferentes. Definitio, a. [322](#). proprietates, [324](#). & seqq.

Quantitates discrete equidifferentes. Definitio, a. [322](#). proprietates, [324](#). & seqq.

Quantitates harmonice proportionales. Definitio, f. [186](#). quomodo inveniuntur, [187](#). & seqq.

Quantitates incommensurabiles num dantur, a. [165](#).

Quantitates positivæ & privativæ quando se mutuo destruant, f. [21](#). num rationem ad se invicem habeant, [24](#).

Quantitates privativæ quid sint, [19](#). [20](#). num inter se homogeneæ, [23](#). quod positivis heterogeneæ, [23](#).

Quartus equidifferens numerus quomodo inveniatur, a. [331](#).

Quartus proportionalis numerus quomodo inveniatur, [302](#).

Quotus. Definitio, a. [69](#). logarithmus,

343. ad dividendum ratio, 174. ex divisione facti per factorem unum prodiens, 210. quando numerus rationalis, 161. quando irrationalis, 162. ex divisione radice per radicem quando numerus integer, 291.

Quoti quando numeris divisis proportionales, a. 181.

R.

Radius circuli. Definitio, g. 39. eorum æqualitas, 40.

Radius circuli octogono regulari circumscribendi quomodo inveniatur, 274.

Radius circuli decagono regulari circumscribendi quomodo inveniatur, f. 278.

Radius circuli parabolam osculantis quomodo inveniatur, i. 322.

Radius curvedinis. Definitio, i. 314. quomodo determinetur, 320.

Radius evolutæ. Definitio, i. 314.

Radius osculi. Definitio, i. 314. quomodo determinetur, 320.

Radix binomia. Definitio, a. 258.

Radix cubica. Definitio, a. 248. ratio ad cubum, 249. quomodo extrahatur, 282. & seqq.

Radix multinomia, 258.

polynomia, ibid.

trinomia, ibid.

Radix quadrata. Definitio, a. 246. ratio ad quadratum, 247. quomodo extrahatur, 269. & seqq.

Radix æquationis. Definitio, f. 134. quomodo transmutetur, 333. & seqq. quomodo in falsam mutetur, 332.

Radix æquationis vera, 135.

falsa, 136.

imaginaria, 137.

Radix pronica quomodo extrahatur, 199.

Radix ex æquatione biquadratica quomodo extrahatur, f. 362.

Radix ex cubica quomodo extrahatur, 355.

Radix ex quacunque per approximationem quomodo extrahatur, 363. & seqq.

Radix ex quadratica quomodo extrahatur, 143.

tur, 143.

Radix ex dignitate quomodo extrahatur, a. 256.

Radix ex serie infinita quomodo extrahatur, f. 366.

Radix ex quantitate irrationali composita quomodo extrahatur, 360.

Radices imaginariæ quænam dicantur, 71.

Radices rationales ex æquatione quomodo extrahantur, f. 351. & seqq.

Radices universales quænam dicantur, 70.

Radicum extrahendarum theorema generale, f. 98. & seqq.

Radicum signum, a. 295.

Radicum imaginariarum algorithmus, f. 71.

Radicum quadratarum surdorum ratio, g. 420.

Radicum universalium algorithmus, f. 70.

Ratio. Definitio, a. 126. termini, 126.

127. genera, 130. usus, 132.

Rationum symptomata demonstrata, a. 169. & seqq. analytice investigata, f. 124.

Rationum identitas. Definitio, a. 149. 150. natura, 151. designatio, 152. 153. unde colligatur, 168. 177.

Rationum similitudo in quo consistat, 154. unde colligatur, 167.

Ratio æqualitatis. Definitio, 130.

Ratio composita. Definitio, a. 159. exponents, 214. quando una alteri æqualis, 218.

Ratio dupla, 142.

duplicata, 159. 216.

inequalitatis, 131.

inequalitatis majoris, 132.

Ratio inæqualitatis minoris. Definitio, 132. nomina quomodo inveniuntur, 147. memoriæ facile mandentur, 148.

Ratio irrationalis, 134. 155.

Ratio major, 158.

minor, ibid.

multiplex, 142.

multiplex superparticularis, 145.

superpartiens, 146.

multiplicata, 159.

Ratio

Ratio quadruplicata, 159.

rationalis, 134. 135.

sesquialtera, 143.

sesquitercia, ibid.

subdupla, 142.

subduplicata, 159.

submultiplex, 142.

submultiplex subsuperparticularis, 145.

submultiplex subsuperpartiens, 146.

submultiplicata, 159.

subquadruplicata, 159.

subsesquitercia, 143.

subsesquialtera, ibid.

subsuperparticularis, ibid.

subsuperpartiens, 144.

subsuperparticularis, 143.

subtripla, 142.

subtriplicata, 159.

triplicata, 159. 216.

Ratio summae numerorum in infinitum certa lege decrecentium ad totidem terminos maximo æquales, i. 341. & seqq.

Recta. Vid. *linea recta*.

Rectæ in tres partes continue proportionales divisio, f. 603.

Rectangulum. Definitio, g. 100. area quomodo inveniatur, 375.

Rectangulorum ratio, 376.

Rectificatio curvæ. Definitio, i. 143. methodus, 144.

Regula quale instrumentum, g. 121. ex qua materia parari debeat, 122.

Regula aurea quænam dicatur, a. 307.

Regula centralis BAKERI, f. 623.

Regula Conchoïdis, 535.

Regula de quinque, a. 312.

Regula Renaldiniana polygonum regulare circulo inscribendi confutata, f. 292.

Regula Societatis, a. 314.

Regula trium sive de tri quænam sit, 307. ubinam locum habeat, 307. usus in vita communi explicatus, 308. & seqq.

Regula trium composita, 312. 313.

directa, 311.

inversa, ibid.

Residuum. Definitio, a. 64.

Rhombus. Definitio, g. 99. constructio, 340. area quomodo inveniatur, 387.

Rhomboides. Definitio, 101. constructio, 341. area quomodo inveniatur, 387.

S.

Scala geometrica constructio, g. 277. usus, 278.

Scholion in Mathesi quid sit, c. 51.

Scrupulum primum, secundum &c. g. 388.

Secans. Definitio, 7. quomodo inveniatur, 26. i. 166. arcus multiplex quomodo inveniatur, f. 328.

Secantium proprietates, g. 302. 303. ex eodem puncto ductarum relatio, 380.

Secans complementi. Definitio, t. 11.

Sectio circuli per rectam qualis, g. 52. per circulum qualis, 53.

Sectiones conicæ. Definitio, f. 386. quænam sint, 387. & seqq.

Sectiones conicæ superiorum generum, 528. & seqq.

Sectio linearum. Definitio, g. 50.

Sectio media & extremaratione facta, f. 258.

Sectionis planorum theoria, g. 473. & seqq.

Sectio rectarum mutua, 51.

Sector circuli. Definitio, g. 46. ad triangulum reductio, 415. area quomodo inveniatur, 435. i. 154. & seqq.

Sectoris elliptici quadratura, i. 186. 192. hyperbolici quadratura, 189. 194.

Segmentum circuli, majus, minus. Definitio, g. 44. area quomodo inveniatur, 436. & seqq. i. 170.

Segmenti sphaerici soliditas quomodo inveniatur, i. 199.

Segmentum superficiæ sphaericæ quomodo inveniatur, i. 222.

Semicirculorum sectio, g. 202.

Semidiameter. Definitio, 39.

Semiordinata. Definitio, f. 370.

Series convergentes. Definitio, f. 52. divergentes, ibid.

Serliana curva fornicum qualis sit linea, f. 528.

Signa

Signa exponentium indeterminatorum tam rationum, quam dignitatum, f. 13. 14. operationum arithmeticarum, 8. & seqq.
Signa quantitatum, f. 3. & seqq.
Signa rationum universalis, 114.
Similia. Definitio, a. 24. qualia sint, 25. differentia interna, 26. quomodo a LEIBNITIO definita, 27.
Similitudo. Definitio, a. 24. signum, 28. 29. principium, g. 120.
Similitudo corporum, 564. & seqq. polygonorum regularium ejusdem ordinis, 404. 405.
Sinus five *Sinus rectus*. Definitio, t. 2. proprietas, 3. mensura, 13. ex dato arcu quomodo inveniatur, i. 160. graduum 18. f. 277. gr. 22, min. 30. f. 273. gr. 30. t. 15. gr. 36. f. 281. gr. 45. f. 270. arcus dimidii, t. 17. dupli, t. 18. arcus differentia, t. 20. angulorum multiplo- rum, f. 325. arcuum exiguae differen- tia quomodo inveniatur, t. 19. & seqq.
Sinus artificialis, t. 31.
Sinuum canon quomodo construatur, t. 15. & seqq.
Sinus complementi. Vide *Cosinus*.
Sinus totus. Definitio, t. 2. proprietas, 4.
Sinus versus. Definitio, t. 2. proprietas, 4. quomodo ex arcu inveniatur, 163.
Situm eundem quanam habeant, g. 5.
Situs planorum theoria, 478. & seqq.
Solidum. Definitio, g. 444. quomodo da- to aequale inveniatur, 577.
Solidi cissoidalis cubatio, i. 210. hyperbolici, 216. 217. logistici, 211. 211.
Sphæra. Definitio, g. 470. proprietas, 471. ad pyramidem reductio, 550. i. 200. ad cylindrum circumscriptum ratio, g. 551. i. 201. soliditas quomodo inveniatur, g. 556. i. 199. superficies quo- modo inveniatur, g. 556. i. 221.
Sphærarum similitudo, g. 571. ratio, 579.
Spheroidis elliptici soliditas quomodo inveniatur, i. 203. & seqq.

Wlſſi Oper. Mathem. Tom. V.

Spiralis ARCHIMEDIS. Definitio, f. 569. proprietas, 570. subtangens, i. 50.
Spiralium quadratura, i. 137.
Spirales infinitæ. Definitio, f. 572. sub- tangens, i. 50. 51.
Spiralis parabolica punctum flexus contra- rii quomodo determinetur, i. 312.
Stereometria doliorum, g. 582. & seqq.
Strues lignorum quomodo metiamur, 82.
Subnormalis. Definitio, f. 408. quomodo inveniatur, i. 35.
Subnormalis curvæ exponentialis quomodo inveniatur, i. 283.
Subnormalis ellipseos quomodo determi- netur, f. 440. i. 37.
Subnormalis hyperbolæ quomodo determi- netur, f. 491.
Subnormalis parabolæ quomodo determi- netur, f. 440. i. 36.
Subtangens. Definitio, f. 408.
Subtangens curvæ algebraicæ quomodo in- veniatur, i. 20. & seqq.
Subtangens curvæ exponentialis quomodo inveniatur, i. 271. & seqq.
Subtangens ellipseos quomodo determi- netur, f. 440. 448. i. 25.
Subtangens hyperbolæ quomodo determi- netur, f. 491. i. 27.
Subtangens parabolæ quomodo determi- netur, f. 410. i. 21.
Subtractio. Definitio, a. 64. signum, 65. regulæ, 103. in numeris concretis, 104. examen, 106.
Subtrahendus, 64.
Summa. Definitio, a. 61.
Summandi numeri, ibid.
Superficies. Definitio, g. 28. termini, 29. 30.
Superficies corporis rotatione geniti quomo- do inveniatur, f. 219.
Superficii sphæræ ad circulum maximum ratio, g. 554.
Superficiarum corporum ratio analytice in- vestigata, f. 128.
Surdesolidum, a. 252.
 secundum, ibid.

K k k

Sur-

Surdefolidum tertium, a. 252.

Syllogismorum forma an in demonstrando attendenda, c. 47.

T.

Tangere quid significet in Geometria, g. 47.

Tangere circulum extus, intus, ibid.

Tangens circulum quomodo ducatur, g. 311. f. 291. ejus ad secantem ex eodem puncto ductam relatio, g. 379.

Tangens curvam quomodo invenitur, i. 161.

Tangens in Trigonometria. *Definitio*, t. 7. proprietates, 8. & seqq. quomodo invenitur, 26. arcus multipli quomodo invenitur, f. 327.

Tangentis 45° magnitudo, t. 32.

Tangentium circulum proprietates, g. 304. 307. & seqq. 325. 326.

Tangentium & secantium ex eodem puncto ductarum relatio, g. 334.

Tangens artificialis, t. 31. complementi, 11.

Tangentium methodus inversa. *Definitio*, i. 224. in quo consistat, 225. exempla, 226. & seqq.

Termini rationis, a. 126.

Terminorum usus in rebus distincte concipiendis, a. 56.

Tetraëdram. *Definitio*, g. 475. constructio, 525. quale sit corpus, 530. quomodo sphaeræ inscribatur, f. 301. latus sphaeræ inscribendi quomodo invenitur, 299. hujus ad radium ratio, 314.

Theorema. *Definitio*, c. 18. quænam in eo consideranda, 39. & seqq.

Theorema Newtonianum evehendi binomium ad dignitatem quamcunque, f. 95. & seqq.

Totum. *Definitio*, a. 9. relatio ad partem, 84. 86.

Trafforia, i. 250. & seqq.

Trapezides. *Definitio*, g. 103.

Trapezium, ibid.

Triangulum. *Definitio*, g. 87. per quæ determinetur, 182. 206. 265. 266. constructio, 180. 205. 234. 264. area quomodo invenitur, 392. i. 107. divisio in partes æquales, g. 440. ratio ad parallelogrammum, g. 386. 391. i. 348.

Triangulorum æqualitas unde colligatur, g. 179. 204.

Triangulorum æqualium proprietates, 393.

Triangulorum congruentia, 179. 204. 251.

Triangulorum proprietates, 188. & seqq. 239. 240. 244. 246. 247. 268. 297. 300. t. 33. 35. resolutio trigonometrica, t. 36. & seqq. similitudo, g. 183. 207. 235. 237. 252. 267.

Triangulorum similium proprietates, 396. & seqq.

Triangulum acutangulum. *Definitio*, g. 93.

Triangulum æquicrurum. *Definitio*, g. 89. constructio, 199. per quæ determinetur, 200. proprietates & symptomata, 184. 248. 253. similitudo, 201.

Triangulum æquilaterum. *Definitio*, g. 88. constructio, 198. proprietates & symptomata, 185. 186. 187. 241. 254.

Triangulum obliquangulum. *Definitio*, g. 94.

Triangulum obtusangulum. *Definitio*, 92. proprietates, 221. & seqq. 241.

Triangulum rectangulum. *Definitio*, 91. proprietates, 218. & seqq. 241. 244. 329. 417.

Trianguli regularis circulo inscribendi latus quomodo invenitur, f. 268.

Trigonometria canonica a Tabularum necessitate liberata, i. 167.

Trigonometria plana. *Definitio*, t. 1.

Trochois. *Definitio*, f. 573. proprietates, 574. & seqq.

U.

Variationes omnes quantitatum combinatorum & permutatarum quomodo inveniantur, f. 222.

Vertex anguli, g. 54.

curva, f. 369.

figura, g. 114.

Uncia potentiarum quinam numeri dicantur, f. 25. quales sint numeri, 218.

Unitas. Definitio, a. 4.

Unitates eadem quænam sint, a. 5. 6. *diversæ* quænam sint, ibid.

Unum. Definitio, a. 3.

Virgula pithometrica constructio, g. 582.

& seqq. 595. 598.

Z.

Z *Ensus*, a. 253.

Zensicubus, ibid.

Zensizensizensus, ibid.

Zensizensus, ibid.

Zensurdesolidus, ibid.

FINIS INDICIS QUARTI.

V.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO II.

CONTENTORUM.

Notes velim, literam *m.* Mechanicam, *f.* Hydrostaticam, *a.* Aërometriad *b.* Hydraulicam, & numeros §§. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

A *cceleratio motus* gravium qua lege fiat, *m.* 85. & seqq.

Acceleratio motus aquæ quomodo fiat, *b.* 249. & seqq.

Actionis & reactionis æqualitas & contrarietas, *m.* 528. 529.

Æquilibrium in aëre æquiponderantium quomodo tollatur, *a.* 158.

Æquiponderantia in aëre quando non æquiponderent in aliis fluidis, *f.* 58.

Æquilibrium fluidorum diversæ gravitatis specificæ, *f.* 36. homogenorum, 34.

Æquiponderatio. Definitio, *m.* 122. theoria, 144. & seqq.

Aër. Definitio nominalis, *a.* 3. existentia, 13. 14. quod telluri circumfundatur, 44. quod comprimi possit, 15. 17.

quomodo intra vas comprimatur, 65. quomodo ope antliæ in data ratione dilatetur, 52. num comprimatur in ratione ponderum, 72. & seqq. quod sit elasticus, 18. quod gravis, 21. quod rarefiat, 23. quod condensetur, 24.

Aër inferior quod superiore densior, *a.* 154. specificè gravior, 155.

Aëris compressi in vase ope antliæ ratio ad primitivum, *a.* 66. & seqq. compressi in vase in aqua submerso elater quantus sit, 108. compressi vi elastica quomodo aqua moveatur, *b.* 87. 89. & seqq.

Aëris densitas ubi eadem, *a.* 46. 47.

Aëris ex vaseeducti per antliam quantitas quomodo inveniatur, 103.

Aëris pes cubicus quantum ponderet, 56 57.

K k k 2

Aëris

Aëris rarefactione quomodo aqua expellatur, *b.* 91.
Aëris residui in vase ope antliæ evacuato ratio ad primitivum, *a.* 50. 51.
Aërometria. Definitio, 1. quænam in ea tradenda, 2.
Alarum molendini situs optimus quomodo determinetur, *b.* 316.
Altitudines jactuum sub diversis angulis quomodo sint inter se, *m.* 504. 505.
Altitudo ascensus ponderis super plano inclinato quomodo se habeat, 269. 270.
Altitudo jactus quomodo se habeat ad parametrum, 503.
Altitudo maxima, ad quam grave oblique projectum ascendit, 499. 501. 502.
Altitudo viva fluminis, *b.* 218.
Alveus fluminis. Definitio, *b.* 185.
 artificialis, 186.
 naturalis, *ibid.*
Amplitudo semitæ projectilis. Definitio, *m.* 489. quomodo sit ad semitam, 491. & seqq. quando semiparametro æqualis, 495. quando maxima, 494. quomodo maxima invenitur, 497. quomodo ceteræ ex ea eruantur, 496.
Anemometrum. Definitio, *a.* 181. constructio, 182.
Angulus directionis. Definitio, *m.* 240.
Angulus elevationis in motu projectorum. Definitio, *m.* 478. quomodo determinetur, ut projectile feriat locum datum, 506.
Angulus incidentiæ. Definitio, 550.
Angulus reflexionis. Definitio, 551.
Antliæ attractivæ constructio, *b.* 110.
Antliæ Ctesibianæ constructio, 113. & seqq.
Antliæ pneumaticæ. Definitio, *a.* 38. inventor, 39. constructio, 40. usus, 41. & seqq. capacitas quomodo determinanda, 54. 55.
Antliæ pneumaticæ quomodo inter se comparandæ, 53.
Aqua quomodo vires ad agitandas machinas concipiat, *m.* 900. per exiguum

orificium in vas immittatur, *a.* 149. per sectionem canalis horizontalis fluat, *b.* 235. & seqq. quo derivari possit, 9. quomodo ex loco uno in alterum derivetur, 13. & seqq. in locum excelsiorem deducatur, 126. 127. per siphonem ascendat, 66. ope catenarum situ-
 lis instructarum eleve-
 tur, 116.
Aqua prosiliens quantum ascendat, *b.* 49. & seqq. 56. 57.
Aquæ gravitas specifica, *f.* 77.
Aquæ libere fluentis in alveo qua de causa acceleretur, *b.* 200. quantum acceleretur, 201. & seqq.
Aquæ quantitas in vas inversum ascendens, dum eidem immergitur, quomodo determinetur, *a.* 109. & seqq.
Aquæ saltus per lumen horizontale, *b.* 58. & seqq. per verticale, 49. & seqq.
Aquarum quantitates per tubos effluentes, *b.* 20. & seqq.
Arcus circuli centrum gravitatis, *m.* 165.
Ars libellandi. Definitio, 904. regulæ, 911.
Ascensus aquæ prosilientis, *b.* 49. & seqq. 56. 57.
Ascensus celeritate per descensum acquisita jactus quomodo se habeat, *m.* 339.
Ascensus in lineis curvis demonstratus, *m.* 334. & seqq.
Affarium. Definitio, *b.* 104. constructio, 106.
Axis quid significet in Mechanica, *m.* 756. 757.
Axis in peritrochio. Definitio, 756. theoria & praxis, 792. & seqq.
Axis oscillationis. Definitio, 379.

B.

B *Arometrum*. Definitio, *a.* 89. theoria, 124. & seqq. constructio, 131.
Baroscopium. Definitio, 89. sensibilibioris constructio, 136. & seqq.
Baroscopii compositi constructio, 134.
 inclinati theoria, 141. & seqq.
Basis corporis gravis quid sit, *m.* 221.

C.

C.

Calcando quomodo machina moveatur, *m.* 886. 888.

Calcatio quid sit, 874.

Canalis quid dicatur, *h.* 3.

Cavitas corporis specificè gravioris quanta esse debeat, ne fluido leviori superna-
tet, *f.* 111.

Celeritas. Definitio, *m.* 13. quod tempori proportionalis, 14. 15. quid proprie sit, 16. quomodo a Mathematicis consideretur, 114. quando eadem ex ictu corporum resultet, 534. quando in conflictu non mutetur, 590. quando mutetur, 560. 562. 576. quanta aquæ per foramen vasis erumpentis, *h.* 48.

Celeritas absoluta. Definitio, *h.* 105.

Celeritas acquisita per descensum perpendiculararem, *m.* 92. in plano inclinato, 29. 192. 303. & seqq. in curva, 308.

Celeritas aquæ in alveo an major in fundo, quam superficie, *h.* 206. per canalem declivem fluentis num augeatur ob pressionem a superiori, 243. & seqq.

Celeritas corporum elasticorum in concursu quomodo determinetur, *m.* 571.

Celeritas fluidi per siphonem effluentis, *h.* 81. & seqq. vi aëris compressi ejecti, 92. & seqq.

Celeritas in motu composito quomodo inveniatur, *m.* 252.

Celeritas media in fluminibus quomodo inveniatur, *h.* 238. & seqq. aquæ per canalem horizontalem fluentis, 263. & seqq.

Celeritas penduli in puncto infimo qualis sit, *m.* 401.

Celeritas projectilis quomodo inveniatur, 514.

Celeritas respectiva. Definitio, *h.* 305.

Celeritates quando in conflictu corporum permutantur, *m.* 563. 565.

Celeritates acquisitæ in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.*

603. & seqq. in diversis planis inclinatis eodem tempore quomodo se habeant, 301. 302.

Celeritates amissæ in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.* 603.

Celeritates aquarum per tubos effluentium, *h.* 36. & seqq.

Celeritas terminalis in motu corporum quænam dicatur, *m.* 727. quomodo determinetur, 728. & seqq.

Celeritates terminales in fluminibus. Definitio, *h.* 237. quomodo inveniuntur, 239.

Celeritatum locus in motu gravium quænam sit curva, *m.* 99.

Celeritatum quadratorum summa in conflictu corporum elasticorum quod conservetur, 593.

Centrum gravitatis. Definitio, *m.* 122. cur pro gravi corpore sumi possit, 125. quando idem cum centro magnitudinis, 141. quomodo determinetur, 157. quomodo mechanice determinetur, 186. quomodo se habeat ante & post conflictum, 598. 560.

Centrum gravitatis arcus circuli, *m.* 165. conici, 174. conici truncati, 184. conoidis hyperbolici, 179. parabolici, 175. 176. truncati, 185. corporis humani, 187. cylindri, 143. lineæ rectæ, 142. lunulæ HIPPOCRATIS, 169. parabolæ, 159. 162. parabolæ truncatæ, 170. parabolæ infinitarum, 160. 161. 163. parabolici mixtilinei spatii, 189. parallelepipedii, 172. parallelogrammi, 172. perimetri trianguli, 190. perimetri figuræ irregularis cujuscunque, 191. pyramidis truncatæ, 184. pyramidis, 174. sectoris circuli, 166. segmenti circuli, 168. segmenti sphaeræ, 177. segmenti sphaeroidis elliptici, 180. semicirculi, 167. sphaeræ, 178. sphaeroidis truncati, 185. sphaeroidis elliptici, 181. dimidii, 182. trianguli, 158.

- Centri gravitatis status* num mutetur ab actione corporum in se invicem, *m.* 601.
- Centrum gravitatis commune* duorum corporum seu ponderum quomodo determinetur, 144. 149. quomodo plurium, 151. 192. ponderum æqualium, 145.
- Centrum magnitudinis.* Definitio, *m.* 132.
- Centrum motus.* Definitio, *m.* 228.
- Centrum oscillationis.* Definitio, *m.* 423. quomodo determinetur, 426. 429. 432. quomodo in figuris in latus agitat, 445. & seqq.
- Centrum oscillationis conici,* *m.* 459. 466. conoidis parabolici, 462. hyperbolici, 464. infinitorum parabolicorum, 463. cylindri, 457. hemisphærii, 461. 467. lineæ rectæ, 433. parabolæ, 440. 441. 451. 453. parabolæ infinitarum & curvarum agnatarum, 440. 442. 452. rectanguli, 435. 448. solidorum rotatione genitorum, 454. sphæræ, 460. sphæroidis elliptici, 465. trianguli æquicruri, 436. 437. 438. 449. 450.
- Centrum percussioneis.* Definitio, *m.* 527. quando cum centro oscillationis idem, 547. quando idem cum centro gravitatis, 549.
- Centrum velocitatis,* *h.* 268. *virium.* Definitio, *m.* 654.
- Ceræ gravitas specifica,* *f.* 77.
- Circuli area* quomodo inveniat, *m.* 198.
- Clavicula.* Definitio, *h.* 5. constructio, 7. 8.
- Clepsydræ divisio,* 45. & seqq.
- Cochlea.* Definitio, *m.* 760. theoria, 847. & seqq. praxis, 852. & seqq.
- Cochlea mas,* *m.* 760. *fœmina,* *ibid.*
- Cochlea ARCHIMEDIS* quomodo construat, *h.* 122. & seqq.
- Cochlea infinita seu perpetua.* Definitio, *m.* 855. theoria, 856. 858. & seqq. praxis, 862. & seqq.
- Compressio.* Definitio, *a.* 5.
- Compressio aëris in vase sub aqua detento,* *a.* 106.
- Conatus.* Definitio, *m.* 18.
- Condensatio.* Definitio, 6.
- Condensatio aëris* quomodo æstimanda, 114. & seqq.
- Coni centrum gravitatis,* *m.* 184. centrum oscillationis, 459. 466. soliditas quomodo inveniat, 202. 204. 205. quomodo superficies, 202. 203.
- Conoidis hyperbolici centrum gravitatis,* *m.* 179. centrum oscillationis, *m.* 464.
- Conoidis parabolici centrum gravitatis,* 175. 176. centrum oscillationis, 462.
- Conoidis truncati centrum gravitatis,* 185.
- Conoidum parabolicorum infinitorum centrum oscillationis,* *m.* 463.
- Corpora æqualium basium* quantum ab aëre premantur, *a.* 45.
- Corpora gravia* num eadem celeritate descendant, *m.* 133. 134.
- Corporis humani centrum gravitatis,* 187.
- Corporis pars immergenda in fluido* quando inveniat, *f.* 105.
- Corporis specificè gravioris gravitatio in fluido specificè leviori,* *f.* 55. & seqq.
- Corporum in aëre æquilibratorum æquilibrium* quando tollatur, *a.* 158.
- Corpus motu reflexo* qua via ab uno termino ad alterum accedat, *m.* 558.
- Corpus asperum.* Definitio, *m.* 935.
- Corpus durum,* 520. *elasticum,* 522. *fluidum,* *f.* 3. *molle,* *m.* 521. *solidum,* *f.* 4.
- Cunei theoria,* *m.* 865.
- Currus onustus* cur difficilius trahatur super plano inclinato, quam horizontali, 277.
- Curva,* in qua grave descendens eam constanter ei ponderi absoluto æquali premit, 672.
- Curva* in qua grave descendens eam constanter eadem vi, sed non ponderi absoluto

luto æquali premit, [673](#). quæ a pondere descendente premitur in ratione dignitatum altitudinum, [675](#).

Curva accessus & recessus æquabilis. Definitio, [347](#). quomodo inveniatur, [349](#).

Curva æquilibrationis. Definitio, [369](#). quomodo inveniatur, [371](#). quomodo describatur, [373](#).

Curva brachystochrona. Definitio, [355](#). quomodo inveniatur, [357](#).

Curva celerrimi descensus. Definitio, [355](#). quænam sit, [357](#).

Curva elastica BERNOULLI, [675](#).

Curva isochrona. Definitio, [331](#). quomodo inveniatur in hypothesi Galilæana, [334](#). in hypothesi directionum convergentium, [336](#). hujus rectificatio, [338](#). quadratura, [339](#). quomodo inveniatur in quacunque accelerationis hypothesi, [343](#).

Curva isochrona paracentrica. Definitio, [m. 347](#). quomodo inveniatur, [349](#).

Curva oligochrona. Definitio, [355](#). quomodo inveniatur, [357](#).

Curva resistentiæ in motu gravium, [708](#). instantaneæ, [681](#). totalis, *ibid*.

Curva synchrona. Definitio, [366](#). quomodo construatur, [368](#).

Curva tautochrone. Definitio, [351](#). quænam sit, [352](#).

Cycloidis proprietates mechanicæ, [m. 351](#). [357](#). [675](#). proprietates singulares, [311](#). [388](#). quomodo per data tria puncta describatur, [361](#).

Cyclois externa circularium segmentorum repræsentatrix, [358](#).

Cylindri centrum gravitatis, [143](#). oscillationis, [457](#). soliditas, [197](#). [100](#). [201](#). superficies quomodo inveniatur, [200](#).

D.

Densitates quando sunt ut massæ, [f. 14](#). quando ut gravitates, [16](#). quando reciproce ut volumina, [23](#).

Densitatum ratio, [24](#). [25](#).

Densitates fluidorum quomodo se habeant, [f. 39](#). quomodo inveniuntur, [67](#). respectivæ quando determinentur, [40](#).

Densitas aëris ubi eadem, [a. 46](#). [47](#). quomodo crescat, [153](#). num inferioris ponderi atmosphærico proportionalis, [156](#).

Densus. Definitio, [8](#).

Deprimendo movere quid sit, [m. 871](#).

Descensus gravium intra minutum secundum quomodo determinetur, [472](#). quantus sit, [473](#).

Descensus gravium in cycloide quomodo se habeat, [m. 311](#). in lineis curvis demonstratus, [334](#). & *seqq.* in plano inclinato cum descensu per verticale collatus, [293](#). & *seqq.* cum descensu perpendiculari iisdem legibus adstrictus, [189](#).

Descensus specificæ gravioris in fluido leviori, [f. 88](#). & *seqq.*

Diabetis constructio, [72](#). phænomena, [73](#). & *seqq.*

Diagonalis parallelogrammi quando motu composito describatur, [m. 241](#). quo tempore describatur, [244](#).

Diameter gravitatis. Definitio, [m. 126](#).

Dilatatio. Definitio, [a. 7](#).

Directiones quomodo opponantur, [21](#).

Distantiæ ponderum a centro gravitatis communi quomodo se habeant, [144](#).

Distantiæ a centro gravitatis & centro motus qualis sit linea, [129](#).

E.

Effectus aëris compressi quomodo computentur, [a. 83](#). & *seqq.*

Effectus pleni quomodo se habeant, [m. 530](#).

Elateris æstimatio, [m. 553](#).

Elateris vi quomodo machina moveatur, [897](#).

Elater aëris. Definitio, [a. 9](#). quando non mutetur, [12](#). quando crescat & decreseat,

scat, 12. existentia, 18. mensura, 30.
 & seqq. quod calore intendatur, 146.
 frigore minuatur, 147.
Elateris aëris directio, 25. 26. mensura
 ejus, quo rarefiens expanditur, 148.
Elater aëris compressi quomodo se habeat
 ad elaterem dilatati, 78. quando for-
 tior, 79. quomodo determinetur, 81.
 magis compressi ad elaterem minus
 compressi quomodo se habeat, 80.
Elevatio quid sit, m. 873.
Ellipseos æquatio abscissis a foco compu-
 tatis, m. 667.
Epistomium. Definitio, h. 5. constructio,
 7. 8.
Ergata qualis machina, m. 877.

F.

F*iguræ superficialis & solidæ magnitudo*
 ex centro gravitatis determinata, m.
 192.
Figurarum per planum deorsum latum de-
scriptarum soliditas quomodo invenia-
 tur, 196.
Fluida homogenea quando in æquilibrio,
 s. 34. quodnam præponderet, 35.
Fluida heterogenea quando in æquilibrio,
 36.
Fluidi ex vase inverso exigui orificii effluen-
tis quantitas quomodo determinetur,
 a. 100. & seqq.
Fluidi gravioris in specificè leviori pon-
deratio, s. 87. & seqq.
Fluidi pondus quomodo inveniat, 61. 63.
Fluidi partes inferiores num compriman-
 tur a superioribus, 71. 72.
Fluidi per siphonem effluentis acceleratio,
 h. 81. & seqq.
Fluidorum diversæ gravitatis specificæ æqui-
librium, 36.
Fluidorum densitates quomodo invenian-
 tur, 67.
Fluidorum diversæ gravitates specificæ quo-
modo inveniantur, 66. 70. quomodo
 se habeant, 95.

Fluidorum indirecte ac directe impingen-
tium juxta lineas parallelas theoria, h.
 367. & seqq.
Fluidorum variorum gravitas in pollice
cubico Parisino, s. 69.
Flumen detumescere quando dicatur, h. 199.
Flumen intumescere quando dicatur, ibid.
Fluminum cursus theoria, h. 185. & seqq.
Fons naturalis quomodo arte contrua-
 tur, h. 18.
Fontis intermittentis constructio, h. 143.
 152.
Fontium salientium constructio, 128. &
 seqq. 152. & seqq.
Frictio. Definitio, m. 933. quomodo æsti-
 manda, 940. & seqq. quomodo minua-
 tur, 943. & seqq. 956. & seqq.
Fulcra quomodo corpori supponenda, ut
 in data ratione premantur, m. 234.
Funis canabini contractio ob humiditatem
 aëris, a. 215. 216.

G.

G*rave* quando quiescat, m. 123. 124.
 221. quando firmiter insistat, 223.
 quando cadat, 222. num sit a lapsu im-
 mune quomodo inveniat, 224. quo
 motu descendat, 79. 85. & seqq. quo-
 modo in plano inclinato descendat,
 161. & seqq.
Gravium linea directionis, 212. & seqq.
Gravia heterogenea. Definitio, m. 131.
Gravia homogenea, 130.
Gravitas. Definitio, m. 4. quomodo spe-
 cietur a Mathematicis in motu gravium,
 114. num in omni distantia eadem, 78.
 quod a polis versus æquatorem con-
 tinuo decrescat, 390.
Gravitates quando sunt ut volumina, s. 18.
Gravitatis actio diversæ quomodo ex motu
 pendulorum colligatur, m. 389.
Gravitatis planum. Definitio, 128.
Gravitas absoluta. Definitio, m. 259.
 ad respectivam ponderis super plano
 inclinato quomodo sese habeat, 161.
 263.

Gravi-

Gravitates absoluta quomodo se habeant, f. 31.

Gravitas aëris evicta, a. 20. quod sit variabilis, 121. & seqq.

Gravitas specifica determinata, 27. & seqq.

Gravitas respectiva. Definitio, m. 260. quando in absolutam degeneret, 266.

quando nulla, *ibid.* super plano inclinato quomodo crescat & decreseat, 265.

Gravitates respectivæ ponderum super diversis planis inclinatis quomodo sint ad se invicem, 264.

Gravitas solidi quomodo inveniat, f. 78. 79.

Gravitas specifica corporum quando eadem, 19. 30. quando diversa, 20.

Gravitates specificæ quomodo se habeant, 32. 33. 65. quando sint ut volumina reciproce, 29. quando ut massæ, 28. quando ut absolutæ, 26.

Gravitas specifica fluidorum quomodo inveniat, f. 17. 66. 70. quod ætate ac hieme non eadem, 69.

Gravitates specificæ fluidorum quomodo se habeant, 95.

Gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem specificam solidi gravioris ratio quomodo determinetur, 73.

Gravitas specifica solidi quomodo determinetur, f. 75. 76. quomodo se habeat ad gravitatem fluidi, 101.

Gravitates specificæ solidorum æqualium quomodo se habeant, 103.

Gravitatio. Definitio, m. 5. in fulcra, a quibus sustentatur, 231. super plano inclinato qualis sit, 261.

Gravitatio corporum specificè leviorum in fluido graviori, f. 94. & seqq.

Gravitatio specificè graviorum in fluido leviori, 34.

H.

Hemisphæria evacuata quanta vi comprimantur, a. 59. & seqq.

Hemisphærii centrum oscillationis, m. 461. 467.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Horologii oscillatorii constructio, m. 994.

Hydracontisterii constructio, h. 168.

Hydraulica. Definitio, 1.

Hydrostatica. Definitio, f. 1.

Hygrometrum. Definitio, a. 197.

Hygroskopium. Definitio, 197. constructio, 220.

Hyperbolæ æquatio abscissis a foco computatis, m. 668.

Hypomochlium. Definitio, m. 753.

Hypothesis Galilæana de motu gravium, m. 89. & seqq.

Hypothesis Baliani de motu gravium, 102. ejus impossibilitas demonstrata, 115.

I.

Ictus quomodo se habeant in conflictu corporum, m. 567.

Ilтус perpendicularis ad obliquum ratio, 552.

Ignis vi quomodo machinæ agitentur, 931.

Impactus directus corporis unius in alterum. Definitio, 523.

Impactus indirectus sive obliquus. Definitio, 526.

Impetus. Definitio, 543.

Incessus hominum quomodo fiat, 226.

Incurfus fluidorum eodem modo fieri quando dicatur, h. 176.

Instrumenta quænam ad vectem revocabilia, m. 750.

Instrumenti constructio, quo quantitas salis in aqua salsa exploratur, f. 108. & seqq.

L.

Lampadis constructio, quæ eandem quantitatem olei ellychnio affundit, h. 155.

Lapidis gravitas specifica, f. 77.

Lapsus. Definitio, m. 211.

Lapsus gravium unde pendeat, 222.

Lex motus, 71.

Libella. Definitio, m. 906. constructio, 907. & seqq. rectificatio, 910.

Libellatio aquarum quomodo instituenda, 911.

Libra theoria, m. 779. & seqq. constructio, 782. & seqq. examen, 787. usus, 788. & seqq.

Linea directionis. Definitio, m. 17.

Linea directionis gravium, 212. & seqq.

Linea horizontalis vera. Definitio, 207. qualis sit, 208.

Linea horizontalis apparens. Definitio, m. 209. qualis sit, 210. quando pro vera assumi possit, 218. quomodo ad veram reducatur, 216.

Linea recta centrum gravitatis, 142. centrum oscillationis, 433.

Logarithmica proprietas, 682.

Lumen tubi quid sit, b. 4.

Lunula HIPPOCRATIS centrum gravitatis, m. 169.

M.

M*Achina*. Definitio, m. 745.

Machina ingenti ponderi elevando apta, m. 969. ad conterendam materiam pulveris pyrii serviens, 989. & seqq. qua aqua insigni cum impetu elevatur, b. 166.

Machina, quibus aqua elevatur, b. 107. & seqq.

Machina composita. Definitio, m. 966. earum numerus, 967. quomodo inveniuntur, 968.

Machinamenta hydraulica, b. 161. & seqq.

Magnetis gravitas specifica, f. 77.

Malluvii cum fonticulo saliente constructio, b. 145.

Manometri theoria, a. 151.

Manoscopium. Definitio, a. 160. constructio, 161. & seqq.

Marmoris gravitas specifica, f. 77.

Massa. Definitio, m. 6. quomodo æstimanda, 138. quorumnam corporum æqualis, f. 12.

Massæ corporum quomodo se habeant, f. 21. 22. quando sint ut volumina, 17.

Massæ bonæ ab adulteratis quomodo distinguantur, 83. & seqq.

Materia quænam cum corpore gravitet, m. 136.

Mechanica. Definitio, m. 1.

Mechanice philosophari quid significet, m. 746.

Metallorum gravitates specificæ, f. 77.

Methodus centrobaryca GULDINI, m. 206.

Miscibilium quantitas in mixto quomodo inveniatur, f. 81.

Mobile quando in curva ea lege incedat, ut radius vector verrat areas temporibus proportionales, m. 652.

Molæ alata, m. 982. frumentariæ, 975. & seqq. jumentariæ, 981. manuariæ, 979. oleariæ, 983. & seqq. ferrariæ constructio, 992.

Moles. Definitio, 7. quomodo invenitur, 8.

Momentum gravium quid dicatur, m. 147.

Momenta corporum extra centrum gravitatis suspensorum, 153.

Momenta ponderum super plano inclinato spectantium, 271.

Motus. Definitio, m. 2. quando acceleretur, 76. quando in medio resistente nunquam extinguatur, 690. retardetur, 77. quando nullus sequatur, 75. cur naturalis rectilineus, 73. super plano inclinato descendens qualis sit, 284. & seqq. quando per reflexionem non mutetur, 555.

Motus aquabilis. Definitio, m. 24. theoria, 27. & seqq. 31.

Motus acceleratus. Definitio, 67. theoria, 101. & seqq.

Motus animalium explicandi principium, 226.

Motus compositus. Definitio, 238. theoria, 241. & seqq.

Motus corporis impingentis quando cesset, 544.

Motus in conflictu amissus quomodo determinetur, 541.

Motus ex percussione demonstratus, 530. & seqq.

Motus perfecte durorum, 532. & seqq.

Motus elasticorum, 560. & seqq.

Motus

Motus oblique impingentium quomodo determinetur, m. 616.

Motus curvilineus qualis, 239. quænam ejus causa, 74.

Motus fluminum theoria, h. 210. & seqq.

Motus gravis ascendens qualis sit, m. 317. quibus legibus adstringatur, 318. & seqq.

Motus gravium, qua lege acceleretur, 86.

87. in medio resistente, 708. & seqq.

Motus pendulorum demonstratus, 380. & seqq.

Motus projectorum demonstratus, 479. & seqq.

Motus rectilinei in compositum resolutio, 245. 246.

Motus retardatus. Definitio, m. 70.

Motus simplex. Definitio, 237.

Motus uniformiter acceleratus. Definitio, 67. ejus ratio, 80. & seqq.

Motus uniformiter retardati ratio, 97. & seqq.

Moveri quando dicatur corpus, 3.

N.

Nervi fidium mutatio quoad longitudinem ob humiditatem aëris, a. 218.

O.

Onus ferendum quomodo in data ratione distribuatur, m. 235.

Oscillatio. Definitio, 376.

Oscillatio penduli in cycloide quomodo determinetur, 387. quomodo efficiantur isochronæ, 382. & seqq.

Oscillationes pendulorum inter se comparatæ, 392. & seqq.

P.

Parabola curva temporis in motu gravium, m. 100. locus celeritatum in motu gravium, 99. via corporis projecti, 480. 482. quomodo describatur, 486.

Parabolæ æquatio abscissis a foco computatis, m. 666. centrum gravitatis, 159. 162. centrum oscillationis, 451. 453. usus in motu fluminum explicando, h. 229. & seqq.

Parabolæ truncatæ centrum gravitatis, m. 170.

Parabolarum infinitarum centrum gravita-

tis, m. 160. 161. 163. centrum oscillationis, 440. 442. 452.

Parallelogrammi centrum gravitatis, 172. area quomodo inveniatur, 194.

Parallelopipedi centrum gravitatis, 172.

Pendulum. Definitio, m. 376. cur oscilletur, 380.

Penduli agitatio in latus, 444.

in planum, ibid.

Pendulorum intra cycloides suspensorum longitudines quomodo se habeant, 396. & seqq.

Pendulum simplex. Definitio, 377.

Compositum, 378.

Percussio fluidi. Definitio, h. 269. qualis sit, 270. 271. quænam in ea æstimanda respicienda, 272. 273. 274. theoria, 180. & seqq.

Perimetri figuræ irregularis cujuscunque centrum gravitatis, m. 191.

Perimetri trianguli centrum gravitatis, 191.

Peritrochium quid dicatur, 756.

Pes horarius. Definitio, m. 425. quantitas, 470. quomodo determinetur, 469. num sit mensura universalis, 471.

Plana diversa quomodo ab aëre preman-
tur, a. 61.

Plana similiter inclinata quænam sint, m. 312.

Plani horizontalis determinatio, 219.

Plani inclinati longitudinis ad altitudinem ratio quomodo in praxi facile determinetur, m. 277. theoria & praxis, 261. & seqq.

Planum inclinatum. Definitio, 158. quomodo determinetur, super quo datum pondus data vi sustentetur, 268.

Peculi constructio, quo bibenti illuditur, h. 74.

Polyspasti theoria & praxis, m. 833. & seqq.

Pondus. Definitio, m. 748. quomodo hydrostatice inveniatur, s. 104. quando in aëre minuatur, & augeatur, a. 157. ejus vi quomodo machina moveatur, m. 890. & seqq. potentia adjuvetur, 896.

Pondus columnæ atmospherice quomodo inveniatur, a. 59.

Pondus corporis in vacuo quomodo invenitur, *a.* 58.
Pondus appensum quando corpus in plano horizontali positum e situ horizontali dimovere nequeat, *m.* 233.
Pondera super curvis æquiponderantia, *m.* 374.
Ponderum super planis inclinatis æquiponderantium ratio ad se invicem, 281. 283.
Ponderis aeris incrementum ob variatum pondus atmosphæricum quomodo determinetur, *a.* 159.
Potentia. Definitio, 747. cuiam sit æqualis, 763.
Potentia animata, 869.
 inanimata, 869.
 movens, 747.
 resistens, *ibid.*
Præponderatio corporum duorum extra centrum gravitatis commune suspensorum quomodo determinetur, *m.* 152. quomodo plurium, 155.
Præponderatio fluidi homogenei, *f.* 35.
Pressio fundi vasorum a fluidis, *f.* 41. & *seqq.* quando eadem, 41. 43. 47. 200. quomodo decreseat, 44. 45. si bases vasis fuerint inæquales, 48.
Pressiones fundi vasorum a fluidis quam habeant rationem, 46.
Principium rationis sufficientis, *m.* 25. 26.
Prismatis soliditas quomodo inveniat, 197.
Problema Archimedæum de corona ex auro & argento mixta quomodo solvatur, *f.* 82.
Problema de curva isochrona ad omnem universalitatem revocatum, *m.* 345.
Projectilis motus per spatia horizontalia qualis, 490.
Projectum horizontaliter vel oblique qualem lineam describat, 480. 481.
Projectio horizontalis. Definitio, *m.* 476. qualis hinc oriatur motus, 480.
Projectio obliqua. Definitio, 477. qualis hinc oriatur motus, 488.

Projectio perpendicularis. Definitio, *m.* 475. quinam hinc oriatur motus, 479.
Projectionis curva quomodo inveniat, directionibus gravium suppositis parallelis, 516. iisdem suppositis convergentibus in centro Telluris, 518.
Pyramidis truncatæ centrum gravitatis, 184.
Quantitas materiæ in diversis corporibus quomodo per pendula definatur, *m.* 406. & *seqq.* quod ponderi proportionalis, 412.
Quantitas motionis. Definitio, 22. 23.
Quantitas motus. Definitio, *m.* 22. 23. quando ante & post conflictum eadem, 581. 585. quando non, 582. & *seqq.* quando augeatur, 588. quando minuat, 589. in corporibus homogeneis quomodo se habeat, 139.
Quies. Definitio, *m.* 2.
Quies ex ictu corporum resultans, 533. 538. gravium unde pendeat, 222.
R.
Radius vectr. Definitio, *m.* 655.
Rarefactio. Definitio, *a.* 8.
Rarefactio aëris evicta, *a.* 23. quomodo eadem aqua expellatur, *b.* 91.
Rarius. Definitio, *f.* 10. quod specificè levius densiori, 11.
Rectanguli centrum oscillationis, *m.* 435. 448.
Reflexio corporis oblique impingentis qualis sit, *m.* 556.
Reflexionis lex analytice investigata, 557.
Resistentia, quam patiuntur corpora per fluida mota, *b.* 301. & *seqq.*
Resistentia medii. Definitio, *m.* 677. quomodo determinetur, 679. & *seqq.*
Rosarii constructio, *b.* 118. 119.
Rota directæ. Definitio, *m.* 899. constructio, 913. quomodo vi aquæ agitur, 920.
Rota retrogradæ. Definitio, 899. quomodo vi aquæ agitur, 924. & *seqq.*
Rota siculis instructa quomodo construatur, *b.* 120.

Rotarum

Rotarum dentatarum & radiatarum lignearum constructio, m. 997.

S.

Salis quantitas in aqua salsa quomodo determinetur, f. 108. & seqq.

Saltus aquæ per lumen horizontale, b. 58. & seqq. per verticale, 49. & seqq. vi aëris compressi factus quantus sit, 96. & seqq. 101. vi rarefacti factus quantus, 102.

Scytale quam vocentur, m. 757.

Sectio alvei. Definitio, b. 188.

Sectio alvei naturalis, 190. qualis figura, 192.

Sectio alvei artificialis, 190. qualis figura, 193.

Sectio alvei tardior, 196. *velocior*, ibid.

Sectiones æquveloces. Definitio, b. 195. 209.

Sectio fluminis. Definitio, m. 39. quomodo inveniatur, 914. 915.

Sectiones diversæ fluminis quam habeant rationem, 916.

Sectoris circuli centrum gravitatis, 166.

Segmenti circuli centrum gravitatis, m. 168.

Segmenti sphaeræ centrum gravitatis, 177.

Segmentorum circuli ratio, 364.

Segmentorum curvarum similium ratio, 364.

Semicirculi centrum gravitatis, 167.

Semita projectilis. Definitio, m. 488. quomodo describatur, 510. parame-ter quomodo inveniatur, 491.

Similitudinis principiorum in Geometria fecunditas, 365.

Sipho anatomicus, f. 52. usus, ibid.

Siphonis interrupti constructio & usus, b. 77. & seqq.

Siphonum constructio, 64. 66.

Situla baculo supra mensam posito appensa quando non decidat, m. 233.

Solidum quanta sui parte mergatur, f. 94. quando profundius mergatur, 96. 97. quando datum intra fluidum locum servet, 98.

Solidum minimæ resistentiæ quomodo inveniatur, b. 319.

Solidorum æquiponderantium in partes fluido submersæ quando æquales, f. 102.

Sollicitatio ad motum. Definitio, m. 110. quomodo determinetur ex lege accelerationis, 112. in motu composito quomodo se habeat, 253.

Spatium motus. Definitio, m. 12.

Spatii parabolici mixtilinei centrum gravitatis, m. 189.

Specifice gravius. Definitio, f. 6. quod sit densius, 9.

Specifice levius. Definitio, 5. quod rarius, 11. quando fundo vasis incumbens a fluido non attollatur, 100. quando specificè graviori connexum in fluido non ascendat, 118. 122. & seqq. 127.

Sphaeræ centrum gravitatis, m. 178. centrum oscillationis, 460.

Spheroidis elliptici centrum gravitatis, 181. 182. centrum oscillationis, 465.

Spheroidis elliptici segmenti centrum gravitatis, 180.

Spheroidis truncati centrum gravitatis, 185.

Spiritus vini quantum rarefiat, a. 152.

Statica. Definitio, m. 1.

Statera constructio, 774. & seqq.

Sulphuris gravitas specifica, f. 77.

Superinceffus radens, m. 236.

volvens, 937.

mixtus, 938.

Symmetriæ corporis humani ratio, 227.

Syrinx quomodo construatur, b. 107. quo impetu aqua expellatur, 108. 109.

T.

Tempus motus, Definitio, m. 11.

Tempus descensus per planum inclinatum, 309. & seqq. per curvam quomodo determinetur, 353. quomodo per convexitatem curvæ, 354.

Tempora descensus per plana similiter inclinata, 314. & seqq. per curvas similes & similiter positas, 316.

Tempora, quib. vasa deplentur, b. 41. & seqq.

Temporis curva in motu gravium, *m.* 100.
Tendentia. Definitio, 255.
Tendentia media. Definitio, 255. quomodo inveniatur, 256.
Thermometrum. Definitio, *a.* 196.
Thermoscopium. Definitio, 196. constructio, 198. 202. & seqq. in usu notanda, 214.
Tractio. Definitio, *m.* 872.
Trahendo quomodo machina moveatur, 878. 879. 887.
Trahendo & deprimendo simul quomodo machina moveatur, 882.
Trahendo & protrudendo simul quomodo machina moveatur, 884.
Trajectoria quænam linea dicatur, *m.* 519. quomodo inveniatur ex lege virium centripetarum, 664.
Trajectoria quomodo inveniatur si vis centripeta fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris, 669. quomodo hujus æquatio inveniatur, 670.
Trianguli centrum gravitatis, 158.
Trianguli aquicruri centrum oscillationis, 436. & seqq. 449. 450.
Trochlea. Definitio, *m.* 759. theoria & praxis, 826. & seqq.
Trudendo movere quid sit, 870.
Trudendo quomodo machina moveatur, 870.
Tubus in Hydraulica quid dicatur, *b.* 3.
Tubus Torricellianus. Definitio, *a.* 87. symptomata, 91. & seqq. 120. & seqq.
Turres Bononiensis & Pisana inclinatæ cur a lapsu immunes, *m.* 225.
Tympani constructio, quo aqua elevatur, *b.* 120.

U.

V *Alvula*. Definitio, *b.* 104. constructio, 106.
Vas ad hortos irrigandos aptum quomodo construatur, 163.
Vasa concordie quomodo construantur, 180.
Velis. Definitio, *m.* 749. usus in expli-

candis instrumentis & motibus animalium, *m.* 751. theoria in hypothesi directionum perpendicularium, 765. in hypothesi obliquarum, 272. & seqq. praxis, 768.

Velis heterodromus. Definitio, 755.
homodromus, 754.

Velocitas. Definitio, *m.* 13. quid proprie sit, 16. qua diagonalis in motu composito describitur, quanta sit, 247. 248.

Velocitatis in motu composito quantitas ab angulo directionis dependens, 251.

Velocitates aquarum per tubos fluentium quomodo sint inter se, *b.* 11.

Velocitas media aquæ in fluminibus, 208.

Ventus. Definitio, *a.* 166. celeritas quomodo determinetur, 167. & seqq. quomodo oriatur, 185. & seqq. ex baroscopio prædicatur, 188. 189.

Venti vi quomodo machina agitetur, *m.* 919.

Venti artificialis excitatio, *a.* 194. 195. ad flammam conservandam, *b.* 176. & seqq.

Versando movere quid sit, *m.* 875.

Versando quomodo machina moveatur, 880.

Vis requisita ad corpus in situ horizontali sustentandum, *m.* 230. ad grave super plano inclinato retinendum, 262. ad motum gravis impediendum, 267. ad solidum submersum attollendum, *f.* 92. ad specificè levius a fluido graviori ad ascensum urgendum, 99. ad solidum in fluido specificè leviori sustentandum, 126. ad vas vacuum in aquam immergendum, 113. ad specificè levius sub fluido graviori detinendum, 114. 120. 121. ad solidum in fluido demergendum, 106. qua solidum in fluido ascendit, 107.

Vis ulla num perdat, 116.

Vires aquales quænam sint, *m.* 275.

Vires equiponderantium quomodo assignandæ, 146. 273. 274.

Vis

Vis centralis in omni curva quomodo se habeat, *m.* 657. in circulo, 658. & seqq. sectione conica quavis, 660. curva qualibet quomodo inveniatur, 662.

Vires centrales in circulo quomodo sese habeant, 623. & seqq.

Vis centrifuga. Definitio, *m.* 617.

Vis centripeta. Definitio, 619. quando urgeat corpus in linea curva motum versus aliquod punctum, 65.

Vires conspirantes quænam sint, *m.* 238.

Vires fluidi in percussione quomodo sese habeant, 280. & seqq.

Vis mortua. Definitio, 910. quomodo æstimanda, 278.

Vires mortuæ quando sicut velocitates, *m.* 280.

Vis motrix. Definitio, 9.

Vires percutientes aquarum rotas molares agitantium quomodo ad mensuram revocentur, *b.* 286. & seqq.

Vis resistendi. Definitio, *m.* 10.

Vis venti, qua alas molendini convertit, *b.* 315.

Vis viva. Definitio, *m.* 9. 10.

Vires vivæ corporum quomodo æstimandæ, 325. & seqq.

Volumen. Definitio, *m.* 7.

Volumen solidi pondere alteri æqualis quomodo inveniatur, *f.* 80.

FINIS INDICIS QUINTI.

VI.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO III. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *o.* Opticam, *a.* Catoptricam, *d.* Dioptricam, *p.* Perspectivam, *f.* Sphærica & Trigonometricam sphæricam, *a.* Astronomiam, numeros vero §§. designare: ubi autem nulli numeri adscribuntur, eosdem referri ad literam præcedentem.

A.

Adnata quid sit, *o.* 23. ejus usus, 23.

Adspectus. Definitio, *a.* 926. signa, 929. momentum, quo celebratur, quomodo inveniatur, 936.

Æquatio centri. Definitio, *a.* 652. quomodo inveniatur, 687.

Æquationis pars physica, *a.* 688.

optica, *ibid.*

Æquationum Tabula quomodo construantur, *a.* 688.

Æquatio luminis, quid dicatur in theoriâ Lunæ, *a.* 857.

Æquatio menstrua Lunæ. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 851.

Æquatio temporis. Definitio, *a.* 714. quomodo inveniatur, 715.

Æquationum temporis Tabula quomodo construantur, *a.* 726.

Æquator. Definitio, *a.* 48. proprietates, 49. 50. quomodo ab horizonte dividatur, 83. quomodo a meridiano, 84.

Æquatoris

- Æquatoris & horizontis intersectio* qualis sit, a. 88.
- Æquatq̃is arcus* inter horizontem & meridianum interceptus quantus sit, 89.
- Æquinoctium*. Definitio, a. 158. quomodo observetur, 653.
- Ær* num intensitatem luminis minuat, o. 90. 92.
- Æris altitudo* quomodo *invenitur*, a. 405.
- Algebra usus* in Catoprica, c. 312. & seqq. in Dioptrica, d. 487. & seqq.
- Altitudo* apparens sideris. Definitio, a. 73. quomodo observetur, 109.
- Altitudo luminosi*. Definitio, o. 145.
- Altitudo meridiana* quomodo observetur, a. 129. 137. 142. Solis quomodo computetur, 202.
- Altitudinis meridiane* mensura, 95.
- Altitudo minor* quantum officiat visioni remotioris, o. 255. & seqq.
- Altitudo nonagesimi*. Definitio, a. 220. cuius æqualis, 221. quomodo invenitur, 222.
- Altitudinis nonagesimi Tabula* quomodo computentur, a. 223.
- Altitudo objectiva* quomodo se habeat ad perspectivam, p. 54. quomodo exhibeatur, 55.
- Altitudo oculi*. Definitio, p. 21.
- Altitudo poli* quomodo invenitur, a. 147. 154. ejus mensura, 96.
- Altitudo puncti apparentis in tabula* quomodo se habeat ad altitudinem oculi, p. 32.
- Altitudo Solis* quomodo ex umbra corporis invenitur, o. 147. quomodo computetur, 215.
- Altitudo stellæ*. Definitio, a. 73. mensura, 94. quomodo ad datum tempus invenitur, 300.
- Altitudo vera*. Definitio, a. 73.
- Altitudines* quomodo ex umbra repariantur, o. 153. & seqq. quomodo ope quadrati geometrici investigentur, 174. & seqq. quomodo mediante speculo, c. 64. quando appareant inclinatae, o. 326. 327. quando erectae, 328.
- Altitudines apparentes* quando æquales, a. 104.
- Altitudines meridiane* quomodo observentur, a. 129. 137. 142.
- Altitudinum differentiae* quænam visu non dignoscantur, o. 250.
- Altitudinum meridianarum* observatarum utilitas in Astronomia, a. 130.
- Amphiblestroides*. Definitio, o. 30.
- Amphora* sive *Aquarius*, a. 160.
- Amplitudo occidua*. Definitio, a. 195. mensura, 196. quomodo ope globi invenitur, 320. 322.
- Amplitudo ortiva*. Definitio, a. 195. mensura, 196. fixæ quomodo computetur, 265. quomodo ope globi invenitur, 322. Solis quomodo computetur, 206. quomodo ope globi invenitur, 318.
- Amplitudinum ortivarum Tabula* quomodo condantur, 207.
- Anaclastica*. Definitio, d. 1.
- Anamorphosis*. Definitio, p. 105. quomodo fiat, 106. & seqq. in superficie conici convexa, 111. in concava, 113. in pyramide multilatera, 112. pro polyedro, d. 277.
- Anamorphosis mechanica*, p. 109. 115.
- Anamorphoses* quomodo adspiciendæ, 114.
- Anamorphoses* quomodo fiant pro speculo cylindrico, c. 290. pro conico, 301. pro pyramidalis, 304.
- Anamorphosium* pro speculo cylindrico perficiendarum theoria, 254. & seqq.
- Angulosa* quando appareant rotunda, o. 280. 281.
- Anguli species* in Triangulo rectangulo sphaerico quomodo determinetur, f. 133.
- Angulus ad nodum orbitæ Cometæ* quomodo invenitur, a. 1138.
- Angulus ad Solem*. Definitio, a. 650. ad Terram, 762.

Angulus circuli latitudinis cum via penumbrae quomodo inveniatur, a. 1067.
Angulus commutationis. Definitio, a. 760. quomodo inveniatur, 761.
Angulus eclipticae cum meridiano quomodo in dato puncto computetur, 204.
Anguli eclipticae cum meridiano Tabula quomodo condantur, 205.
Angulus elongationis. Definitio, a. 762. quomodo supputetur, 792.
Angulus incidentiae. Definitio, c. 19. d. 11.
Angulus inclinationis. Definitio, d. 12.
Angulus opticus, seu visorius. Definitio, o. 207.
Angulus orientis quomodo computetur, a. 218.
Angulus parallacticus. Definitio, a. 370. mensura, 371.
Angulus reflexionis. Definitio, c. 21. refractionis. Definitio, d. 13.
Angulus refractus. Definitio, d. 14. quomodo computetur, 30.
Angulorum refractorum & refractionis Tabulae, d. 32.
Angulus sphaericus. Definitio, f. 5. mensura, 31.
Angulorum sphaericorum ratio, 43.
Animalia num dentur in Luna, a. 488. num in planetis, 526.
Anni solaris magnitudo quomodo inveniatur, 669. quanta sit, 671.
Annulus circa Lunam in eclipsi Solis totali apparens, a. 454.
Annulus Saturni, a. 516. 517.
Anomalia. Definitio, a. 646.
Anomaliae motus annuus quomodo inveniatur, 706.
Anomalia coequata. Definitio, a. 650. quid sit, 651. quomodo inveniatur, 686. 690. 697.
Anomalia eccentrici. Definitio, a. 642. quomodo inveniatur, 690.
Anomalia media s. simplex. Definitio, a. 647. mensura, 648. quomodo inveniatur, 648.

Welfii Oper. Mathem. Tom. V.

Anomalia media secundo coequata respondens pro Luna quomodo inveniatur, a. 852.
Anomaliarum Solis Tabulae quomodo construuntur, 707.
Anomalia secundo equata pro Luna quomodo inveniatur, a. 854.
Anomalia vera. Definitio, a. 650.
Aphelium. Definitio, 636.
Aphelii locus quomodo inveniatur pro planetis superioribus, 734. pro inferioribus, 743. pro Tellure, 674. 810. ubinam sit ad A. 1700. in planetis superioribus, 739. in inferioribus, 745.
Aphelii motus annuus quomodo inveniatur in planetis superioribus, 737. in inferioribus, 746. quantus sit in superioribus, 739. in inferioribus, 747.
Apogaeum. Definitio, a. 636.
Apogaei solaris motus annuus quomodo inveniatur, 702.
Apogaei solaris motuum Tabulae quomodo construuntur, a. 703.
Apogaei Lunae locus ad A. 1700. 835.
Apparentia. Definitio, p. 22.
Apparentia lineae, ibid.
 plani, ibid.
 solidi, ibid.
Arachnoides, o. 34.
Aranea, 34.
Arcitenens, a. 160.
Arcus quando instar rectae appareat, o. 275. 276.
Arcus aequatoris datus quo tempore per meridianum transeat quomodo computetur, a. 211.
Arcus inter centra. Definitio, a. 945. quomodo inveniatur, 946. & seqq.
Arcus latitudinarius in eclipsi terrestri. Definitio, 1069. 1070. quomodo inveniatur, 1083.
Arcus visionis. Definitio, a. 281. quomodo determinetur, 286. quantus sit, 288.
Argumentum latitudinis. Definitio, a. 769.
Argumentum latitudinis mensurae. Definitio, 843. quomodo inveniatur, 846.

Mmm

Argumen-

Argumentum menstruum latitudinis. Definitio, a. 870.
Aries, 160.
Ascensio obliqua. Definitio, a. 191.
Ascensio obliqua Solis quomodo invenitur, 208. 209. quomodo ope globi reperiatur, 318.
Ascensio obliqua stellæ fixæ quomodo invenitur, 266. 267. quomodo ope globi invenitur, 322.
Ascensionum obliquarum Tabulæ quomodo condantur, 210.
Ascensio recta. Definitio, 190.
Ascensio recta fixæ quomodo observetur, 228. quomodo computetur, 260. 261. 264. quod sit mutabilis, 235.
Ascensio recta puncti dati eclipticæ quomodo computetur, a. 204.
Ascensio recta Solis quomodo invenitur ope globi, 313.
Ascensionum rectarum singulorum graduum eclipticæ Tabulæ quomodo condantur, 205.
Ascensionum rectarum duarum fixarum differentia quomodo invenitur, 226. 227.
Asterismi quid sint, 245. eorum nomina, ibid.
Astrognoſia quibus adminiculis juvetur, 248.
Astronomia. Definitio, 1.
Astronomia spherica. Definitio, 2.
theorica. Definitio, 3.
Atmosphæra Solis stabilita, 419. 444. 446. figura ejus, 447.
Atmosphæra lunaris stabilita, 486.
Aurora. Definitio, d. 393.
Axis incidentiæ. Definitio, d. 9.
lentiæ. Definitio, 21.
mundi. Definitio, 44.
opticus. Definitio, o. 340.
partis coni umbrosi quomodo reperiatur, a. 1049.
refractionis. Definitio, d. 10.
sphæræ. Definitio, f. 21.

Azimuthum. Definitio, a. 194. ejus mensura, 197.

Azimuthum solis quomodo invenitur, 206. quomodo ope globi, 318.

Azimuthum stellæ quomodo invenitur, 302. quomodo ope globi, 320. 322. B.

B*asis Tabulæ* quid in Perspectiva dicatur, p. 12.

Biceps quando quis appareat in speculo plano, c. 113.

Biquintilis quinam adſpectus sit, a. 931. C.

C*Alor* quomodo ope speculorum concavorum intendatur, c. 226. 227.

Camera obscura quid sit, o. 79. 80. effectus ejus demonstratus, 119. & seqq. quomodo accuratior construatur, d. 236.

Cancer quid significet in Astronomia, a. 160.

Caper sive *Capricornus* quid significet in Astronomia, 160.

Capite ad pedes alterius jacentem quando quis se videat in speculo plano, c. 115.

Capite truncatum quando quis se videat in speculo plano, c. 113.

Caput Draconis, a. 819.

Cardines mundi. Definitio, a. 80.

Cardo meridici. Definitio, ibid.

Cardo occidentis. Definitio, 80. quomodo invenitur, 126.

Cardo orientis. Definitio, 80. quomodo invenitur, 126.

Cardo orientis & occidentis quomodo sibi invicem opponantur, 102.

Cardo septentrionalis. Definitio, 130.

Catalogus fixarum quomodo construatur, 244. a quibusnam constructus, ibid.

Cathetus incidentiæ. Definitio, c. 16. in quonam sit plano, 39.

Cathetus obliquationis. Definitio, c. 18.

Cathetus reflexionis. Definitio, 17. in quonam sit plano, 39.

Catini ad polienda vitra ctmmodi quomodo parentur, d. 527. & seqq.

Catoptrica

Catoptrica, Definitio, c. **1**. principia, 24. & seqq.
Catoptrica analytica, 312. & seqq.
Cauda Draconis, a. **812**.
Celeritatum apparentium ratio, c. **359**. & seqq.
Centrum mediorum motuum ubinam sit, a. **680**.
Centrum penumbrae ubi sit, a. 1050.
Choroides, o. **17**.
Ciliare ligamentum, **29**.
Ciliares processus, 29.
Circulorum maximorum sphaera proprietates s. 15. & seqq. 25. & seqq.
Circulorum minorum sphaerae proprietates, **36**. & seqq.
Circulorum sphaerae in planum projectio quando recta, quando circulus, **152**.
Circuli excursuum. Definitio, a. **187**.
Circuli polares. Definitio, **184**. quales sint circuli, **185**.
Circuli sphaerae mundanae sive caelestis. Definitio, **41**. quomodo optime dignoscantur, **189**.
Circulus quomodo projiciatur, p. **47**.
Circulus aequinoctialis. Definitio, a. **53**. quod vulgo cum aequatore confundatur, 55.
Circulus declinationis. Definitio, **78**. proprietas, **79**.
Circulus diurnus. Definitio, a. **56**.
 eccentricus. Definitio, 641. 642.
 latitudinis. Definitio, a. **239**.
 immutus. Definitio, **43**.
 mobilis. Definitio, **42**.
 polaris arcticus, ibid.
 antarcticus, **184**.
Circulus verticalis. Definitio, 93. quomodo horizontem sensibilem intersecet, 93.
Cistula catoptrica, in qua objecta alia videntur, si per aliud foramen inspexeris, c. **119**. in qua objecta videntur cistula majora, **259**.
Caeli figura apparens, a. **10**. motus apparens, **11**. & seqq.

Cognitio rerum naturalium quotuplex, a. 627.
Colorum theoria optica, o. **183**. & seqq.
Columnarum scenographia, p. **71**.
Coluri. Definitio, a. **186**.
Colurus aequinoctiorum, ibid.
 solstitiorum, ibid.
Cometae. Definitio, a. **1131**. qualia sint corpora, 1168. num mundo coeva corpora, 1158. an sint supra Solem, 1171. an supra Lunam, **1151**. & seqq. num habeant parallaxin sensibilem, 1148.
Cometarum phaenomena, 1167. motus qualis appareat, 1161. caudae quid sint, 1173. longitudo & latitudo quomodo inveniatur, **1132**. ascensio recta & declinatio quomodo inveniatur, 1134. quomodo distantia a Sole, **1135**. motus proprius, 1136. distantia a Terra quanam requiratur, ut datum tempus super horizonte consumant, 1150.
Conclave speculari quomodo construatur, c. **138**. **139**.
Coni scenographia, p. **64**.
Conjunctio planetarum. Definitio, a. **535**. 928. signum, 929.
Conjunctio corporalis, **935**.
 centralis, 935.
 magna, 933.
 maxima, 933.
 platica, **935**.
Conjunctionis Luna cum Sole visae momentum quomodo inveniatur, 999.
Conjunctiones planetarum inferiorum cum Sole quomodo observentur, 728.
Conspicilla. Definitio, d. **478**.
Contigua & continua quando videantur vitibilia, o. **69**.
Conus penumbrosus. Definitio, a. 1040. quid proprie sit, 1044. quousque exporrigatur, 1042.
Coni penumbrosi angulus quantus sit, 1045. 1048. similitudo cum cono umbroso, 1047.

Conus umbrosus quem situm habeat respectu penumbræ, a. 1043.
Coni umbrosi *Lunæ* axis quomodo inveniatur, 1025.
Coni umbrosi *Terræ* longitudo quomodo inveniatur, 939.
Coni umbrosi *Terræ* & *Lunæ* quales sint eodem tempore, 1024.
Cornea tunica. Definitio, o. 18. proprietas, 19. cur sit tenax, 22.
Corpus quando instar superficiei appareat, 274.
Corpus diaphanum. Definitio, 11. illuminatum, 10. lucidum, 9. luminosum. ibid.
Corpus opacum. Definitio, o. 12. quando tegat oculo visibilia, 411. & seqq.
Corpus pellucidum. Definitio, 11. perspicuum, ibid.
Cotangentes quando ad cotangentes prope accedant, d. 51. quando sint ut cotangentes quam proxime, 52.
Craticula ætÿpi in anamorphosis, p. 106. c. 292.
Craticula prototypi in anamorphosis, p. 106. c. 292.
Crepusculum. Definitio, a. 393. causa, 395. quando per integram noctem duret, 400. quo tempore hoc fiat quomodo inveniatur, 401.
Crepusculum matutinum. Definitio, a. 393. quando incipiat, 394. initium quomodo inveniatur calculo, 402. quomodo ope globi, 404.
Crepusculum Solis secundum quomodo observatum, a. 440. undenam sit, 443. 444.
Cubi ex angulo visi scenographia, p. 58.
Culminare quando stella dicatur, a. 133.
Culminatio stellæ. Definitio, 133. quomodo observetur, 134. quomodo computetur, 169.
Curtatio. Definitio, 772.
Curtationum Tabulæ quomodo construantur, 720.

Curvarum versus eandem partem cavarum quænam major, f. 48.
Curvilinea figuræ projectio, p. 48.
Cylindri scenographia, 60.

D.

D*Ecilis*, a. 931.
Declinatio. Definitio, 75. qualis sit, 76. 77.
Declinatio eclipticæ quomodo observetur, a. 183. quomodo computetur, 198.
Declinatio maxima eclipticæ quomodo observetur, 163. 168. quanta observata fuerit, 165. an sit mutabilis, 166. 167.
Declinatio Solis quando sensibilibiter non mutetur, 117. 118. quomodo ope globi inveniatur, 313.
Declinationum Solis circa solstitium differentie quomodo ope gnomonis præalti determinantur, 664.
Declinationum Solis a maxima paulo ante & post solstitium differentie quomodo se habeant, 661. & seqq.
Declinatio stellæ fixæ quomodo computetur, a. 260. 263. quomodo ope globi inveniatur, 311. an sit mutabilis, 233. 234. num in eadem rotatione mutetur, 115.
Delineatio accurata objecti cujuscunque quomodo fieri possit, p. 3.
Descensio obliqua. Definitio, a. 192. quomodo computetur, 207. quomodo inveniatur ope globi, 320. 322.
Diameter apparens Lunæ quomodo mutetur, 555. in Sole insensibilis, 1019.
Diameter apparens Planetarum quomodo observetur, a. 548. quantæ singulorum observatæ fuerint, 557.
Diameter apparens Solis quomodo observetur, 547. 548. quanta observata, 553.
Diametri apparentis Solis, Lunæ & planetarum magnitudo variabilis, 549.
Diameter penumbrae. Definitio, a. 1050.
Diameter spheræ. Definitio, f. 9.
Diameter vera sideris quomodo inveniatur, a. 912. ejus ratio ad diametrum Solis quomodo inveniatur, 909. quanta sit, 911.

Diameter

Diameter vera planetarum in semidiametris Terræ quomodo inveniatur, a. 919. quanta sit uniuscujusque, 920. & seqq.
Diameter umbræ Lunæ, 1029.
Diei longitudo quomodo computetur, a. 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.
Dies solares quod sint inæquales, 709.
Dierum solarium æquatio quomodo inveniatur, 715. æqualium & inæqualium differentia, 711.
Differentia ascensionalis. Definitio, a. 193. quomodo computetur, 206. 265.
Differentia ascensionaliū Tabulæ quomodo condantur. 207.
Differentia descensionalis. Definitio, 193.
Differentiarum horariarum meridianorum Tabulæ quomodo construantur, 980.
Digitus ecliptici. Definitio, 950. quomodo inveniatur in Lunæ eclipsi, 951.
Digitus ecliptici Solis quomodo inveniatur, a. 1001. quomodo in eclipsi terrestri inveniatur, 1097.
Dioptra objectiva, a. 106. *ocularis*, 106.
Dioptra telescopicæ cur adhibeantur, 108.
Dioptrarum telescopicarum positio quomodo examinetur, 131.
Dioptrica. Definitio, d. 1.
Dioptrica analytica, 487. & seqq.
Directio planetæ. Definitio, a. 531.
Discus Terræ. Definitio, 1013.
Disjuncta quando contigua videantur, o. 308. quando continua, 309. 310.
Distantia duorum punctorum in superficie spheræ, s. 54.
Distantiarum differentiæ quænam visu non dignoscantur, o. 250.
Distantia Cometæ a Terra quomodo inveniatur, a. 1147.
Distantia curtata. Definitio, 771. quomodo inveniatur, 789.
Distantia Lunæ a Terra quomodo variet, 556.
Distantia planetæ a Sole quomodo inveniatur, 812.

Distantia planetæ a Terra quomodo supputetur, a. 792.

Distantia Solis vera a Terra quomodo inveniatur, 894. & seqq.

Distantia Solis maxima & minima a Terra ubinam sit, 554.

Distantia Solis a nodo & apogæo lunari. Definitio, 841.

Distantia stellarum quomodo observetur, 225.

Dodecatemorion. Definitio, 188. E.

Eccentricitas. Definitio, a. 638. 639. *Eccentricitas in ellipsi*, 679.

Eccentricitas Lunæ constans, 835.

Eccentricitas Lunæ menstrua quomodo inveniatur, 847.

Eccentricitas orbitæ ellipticæ Telluris quomodo inveniatur, 810.

Eccentricitas planetarum quanta, 750.

Eccentricitas planetarum superiorum quomodo inveniatur in orbita circulari, 734. quomodo in elliptica, 813.

Eccentricitas planetarum inferiorum quomodo inveniatur, 749.

Eccentricitas Solis quomodo inveniatur, 675. 678. quanta sit, 682.

Eclipsis Lunæ. Definitio, a. 937. quomodo appareat, 458. quænam ejus causa, 459. quid sit, 461. cur ubivis ejusdem magnitudinis, 462. ejus magnitudo, 951. initium, medium, finis & duratio quomodo inveniatur, 971. typus quomodo describatur, 976. quomodo supputetur, 974. observetur, 977. 978.

Eclipsis Lunæ partialis. Definitio, 937. quando sit, 948.

Eclipsis Lunæ totalis. Definitio, 937. phænomena, 463.

Eclipsis Lunæ totalis cum mora. Definitio, 937. quando sit, 948.

Eclipsis Lunæ totalis sine mora. Definitio, 937. quando sit, 948.

Eclipsium lunarium termini necessarii. Definitio, 943. quomodo reperiantur, 944.

Mmm 3

Eclips.

Eclipsium lunarium termini possibiles. Definitio, a. 943. quomodo reperiantur, 944.
Eclipsis satellitum Jovis, a. 501. 505. 510.
Eclipsis Solis. Definitio, 982. quando accidat, 984. 985. quomodo appareat, 448. quænam ejus causa, 449. & seqq. cur non in omnibus locis eodem momento accidat, 1081. quomodo supputetur, 1008. observetur, 1010. o. 303. initium & finis, a. 1004. 1101. duratio quomodo inveniat, 1005. termini quomodo determinantur, 995. 996. typus quomodo describatur, 1007. ubi totalis videatur, 1075. 1079. ubi partialis, 1078. 1080. ubi nulla, 1077.
Eclipsis solaris totalis phænomena, 454.
Eclipsis Solis CHRISTO patiente num fuerit præternaturalis, 986.
Eclipsis Terræ. Definitio, a. 1011. quando detur, 1072. 1073. 1074. quomodo appareat Selenitis, 1037. termini quomodo reperiantur, 1081. initium & finis quomodo inveniat, 1085.
Ecliptica. Definitio, 157. divisio, 160. qualis sphaeræ circulus, 171. ejus situs, 172. & seqq.
Eclipticæ declinatio maxima quomodo observetur, 163. quanta observata fuerit, 165.
Ecliptica in disco Terræ. Definitio, a. 1059. situs in eodem, 1060.
Elevatio poli. Definitio, 99. quomodo inveniat, 200. quomodo observetur, 154. super disco Terræ cuinam æqualis, 1086.
Elevatio æquatoris. Definitio, a. 99. mensura, 100. quomodo observetur, 154. quomodo inveniat, 200.
Ellipsis quando instar circuli appareat, o. 281. quando in parabolam degeneret, a. 1163.
Ellipseos descriptio per data tria puncta, 809. proprietates quædam, 803. & seqq.
Engyscopium. Definitio, d. 401.

Epactæ. Definitio, a. 963. quomodo inveniantur, 965.

Epocharum Tabulæ quomodo construantur, 719. 754.

Epochæ motus medii & apogei Solis quomodo constituentur, 718.

F.

Faciem & tergum quomodo simul spectemus in speculo plano, c. 109. 128. 129.

Faculæ solares num dentur, a. 429.

Fasciæ in Jove observatæ, 499.

in Saturno observatæ, ibid.

Fenestrarum scenographia, p. 75.

Fenestrarum apertarum scenographia, 79.

Flamma e longinquo visa cur major appareat, quam in vicinia, o. 265. 266.

Flamma candelæ quando appareat rotunda, o. 307.

Figuræ apparentia per quænam detur, p. 31.

Figuræ visio, o. 272. & seqq.

Figuræ curvilineæ projectio quomodo fiat, pag. 35.

Figuræ mixtilineæ projectio, 36.

rectilineæ projectio, 34.

Figuræ rotunda obliqua seu ovalis quando instar circuli appareat, o. 282.

Figuræ vera polyoni regularis & circuli quando videatur, o. 286. quando non, 287.

Fixæ (stellæ) quomodo in asterismos distinguantur, a. 246. quænam semper appareant, quæ semper lateant, quomodo inveniat, 277. quo lumine fulgeant, 1119. quid sint, 1120. quantæ sint, 1121. an habeant planetas circa se, 1122. 1123. num habeant parallaxin sensibilem, 384. num sint Terra majores, 1109. num ultra Saturnum a Tellure distent, 1110. num inæqualiter a Terra distent, 1114. cur aliæ aliis minores appareant, 1115. num mutantur, 1129.

Fixæ in plures divisæ quænam subinde observentur, 543.

Fixæ per vices apparentes ac disparentes, 1124. & seqq.

Fixæ

Fixæ primæ magnitudinis quantæ per telescopium appareant, a. 1111.

Fixæ temporaria, 1117.

Fixarum aberrationes annuæ, 605. num parallaxis earum annua recte inde colligatur, 606. quanta hæc esse debeat, 607.

Fixarum distantia a Terra quomodo invenitur, 1116. quanta æstimeretur, 1117.

Fixarum mora supra horizontem quomodo invenitur, a. 268.

Fixarum magnitudines apparentes, 249.

Fixarum multitudo evicta, 1113.

Fixarum occultationes a planetis factæ, 542.

Fixarum a Luna occultandarum figura ovalis observata, 475. causa quænam sit, 476.

Focus. Definitio, d. 22. quomodo determinetur in lentibus convexis, 186. 217. 221. quomodo in meniscis, 298. quomodo in superficie spherica convexa, 89. 90.

Focus virtualis. Definitio, 23. quomodo determinetur in lente concava, 282. 290. quomodo in meniscis, 312.

Fulcrum telescopii longioris quomodo construatur, d. 382.

Fulguratio in medio disci Lunæ in eclipsi Solis totali observata, 454.

G.

Gemini, a. 160.

Globus cælestis. Definitio, a. 303. constructio, 305. 309. usus, 311. & seqq. quomodo ad cæli situm componatur, 316.

Globus descendens quomodo representari possit tanquam ascendens, c. 73.

Gnomonis astronomici constructio & usus, a. 137. & seqq.

Gravitas corporis num in omnibus Terræ locis eadem, 569. 570.

H.

Helioscopium. Definitio, d. 465. constructio, 467.

Hemisphærium quomodo totum ab oculo conspici possit, o. 427.

Hemisphærium australe, sive meridionale mundi, a. 52.

Hemisphærium boreale sive septentrionale mundi, a. 51.

Hemisphærium inferius cæli, 65. superius cæli, 64.

Homines num dentur in Luna, 488. num in planetis ceteris, 526.

Hora diei quomodo ex Solis altitudine eruatur, a. 216.

Horizon. Definitio, 61. quomodo a meridiano secetur, 84. quomodo a circulo verticali, 85.

Horizon apparens, sive sensibilis. Definitio, 66. proprietates, 67. poli ejus ubinam sint, 90.

Horizon occiduus. Definitio, 69. ortivus. Definitio, 68.

Horizon rationalis, sive verus. Definitio, 61. proprietates, 62. 63. situs, 86. poli ubinam sint, 60.

Horologii motus quomodo rectificetur, vel probeetur, 297.

Horopter. Definitio, o. 341.

Humor aqueus. Definitio, 33.

Humor crystallinus. Definitio, 34. figura, 35. 36. usus, 61. & seqq. effectus, 75.

Humor vitreus. Definitio, 37.

Hypothesis latitudinis Lunæ, a. 873.

Hypothesis Lunæ, 839. 84.

I.

Ianuarum in pariete scenographia, p. 73. *Ianuarum apertarum scenographia*, 77.

Ichnographia geometrica. Definitio, p. 23.

Ichnographia perspectiva, sive projecta. Definitio, p. 25. quomodo fiat, 33. & seqq.

Imago vilibilis qualis in oculo delineetur, o. 62. & seqq. quando clarior, 77. qualis sit in presbytæ oculo, 383. qualis in oculo myopis, 386.

Imaginis locus in speculo concavo, c. 232. & seqq. 253. & seqq. in speculo convexo, 166. 167. 168. in planis, 51. & seqq.

Imago qualis sit in speculo concavo, 252. & seqq. in convexo, 183. in cylindrico, 280. & seqq. in cylindricis cavis, 298. & seqq.

- seq. cur videatur in libero aëre*, c. 100. in speculis planis, 60. quanta sit in speculo concavo, 240. & *seqq.* in convexo, 155. 175. 178. 179. 180. qualis appareat per vitrum planum, d. 83. qualis post lentem convexam, o. 387. & *seqq.* d. 224. & *seqq.*
- Imago inversa post lentem convexam* quomodo sistatur erecta, c. 231. 233. 334.
- Imago lucidi cur multiplex videatur in speculo plano*, c. 88.
- Imago objecti* quomodo multiplicetur in speculis planis, c. 93. 100. 104. 106. 110. 112. 126. 127. quando verticalis appareat horizontalis & contra, 70. 71. quando infra horizontem situ inverso appareat, 57. 58. quando post speculum longius distare videtur, quam ante ipsum abest, 134. & *seqq.*
- Imago prototypo similis* quomodo mechanice delineatur, p. 110.
- Imago deformis* quomodo formosa restituitur per speculum cylindricum, c. 290. conicum, 301. pyramidale, 304.
- Imagines monstroſæ* quomodo in speculis planis exhibeantur, 112. 113. 114. 116.
- Inaqualia* quando appareant æqualia, o. 252. & *seqq.*
- Inaqualitas prima*. Definitio, 773.
- Inaqualitas secunda*, sc. motus planetarum, 775.
- Inaqualitas Lunæ prima seu soluta*, 823.
- Inaqualitas Lunæ altera seu menstrua*, 824. phænomena, 838.
- Inaqualitatis tertiæ in motu Lunæ phænomena*, 855.
- Inclinatio*. Definitio, a. 767. maxima quomodo observetur, 773. quanta sit in singulis planetis, 784.
- Inclinationum Tabulæ* quomodo construuntur, 785.
- Inclinatio incidentis radii*. Definitio, c. 22.
- Inclinatio limitis menstrui*. Definitio, a. 872. quomodo invenitur, 876.
- Inclinatio planorum* qualis, f. 97.
- Inclinatio radii reflexi*. Definitio, c. 23.
- Inclinatio viæ penumbrae*. Definitio, a. 1065. quomodo invenitur, 1066.
- Incolæ planetarum* num dentur, 527.
- Insulæ in Luna*, 480.
- Intensitas luminis*. Definitio, o. 81. quando non mutetur, 86. quomodo se habeat, 85.
- Intervallum planetæ*. Definitio, a. 640. quomodo invenitur, 685.
- Jovicola* quantæ magnitudinis, 527.
- Iris oculi*, o. 25.
- Jupiter*. Definitio, 3. quale sit corpus, 505. 524. similitudo cum Tellure, 525. motus vertiginis, 496. figura ovalis in occultatione per Lunam facta, 475. 476.
- Jupiter Jovialis*, 501.
- L.
- L** *Ateris species* in triangulo rectangulo sphaerico quomodo determinetur, f. 133.
- Laterna magica*. Definitio, d. 464. constructio, 470. quomodo in microscopium convertatur, 476. 477.
- Latitudo*. Definitio, a. 768.
- Latitudo Lunæ simplex*. Definitio, a. 865.
- Latitudo Lunæ vera*. Definitio, o. 867. quomodo invenitur, 880.
- Latitudo Lunæ visæ*. Definitio, 987. quomodo invenitur, 988. quomodo computetur in momento synodi visæ, 1000. quomodo invenitur initio & fine eclipsis Solis, 1006.
- Latitudo menstrua*. Definitio, 869. quomodo invenitur, 878.
- Latitudo planetæ* quomodo observetur, 559. quomodo invenitur, 795. quomodo supputetur, 814.
- Latitudo stellæ*. Definitio, 236. mensura, 237. 238. quomodo invenitur, 243. 261. quomodo invenitur ope globi, 312. an sit mutabilis, 251.
- Latitudo umbræ*. Definitio, 1053.
- Latitudo umbræ apparens*. Definitio, 1055. quomodo invenitur, 1056.

Lens. Definitio, d. 15.
Lentes causticae. Vide *Vitra caustica*.
Lentes causticae ex glacie confectae, 201.
Lentes convexae quomodo refringant lumen, 266. & seqq.
Lentes hyperbolicae num sphaericis praestent, 325.
Lentis convexae effectus, o. 73. 75.
Lentis obiectivae apertura in telescopio quomodo determinetur, d. 394. ejus necessitas, 395. 398.
Lentium plano-convexarum theoria, 166. & seqq.
Lentium utrinque convexarum theoria, 184. & seqq.
Lentium concavarum theoria, 179. & seqq.
Leo, a. 160.
Libra, 160.
Limites in orbita Lunae, 871.
Linea apparentia per quamam detur, p. 31.
Linea apsidum. Definitio, a. 636.
Lineae apsidum positio quomodo determinetur, 674. 754. 743. quomodo in orbita elliptica planetarum superiorum inveniatur, 813.
Linea brevissima quamam sit in superficie sphaerae, s. 53.
Linea distantiae. Definitio, p. 15. quamam sit, 16.
Linea fiduciae quamam dicatur, a. 107.
Linea fundamentalis. Definitio, p. 11.
Linea horizontalis in Perspectiva. Definitio, 17. qualis sit, 18.
Linea incidens. Definitio, c. 14.
Linea incidentiae. Definitio, d. 4.
Linea meridiana. Definitio, a. 81. situs, 82. quomodo inveniatur, 120. usus, 125. 128.
Linea obiectiva. Definitio, p. 27.
Lineae parallelae quando convergentes appareant, o. 227. & seqq.
Linea recta quando instar puncti appareat, o. 722.
Linea rectae apparentia qualis, p. 28.
Linea reflexionis. Definitio, c. 15.
Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

Linea refractionis. Definitio, d. 5.
Linea terrae. Definitio, p. 11.
Loca optica. Definitio, o. 334. theoria, 335. & seqq.
Loci visio, 308. & seqq.
Loci dati distantia a centro penumbrae quomodo inveniatur, a. 1099.
Locus ad eclipticam reductus. Definitio, 757. quomodo inveniatur.
Locus centricus planetae, 755.
Locus eccentricus in ecliptica. Definitio, 757.
Locus eccentricus in orbita. Definitio, 755. quomodo supputetur, 756.
Locus geocentricus. Definitio, 758.
Locus heliocentricus. Definitio, 757. quomodo ex geocentrico inveniatur, 812.
Locus imaginis in speculo ubinam sit, c. 41.
Locus imaginis in speculo concavo, convexo, 151. 152. 154. & seqq. plano.
Locus Lunae fictus. Definitio, a. 862. prope verus, ibid.
Locus verus, ibid. quomodo supputetur, 861.
Locus medius Solis quomodo inveniatur, 704.
Locus opticus. Definitio, 364.
Locus opticus apparens. Definitio, 365.
Locus opticus verus. Definitio, ibid.
Locus physicus sideris. Definitio, a. 363.
Locus Solis in ecliptica quomodo observetur, 203.
Locus Solis verus quomodo supputetur, 720. & seqq.
Locus Terrae. ubi Sol totus eclipsatus oritur vel occidit, quomodo determinetur, 1093.
Locus Terrae, ad quem pervenit centrum penumbrae quomodo determinetur, 1094.
Loca Terrae, quibus Sol oritur & occidit, in principio ac fine eclipsis terrestris quomodo determinetur, 1092.
Longitudines quamam visus comprehendere possit, o. 248. & seqq.
Longitudo Lunae visa. Definitio, a. 989.
N n n quo-

quomodo inveniatur, a. 990. 997.
Longitudo planetae quomodo observetur, 559.
Longitudo planeta vera quomodo supputetur, 814.
Longitudo stellæ. Definitio, a. 241. quomodo inveniatur, 243. 263. quomodo inveniatur ope globi, 312. quomodo ad datum annum computetur, 259.
Longitudo stellarum fixarum quomodo mutetur, 251. quando uno gradu augeatur, 258.
Lucerna lumen valde intensum projiciens quomodo construatur, d. 208.
Lumen. Definitio, o. 4. 5. quomodo propagetur, 45. 46. num unum officiat propagationi alterius, 99. & seqq. quomodo intendatur per lentes convexas, d. 203. & seqq. quomodo per specula concava, c. 224. & seqq. quomodo debilitetur per specula convexa, 191. & seqq. 195. per concava, 228. 229. quomodo in colores mutetur, o. 183. & seqq. quomodo reflectatur a speculis planis, 55. convexis, 144. & seqq. concavis, 208. & seqq. cylindricis, 277. 278. cylindricis concavis, 294. & seqq. ellipticis, 310. 311. quomodo refringatur in superficiebus planis, d. 49. & seqq. in lentibus convexis, 166. & seqq. utrinque convexis, 184. & seqq. concavis, 279. & seqq. sphaeris pellucidis, 178. & seqq. lentibus plano-convexis, 166. & seqq. superficiebus sphaericis, 87. & seqq.
Luminis a duobus luminosis propagati ratio, o. 104. & seqq.
Lumen propagatum per radios convergentes quomodo crescat, 89.
Lumen propagatum per radios divergentes quomodo decrescat, 87. 88.
Lumen album quod sit mixtum, o. 186.
Lumen coloratum solare immutabile, 201. & seqq.
Lumen diurnum unde, a. 407. 408,

Lumen Lunæ undenam sit, a. 461.
Lumen Solis quomodo reflectatur a speculis parabolicis, c. 306. & seqq. cur non intendatur per reflexionem a speculis planis, 66. quomodo refringatur in lentibus plano-convexis & convexo-convexis, d. 197. quomodo in colores mutetur, 271. 272. quomodo per lentem concavam debilitetur, 228.
Lumen Solis per foramen angulosum transiens quando figuram circuli assumat, 296. & seqq.
Luminis solaris per foramen radiantis figura qualis sit, o. 290. & seqq.
Luminis solaris radii heterogenei quomodo a se invicem separentur, 200.
Lumen zodiacale a quibusnam observatum, a. 436. 440. quid sit, 437. & seqq. 441. & seqq.
Luna quale sit corpus, a. 453. 469. 479. unde lumen habeat, 460. cur sit luminare magnum, 457. ex qua materia constet, 484. an semper æque distincte videatur, 473. an Terræ semper eandem faciem obvertat, 1103. quod Telluri propior quam Sol, 452. quando in umbram Terræ incidat, 940.
Lunæ ætas media quomodo inveniatur, 959. 966.
Lunæ diameter apparens quomodo observetur, 548. quanta sit, 549.
Lunæ distantia a Terra quomodo inveniatur, 888. 889. quanta sit, 893.
Lunæ eclipsatæ colores, 463. eorum causa, 464. causa diversitatis, 465. 466.
Lunæ illuminatio quomodo fiat, 455. 456. ejus causa, 460. a Terra facta, 914.
Lunæ magnitudo, 915.
Lunæ montes, valles & maria, 479.
Lunæ motus proprius quomodo innotuerit, 23. 24.
Lunæ orientis & occidentis figura ovalis seu elliptica, 475. ejus causa, 476.
Lunæ similitudo cum Tellure, 487.
Lunatio, Definitio, a. 817.

Luna Jovialis, a. 501.

Lunula. Definitio, d. 20.

Lux. Definitio, o. 4. 5.

Lux clarior quibusnam conducatur ad videndum, 396.

Lux debilior quibusnam conducatur ad videndum, 395.

Lux nimia quod visui officiat, 390.

M.

M*achina anamorphotica cylindrica*, c. 293. conica, 302.

Machina catoptrica, in qua objecti imago multiplicatur, 137. in qua una multiplicatur & deformatur, 118.

Machina catoptrico-dioptrica. Definitio, d. 458.

Machina hydromantica, in qua imago spectatori pro arbitrio oculis subduci & adduci potest, d. 86.

Machina politoria quomodo construatur, c. 48. d. 539.

Maculae Lunae quales observentur, a. 468.

Maculae Lunae novae, 468. quales sint, 472.

Macularum Solis phaenomena, 411. theoria, 412. & seqq. motus, 422. undenam prodeant, 416. quid sint, 417. quomodo observentur, 427.

Macula Veneris, 494.

Magis myops quinam dicatur, d. 480. qualia ei convenient perspicilla, 482.

Magis presbyta quinam dicatur, 520. qualia ei convenient perspicilla, 522. quomodo determinentur, 523.

Magnitudo quando in vicinia minor appareat, quam in distantia remotiori, o. 254.

Magnitudinis visio, 209. & seqq.

Magnitudo apparens. Definitio, 208.

Magnitudinum apparentium theoria, 212. & seqq.

Manus sine corpore quando appareant in speculo plano, c. 113.

Maria in Luna num dentur, a. 479.

Mars. Definitio, 34. quale corpus, 524. similitudo cum Tellure, 525. phases, 491. motus vertiginis, 496. distantia

a Terra, a. 899.

Mediatio caeli. Definitio, 272. quomodo inveniat, 273. quomodo ope globi inveniat, 315.

Medius motus Solis quomodo inveniat, 672.

Mediorum motuum Solis Tabulae quomodo construuntur, 673.

Mediorum motuum planetarum superiorum Tabulae quomodo construuntur, 733.

Mediorum motuum planetarum inferiorum Tabulae quomodo construuntur, 753.

Mediorum motuum Lunae Tabulae quomodo construuntur, 827.

Meniscus. Definitio, d. 20. theoria, 295. & seqq. quando æquipolleat lenti utrinque æqualiter convexæ, 301. 302. quando plano-convexæ, 304. 305. quando sphaeræ, 306. 307. quando utrinque concavæ, 315. 316. quando plano-concavæ, 317. 318. quæ nam sit lens caustica, 324.

Menisci ellipticae & hyperbolicae num præstent sphaericis, 325.

Menisci improprie quænam dicantur, 322.

Menisci proprie quænam dicantur, 322.

Mensis anomalisticus. Definitio, a. 818. quantitas quomodo inveniat, 832.

Mensis draconicus. Definitio, 819. quantitas quomodo inveniat, 831.

Mensis periodicus. Definitio, 816. quantitas, 835. quomodo ea inveniat, 825.

Mensis synodicus. Definitio, 817. quantitas, 835. quomodo ea inveniat, 825.

Mercurius. Definitio, 36. phases, 491. 538. in Sole observatus, 492. num circa axem gyretur, 498.

Mercurii digressiones maxima a Sole quomodo observentur, 740.

Mercurius Jovialis, 507.

Meridianus. Definitio, 72.

Meridianorum differentia horaria quomodo inveniat, 979.

Meridianus universalis. Definitio, 1087. positio super disco Terræ quomodo inveniat, 1089.

N n n 2

Meri-

Meridiei momentum quomodo observetur, a. 124.
Micrometri constructio & usus, 544. & seqq.
Microscopium. Definitio, d. 401. quomodo optima parentur, 456.
Microscopii aquei constructio, 456.
Microscopium compositum. Definitio, 405. constructio, 439.
Microscopii reflectentis constructio, 452. inventor, 453.
Microscopium simplex. Definitio, 404. theoria, 407. & seqq. constructio, 421.
Microscopia simplicia ex sphaerulis constantia quomodo fiant, 431. theoria, 423. & seqq. constructio, 434.
Minus presbyta quinam dicatur, 520. qualia ei convenient perspicilla, 522. quomodo determinentur, 523.
Mobilia quando quiescere videatur, o. 361. & seqq. 374. quando retrogradi, 368.
Modulus pro speculis sphaericis concavis fundendis quomodo paretur, c. 199.
Monoculus quando quis appareat in speculo plano, c. 113.
Montes in Luna num dentur, a. 479.
Montium lunarium altitudo quomodo inveniat, 917. nomina, 918. umbræ, 483.
Montes in Venere observati, 493.
Motus visio, o. 354. & seqq.
Motus anomalie quid sit, a. 820.
Motus aphelii Tabula pro planetis superioribus quomodo construantur, 737. quomodo pro inferioribus, 746.
Motus apogei lunaris diurnis, 835.
Motus communis sive diurnus, 21.
Motus horarius Lunæ & Solis verus quomodo inveniat, 968.
Motuum horariorum Lunæ & Solis verorum Tabula quomodo construantur, 969.
Motus horarius in eclipsi terrestri. Definitio, 1068.
Motus horarius Lunæ a Sole visus. Defini-

tio, a. 994.
Motus imaginis in speculo plano, c. 95. & seqq.
Motus latitudinis Lunæ diurnus, a. 836.
Motuum latitudinis Tabula pro Luna quomodo construantur, 832.
Motus librationis. Definitio, 1104. causa, 1106.
Motus Lunæ ab apogeo diurnus, 836.
Motus Lunæ a Sole quid sit, 820. quomodo inveniat, 828.
Motus Lunæ a Sole visus quomodo inveniat, 998.
Motus Lunæ in latitudinem quid sit, 820.
Motus lunaris phenomena, 821. 822.
Motus medius. Definitio, 643. quidnam ad eum determinandum requiratur, 644.
Motuum mediorum Tabula quomodo construantur, 673. 827.
Motus medius Lunæ diurnus, 835.
Motuum nodorum Tabula quomodo construantur, 779.
Motus nodi Lunæ diurnus, 835.
Motus periodicus in longitudinem quid sit, a. 820.
Motus planetarum phenomena observata, 562. & seqq. demonstrata, 571. & seqq.
Motus primus. Definitio, a. 21. primi mobilis, 21.
Motus proprius, sive secundus. Definitio, 30.
Motus proprius fixarum qualis sit, 252. quantitas annua quomodo inveniat, 255.
Motus vertiginis Lunæ, 1107. Solis, 422. 423. planetarum, 496. & seqq.
Motus verus. Definitio, 645.
Mundus num in Astronomia pro sphaera cava haberi possit, cujus superficiei stellæ affixæ, 18.
Myops. Definitio, o. 384. quinam sit, 401. 402. cur in luce minore legere possit quam presbyta, 408. cur legat scripturam minutam, 426. cur remota in speculo

culo convexo distinctius videat, quam directè, c. 193. qualia perspicilla ei convenient, d. 479. quomodo hæc determinentur, 483. 485. quomodo se ligantur, 525.

N.

Nodis longitudo quomodo inveniatur, a. 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.

Nodus. Definitio, 765.

Nodus australis, 765.

ascendens, ibid.

borealis, ibid.

descendens, ibid.

Nodi planeta quomodo observentur, 777.

Nodorum planetarum locus ad A. 1700. 780. motus quomodo inveniatur, 778.

Nodus orbitæ cometæ quomodo inveniatur, 1138.

Nodi Lunæ quomodo moveantur, 830. eorum locus quomodo inveniatur, 829.

Nonagesimus. Definitio, 220.

Novilunium medium quomodo supputetur, 959. 967. ejus epocha quomodo inveniatur, 960.

Novilunium verum quomodo supputetur, 970.

O.

Objectum quodnam videatur, o. 47. ubi videatur, 58.

Objectum oculo testum quando videatur in speculo plano, c. 132.

ad *Objectum procul remotum* quando nunquam perveniatur, o. 370.

Objectum totum quando visu comprehendatur, 237. quando non, 238.

Objectum valde minutum quando distinctius videatur, 425.

Objectum verum per polyedrum visum quomodo discernatur ab apparentibus, d. 274.

Obliquitas eclipticæ quid & quanta sit, a. 178.

Observationes astronomicae. Definitio, 5.

Observationes communes, a. 4.

Occasus siderum. Definitio, 19.

Occasus acronychus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 285.

Occasus cosmicus. Definitio, 278. quomodo inveniatur, 285. quomodo ope globi inveniatur, 319.

Occasus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi inveniatur, 331.

Occasus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi inveniatur, 320.

Occasus stellæ fixæ quomodo inveniatur, 270. quomodo ope globi inveniatur, 322.

Offilis, 911.

Oculus. Definitio, o. 16. 17. structura explicata, 78. quantum uno obtutu capiat spatium, 235. 236. quando ad objectum accedens & ab eodem recedens objectum idem semper videat sub eadem magnitudine, 232. 233.

Oculi artificialis constructio, 79.

Oculus valens quinam dicatur, 379. quinam sit, 404. 405. 406.

Oppositio planetarum. Definitio, a. 536. 528. signum, 929.

Oppositio planetarum superiorum & Solis quomodo observetur, 727.

Oppositio visibilis directæ. Definitio, o. 267. obliqua, ibid.

Optica. Definitio, o. 1. significatus latior, 2.

Orbitæ cometarum quales sint, a. 1164. 1165. 1166.

Orbitæ planetarum ellipticæ quomodo primum detectæ, 681. earum axis minor quomodo inveniatur, 696. & seqq.

Orbita Solis a circulari parum differt, 676.

Orbitalium dimensiones in semidiametris terrestribus quomodo inveniuntur, 907. quantæ sint, 908.

Ortus siderum. Definitio, a. 19.

Ortus acronychus. Definitio, 279. quomodo inveniatur, 284.

Ortus cosmicus. Definitio, 278. quomodo inveniatur, 319.

inveniat, *a.* 283. quomodo ope globi inveniat, 319.

Ortus heliacus. Definitio, 280. quomodo inveniat, 293. quomodo ope globi reperiatur, 331.

Ortus Solis quomodo computetur, 214. quomodo ope globi reperiatur, 318.

Ortus stellæ fixæ quomodo inveniat, 271. quomodo ope globi inveniat, 322.

P.

P*arallaxis.* Definitio, *a.* 367. theoria, 379. & seqq. quomodo altitudinem immutet, 368. quid proprie sit, 369. ubi nulla, 328. quomodo ascensionem & descensionem rectam & obliquam, declinationem, latitudinem & longitudinem mutet, 372.

Parallaxis altitudinis quomodo inveniat, 388. quomodo cometæ, 1145. quomodo Lunæ, 887.

Parallaxis ascensionis. Definitio, 375. quomodo inveniat, 390.

Parallaxis ascensionis rectæ fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.

Parallaxis declinationis. Definitio, 374. quomodo inveniat, 390.

Parallaxis declinationis fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.

Parallaxis descensionis. Definitio, 375. quomodo inveniat, 390.

Parallaxis latitudinis. Definitio, 377. quomodo inveniat, 390. 391.

Parallaxis latitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.

Parallaxis longitudinis. Definitio, 376. quomodo inveniat, 390. 391.

Parallaxis longitudinis fixarum. Definitio, 596. qualis inveniat, 598. 599.

Parallaxis fixarum annua. Definitio, *a.* 596. quinam eam observare tentaverint, 600. & seqq. quanta sit, 608.

Parallaxis fixarum absoluta. Definitio. *a.* 596. an semper eadem, 597.

Parallaxis horizontalis quomodo inve-

niatur, *a.* 387.

Parallaxis horizontalis Lunæ quanta sit, 891.

Parallaxium horizontalium Lunæ Tabulæ quomodo construuntur, 891.

Parallaxis horizontalis Solis quomodo inveniat, 895.

Parallaxis Lunæ a Sole. Definitio, 99. quanta sit, 992.

Parallaxis Martis diurna quomodo observetur, 897. & seqq.

Parallaxis Orbis. Definitio, 763. 776. mensura, 764. quomodo supputetur, 792.

Parallaxis Veneris diurna quomodo observetur, 897. & seqq.

Parietum scenographia, *p.* 71.

Paræ media quænam dicatur in Trigonometria spherica, *f.* 92.

Partes conjunctæ triangulorum sphericorum quænam dicantur, 93.

Partes laterales quænam dicantur in triangulo spherico, *f.* 135.

Partes sejunctæ trianguli spherici quænam dicantur, 95.

Particula exsors. Definitio, *a.* 844. quomodo inveniat, 850.

Pavimentum lapidibus stratum quomodo projiciatur, *p.* 46.

Penduli ad singula minuta secunda oscillantis longitudo quomodo in diversis Telluris locis se habeat, *a.* 567.

Peninsula in Luna, 480.

Pentagoni regularis projectio, *p.* 49.

Penumbra. Definitio, *a.* 1039. quantum spatium in Terra occupet quomodo determinetur, 1058. via ejus quomodo in globo terrestri vel mappa geographica delineetur, 1095.

Perigæum. Definitio, 635.

Perihelium. Definitio, 635. quomodo locus ejus observetur, 674.

Perihelii Telluris locus quomodo inveniat, 810.

Periodis planetarum circa solem quantæ in singulis, 732. 752. 800.

Perpen-

- Perpendicularia* quando in speculo convexo videantur eversa, c. 182.
- Perspectiva*. Definitio, p. 1.
- Perspicilla*. Definitio, d. 478. qualia myopibus convenient, 479. 482. qualia presbytis, 519. quomodo seligantur, 525.
- Phases Lunæ* quomodo se habeant, a. 455.
- Pilarum scenographia*, p. 71.
- Pisces*, a. 160.
- Planeta*. Definitio, 31. quomodo dignoscantur, 37. signa, 38. quomodo moveantur circa Solem, 633. 634. quomodo secunda inæqualitate exuantur, 812. quomodo locus eorum in globo dato tempore exhibeatur, 314. quinam Soli opponantur, 537.
- Planetarum distantia a Sole* quomodo reperiantur, 796. quantæ sint, 797. 904.
- Planetarum distantia a Terra* quomodo inveniantur, a. 903. quantæ sint, 904. & seqq. num varient, 550. & seqq.
- Planetarum motus proprius* quomodo innotuerit, 28. 29.
- Planetarum occultationes*, 541.
- Planetarum orbita* quomodo se habeant respectu Terræ, 590.
- Planetarum ratio ad Terram* quoad superficiem & soliditatem, 921. 922.
- Planetarum semidiametri veræ* quomodo inveniantur, 919. quantæ sint, 920.
- Planeta directus* quando dicatur, 534. retrogradus, 534. stationarius, 534.
- Planeta inferiores* quinam dicantur, 489. eorum revolutio circa Solem quomodo inveniantur, 731.
- Planeta primarii*. Definitio, 529. quinam sint, 631.
- Planeta secundarii*. Definitio, 529. quinam sint, 631.
- Planeta superiores*. Definitio, 489. revolutio circa Solem quomodo inveniantur, 729.
- Planta* num dentur in Luna, 488.
- Planum* quomodo refringat lumen, d. 49. & seqq.
- Planum geometricum*. Definitio, p. 8. horizontale, 9. horopteris, 343. objectivum, 27. perspectivum, 7. refractionis, d. 8. verticale, p. 10.
- Plenilunium medium* quomodo supputetur, a. 959. 967.
- Pleniluniorum mediorum epocha* quomodo inveniantur, 961.
- Plenilunium verum* quomodo supputetur, 970.
- Polemoscopium*. Definitio, d. 460. constructio, 468.
- Poli circuli in sphaera*. Definitio, f. 12.
- Poli eclipticæ distantia a polo mundi*, a. 178.
- Poli meridiani* ubinam sint, 87. qualia sint puncta, 88.
- Poli Mundi*. Definitio, 46. num sint mutabiles, 132. num in eadem revolutione mutantur, 114.
- Poli sphaera*. Definitio, f. 11.
- Polyedrum* quidnam dicatur in Dioptrica, d. 262. ejus theoria, 263. & seqq. usus in camera obscura, 276.
- Polyoptrum*. Definitio, 466. constructio, 470.
- Presbyta*. Definitio, o. 381. quinam sit, 398. 399.
- Prismatis scenographia*, p. 56. scenographice delineati umbra, 85.
- Prismatis cavi scenographia*, 70.
- Prismatis in aëre penduli umbra*, 92.
- Prismatis quinquangularis cavi scenographia*, 59.
- Profunditas*. Definitio, a. 73. mensura, 94.
- Profunditas vera*, 73. apparens, 73.
- Profunditatis poli mensura*, 96.
- Profunditas Solis* quomodo observetur, 287. quomodo sub finem crepusculi vespertini

vespertini & initium matutini invenia-
tur, a. 397.
Projectio. Definitio, p. 22.
Projectio lineæ, plani, solidi, ibid.
Projectio monstrosa. Vide Anamorphosis.
Promontoria Lunæ, a. 481.
Proportionalium quætitatum symptoma
 quoddam, f. 145.
Prosthaphæresis. Definitio, 652.
Puncta accidentalæ quænam in Perspectiva
 dicantur, p. 80.
Puncta æquinoctialia. Definitio, a. 158.
 ubinam sint, 177.
Puncta solstitialia. Definitio, 159. ubinam
 sint, 177. quomodo sibi invicem oppo-
 nantur, 169. 170. quanto intervallo
 distent ab æquatore, 176.
Punctum æstivum. Definitio, 159.
 autumnale, 158.
 brumale, sive hibernum, 159.
Punctum concursus. Definitio, d. 22. in
 superficiebus planis, 73. & seqq. quo-
 modo in his determinetur, 76. in su-
 perficie cava, 111. & seqq. quomodo in
 hac determinetur, 113. quomodo in
 superficie spherica cava, 145. quomo-
 do in convexa, 122. 155.
Punctum dispersus. Definitio, 23. in super-
 ficiebus planis, 56. & seqq. in vitris
 planis, 57. & seqq. in superficie conca-
 va, 104. & seqq. in superficie spherica
 concava, 139. in superficie spherica
 convexa, 96. & seqq. 121. 128. 133.
Punctum distantie. Definitio, p. 19.
Punctum eclipticæ, cum quo stella culminat,
 quomodo determinetur, a. 232. quo-
 modo inveniat, cum quo oritur, 282.
Punctum incidentiæ. Definitio, c. 13. d. 7.
Punctum objectivum. Definitio, p. 27. ap-
 parentia quomodo exhibeatur, 33.
Punctum oculi, sive visus. Definitio, 13.
 ubinam sit, 14.
Punctum oriens eclipticæ quomodo com-
 putetur, a. 218.
Punctum principale, p. 13.

Punctum radians. Definitio, o. 8.
 reflexionis, c. 13.
 refractionis, d. 7.
 suboculare, c. 283.
 verticale, a. 58. 59. 60.
 venale, 158.

Pupilla. Definitio, o. 26. magnitudo va-
 riabilis, 55. & seqq. qualis in oculo va-
 lente, 394.

Pyramis optica. Definitio, p. 4.

Pyramidis basi insistentis scenographia, 61.

Pyramidis scenographice delineatæ umbræ,
 88. 90.

Pyramidis truncatæ scenographia, 65. 67.

Q.

Quadrantis astronomici constructio,
 a. 106.

Quadrati apparentiæ quomodo invenian-
 tur, p. 40. 42. 44.

Quadratum quando instar trapezii appa-
 reat, o. 283.

Quadratum geometricum quale sit instru-
 mentum & quomodo construatur,
 172. usus, 174. & seqq.

Quadratus quinam ad spectus dicatur, a.
 928. ejus signum, 929.

Quies mobilis apparens, o. 361. & seqq. 374.

Quiescens quando moveri videatur, 366.

374 quando in plagam contrariam mo-
 veri videatur, 369. 376. & seqq.

Quincunx quinam ad spectus dicatur, a. 931.

R.

Radices motus Solis medii & apogæi quo-
 modo constituentur, a. 718.

Radicum mediorum motuum & aphelii pro
planetis superioribus Tabulæ quomodo
 constituentur, 736.

Radicum nodorum Tabulæ quomodo con-
 struantur, 779.

Radiare quando visibile dicatur, o. 13.
 quænam corpora radient, 14. quomo-
 do radient, 59. 60.

Radiaturæ locus. Definitio, 15.

Radii colorati, rubens, flavus &c. Definitio,
 177. num mutantur per reflexionem, 187.

Radii

Radii divergentes quando haberi possint pro parallelis, o. 93. 94. quando in pupillam fere paralleli incidant, 95.

Radii obliqui in superficie cava, d. 139. & seq. in convexa refractione, 121. & seq.

Radii optici. Definitio, p. 5.

Radii paralleli quomodo in plana superficie refringantur, d. 49. quomodo in cava, 104. quomodo in convexa, 87. & seqq.

Radiatorum divergentia, o. 49.

Radius luminis. Definitio, o. 6.

Radius directus, 7.

incidens, c. 14. d. 4.

Radius obliquus quomodo refringatur, d. 56. & seqq.

Radius perpendicularis cur intensior obliquo, o. 84.

Radius reflexus. Definitio, c. 15. refractus, d. 5.

Rectangulum quando instar trapezii appareat, o. 283.

Reductio ad eclipticam. Definitio, a. 770. quomodo inveniatur, 786.

Reductionum Tabulae quomodo construantur, 787.

Reflexibilitas radiatorum. Definitio, o. 181. major, 182. minor, ibid.

Reflexibilitas radiatorum diversa evicta, 195. & seqq.

Reflexionis lex, c. 24. & seqq.

Reflexio luminis. Definitio, 38. evicta, 50. 53. 54. quid dicatur in theoria Lunæ, a. 857.

Refrangibilitas radiatorum. Definitio, o. 179. major, 180. minor, ibid.

Refrangibilitas radiatorum diversa evicta, 190. & seqq.

Refractio. Definitio, o. 39. evicta, 54. in vitro qua lege fiat, d. 25. 26. in aqua, 28. in spiritu vini & aëre, ibid.

Refractionis lex prope vera, d. 33. 34. 39. vera, 25. & seqq. 42.

Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

Refractionis lex quomodo per experimenta detegatur, d. 24. quomodo a priori analytice, 36.

Refractionum Tabula, a. 349.

Refractio luminis in atmosphæra, a. 334. quod augeat altitudinem Solis & stellarum, 335. quomodo mutet ascensionem rectam, obliquam, declinationem, 352. longitudinem item & latitudinem, 353. num sit in dato loco constans, 341. ubi maxima, 344. quomodo decreascat versus zenith, 344. an eadem in Sole & stellis, 345. quomodo observetur, 347.

Refractio altitudinis. Definitio, 355.

Refractio ascensionis & descensionis. Definitio, 356. quomodo inveniatur, 360.

Refractio declinationis. Definitio, 356. quomodo inveniatur, 360.

Refractio latitudinis. Definitio, 359. quomodo inveniatur, 361.

Refractio longitudinis. Definitio, 358. quomodo inveniatur, 361.

Regula catholica Trigonometriæ sphericæ, s. 112.

Regula sinuum catholica in Trigonometria, 101. 102.

Regula tangentium catholica in Trigonometria, 109. 110.

Remotiora quando appareant sublimiora, o. 318. 319. 323. quando depressiora, 321. 322. 325. quomodo appareant ad dextram vel sinistram sita, 330. 331.

Remotius quando tardius moveri videatur, 354. quando eadem celeritate, 355.

Remotorum visio qualis sit, 314.

Representatio. Definitio, p. 22.

Rerum super pavimento elevatarum scenographia, 76.

Retina, o. 30.

Retrogradatio mobilis apparens, o. 368.

Retrogradatio planetæ. Definitio, a. 533. explicata, 587. 588. 591. 592.

Revelatio planetarum circa Solem quomodo determinetur, 719. 751. 782.

S.

Satellites planetæ. Definitio, a. 489. distantia veræ a suis primariis quomodo inveniuntur, 923.
Satellites Jovis a quonam fuerint detecti, 500. qualia sint corpora, 504. quales sint planetæ, 530.
Satellitum Jovis figura, 509. maculæ, 510. atmosphæra alterabilis, 511. tempora periodica quomodo inveniuntur, 882. eclipses, 502. 505. distantia a Jove, 924.
Satellites Jovis spurii, a. 519. qualia sint corpora, 523.
Satellites Saturni, 519. quomodo observati, *ibid.* quales sint planetæ, 530.
Satellitum Saturni distantia a Saturno, 884. 925. eclipsis, 520. 521. tempora periodica quomodo inveniuntur, 882.
Saturnus. Definitio, 32. quale corpus, 523. 524. num circa axem gyretur, 498.
Saturni facies qualis observetur, 513. 514. similitudo cum Tellure, 525. a Luna occultandi figura ovalis, 475. hujus causa, 476.
Saturnus Jovialis, 501.
Scenographia. Definitio, p. 26. quomodo fiat, 55. & seqq.
Scenographia mechanica, 87.
Sclerotica tunica. Definitio, o. 21. cur sit tenax, 22.
Scorpius, a. 160.
Scrupula defectus. Definitio, 949. quomodo inveniatur pro Luna, 951. quomodo pro Sole, 1001.
Scrupula dimidiæ durationis. Definitio, 952. quomodo inveniuntur in eclipsi lunari, 956. quomodo in solari, 1003.
Scrupula dimidiæ moræ. Definitio, 953. quomodo inveniuntur, 957.
Scrupula emersionis. Definitio, 955. quomodo inveniuntur, 958.
Scrupula incidentiæ, sive casus. Definitio, 954. quomodo inveniuntur, 958.
Scrupula mensura longitudinis. Definitio,

a. 842. quomodo inveniuntur, 848.
Scrupula latitudinis. Definitio, 871.
Sectio quid dicatur in Perspectiva, p. 6.
Sectio obliqua conici scaleni quando circulus, f. 151.
Sectio obliqua cylindri qualis sit, c. 276.
Sectoris circuli ad aream circuli ratio, a. 683.
Semidiametri apparentes Lunæ & Solis quomodo ad datum tempus inveniuntur, 972.
Semidiametrorum apparentium Lunæ & Solis Tabulæ quomodo construuntur, 973.
Semidiameter apparens penumbrae. Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.
Semidiameter apparens Terræ in Luna vel planeta quanta sit, 1015. quod in Sole insensibilis, 1118.
Semidiameter penumbrae. Definitio, 1050.
Semidiameter Solis quomodo in camera obscura inveniatur, o. 306.
Semidiameter umbrae Lunaris apparens, a. 1029. quomodo inveniatur, 1030.
Sesquadrus quinam ad spectus dicatur, 931.
Sesquadrus quinam sit ad spectus, 931.
Sextilis. Definitio, 928. signum, 929.
Sidera Medicea, 501.
Sidera Urbanoſtaviana, 519.
Signum cæleste. Definitio, 160.
Signorum cælestium nomina, *ibid.*
Signa æstiva quænam sint, 161.
 australia, sive *meridionalia*, 162.
 autumnalia, 161.
 borealia, seu *septentrionalia*, 162.
 vernalia, *ibid.*
Sinus & arcus differentia quomodo inveniatur, a. 695.
Sinus summæ duorum arcuum quadrante minorum ratio ad sinum differentia eorundem, f. 143.
Sinus totius ratio ad tangentem & cotangentem, 104.
Sinuuum versorum ratio, a. 659. 660.
Sirius num in speculo convexo sub aquis videatur in diebus canicularibus, c. 177.
Situs

Situs visibilis quando erectus, o. 346.
quando inversus, 347.
Sol qualis sit substantia, 431. num ignis purus, 434. an mutationibus obnoxius, 421. cur sic luminare magnum, 409. quomodo in verticali primario observetur, 127. in quonam semicirculo eclipticæ diutius commoretur, 655. 656.
Sol quid dicatur in oculo, o. 25.
Solis in quatuor eclipticæ quadrantibus mora, a. 668. ad Terram ratio quoad soliditatem & superficiem, 916.
Solis diameter apparens quomodo observetur, 547. 548. qualis observetur, 549.
Solis distantia a Terra quomodo inveniat, 894. quanta sit, 896.
Solis figura qualis sit, 425. 435.
Solis locus in ecliptica quomodo observetur, 203.
Solis motus proprius quomodo innotuerit, 26. 27. quomodo observetur, 155. 156.
Solis orientis & occidentis figura ovalis seu elliptica, 475. ejus causa, 476.
Solidi cujuscunque scenographia, p. 56.
Soliditatum planetarum ratio ad soliditatem Solis quomodo inveniat, a. 910. qualis sit, 911.
Solstitium. Definitio, a. 159. quomodo observetur, 657. 666.
Solstitium æstivum, 159.
 brumale, ibid.
Spatia amplitudinem visus in diversis distantiiis definitientia quomodo se habeant, o. 243. 244.
Specillum. Definitio, d. 15.
Specularia. Definitio, c. 1.
Speculum. Definitio, 3. theoria analytice investigata, 312. & seqq.
Speculum planum. Definitio, 5. phænomena, 51. & seqq. cur lumen Solis non intendat, 66. quantum esse debeat, ut te integrum in eo contuearis, 77. 80. item objectum quodcunque aliud, 78. 84. quomodo poliatur, 43. & seqq. quomodo conficiatur, 49.

Speculum cavum. Definitio, c. 7. proprietates & symptomata, 208. & seqq. quomodo ex metallo paretur, 201. & seqq. quomodo vitreum terminetur, 207.
Speculum chalybeum quodnam dicatur, 203.
Speculum conicum. Definitio, 10. quomodo fiat, 142. 262. usus in anamorphosis, 301.
Speculum convexum. Definitio, 6. phænomena, 144. & seqq. usus in Arte pictoria, 176. quomodo fiat, 140.
Speculum cylindricum. Definitio, c. 9.
Speculum cylindricum convexum. Definitio, 9. theoria, 266. & seqq. 277. 278. quomodo fiat, 262.
Speculum cylindricum concavum. Definitio, 9. theoria, 224. & seqq.
Speculum ellipticum. Definitio, 12. cur difficillime paretur, 263. quomodo lumen in foco uno positum reflectat, 310. 311.
Speculum hyperbolicum. Definitio, c. 11. cur difficillime paretur, 142.
Speculum metallicum quomodo fiat, 201. quomodo poliatur, 204.
Speculum parabolicum. Definitio, 11. quomodo lumen Solis reflectat, 306. cur sit ustiorum præstantissimum, 307. cur difficillime paretur, 263.
Specula prismatica vitrea quomodo fiant, 142.
Specula pyramidalia quomodo fiant, 142. 262. usus in anamorphosis, 304. & seqq.
Speculum sphericum. Definitio, 8.
Specula ustoria quænam sint, 214. theoria, 209. & seqq. 215. & seqq. phænomena, 221. inter alia celebria, 220. 221. *Tschirnhusiana*, 221. quomodo ex ligno, gypso, charta, stramine & auro strepero parentur, 219.
Sphæra. Definitio, s. 6. proprietates & symptomata, 13. & seqq. quando instar circuli appareat, o. 277.
Sphære illuminatio quomodo se habeat, o. 111. & seqq. pars illuminata quomodo

modo inveniatur, o. 115. & seqq.
Sphæra pars quanta videatur, 246. 247.
Sphæra pars hemisphærio major quando ab oculo videri possit, 418. quando minor, 429.
Sphærarum theoria refractionis, d. 178. & seqq.
Sphæra activitatis luminis quomodo augeatur, o. 108. 109.
Sphæra armillaris, a. 189.
Sphæra mundana num motu æquabili moveatur, 135. 136.
Sphærica. Definitio, f. 1.
Statio planetæ. Definitio, a. 532. explicata, 587. 588.
Stelle erraticæ. Definitio, 31.
Stelle fixæ. Definitio, 25. quomodo interdiu observentur, 230. beneficio globi cognoscantur, 317.
Stellarum distantia quomodo observentur, 225. distantia a Terra æqualis quod appareat, 8. distantia a vertice num ob motum annum Telluris mutetur, 594. num hæc variatio cum parallaxi annua conveniat, 600. revolutio diurna num constantis magnitudinis, 110. mora supra & infra horizontem quomodo computetur, 268. quomodo ope globi inveniatur, 322.
Stelle novæ quænam sint, 1127. 1128.
Subocularis quænam linea dicatur, c. 283.
Superficies quando instar lineæ appareat, o. 273.
Superficies Lunæ quomodo se habeat ad superficiem Terræ, a. 913.
Superficies planetæ quomodo se habeat ad superficiem Solis, 911. quomodo ratio hæc inveniatur, 910.
Superficies refringens. Definitio, d. 6.
Synodus. Definitio, a. 535.
Systema Copernicanū quodnam dicatur, 632.
Systema planetarium. Definitio, 528. explicatum, 630.
Systema Terræ motæ an Scripturæ adversum, 626. 627.

Systema Terræ quiescentis num in Astronomia & Physica usui sit, a. 621.

Systema Tychonicum quodnam dicatur, 632. T.

T *Abula* quid dicatur in perspectiva, p. 6.
Tabularum astronomicarum nova forma, a. 723.

Tabula latitudinaria quænam dicantur, 791.

Tangentium ratio, 794.

Taurus, 160.

Telescopium. Definitio, d. 326. inventor, 327. quomodo in microscopium convertatur, d. 454. 455. quomodo longius a tubi molimine liberetur, 383. quantum augeat objecta, quomodo observetur, 329.

Telescopium astronomicum. Vide *Tubus astronomicus*.

Telescopium terrestre Vide *Tubus terrestris*.

Telescopium catadioptricum in usum observationum cœlestium quomodo construatur, d. 385.

Tempus, quo arcus æquatoris per meridianum transit, quomodo computetur, a. 211. quo stella culminat, quomodo inveniatur, 294. nocturnum quomodo observetur, 295. 296. quomodo computetur, 297. 298.

Tempus æquale quam habeat mensuram, 710.

Tempus apparet, sive verum. Definitio, 713. quomodo in medium convertatur, 715.

Tempus incidentiæ & repletionis in eclipsi Solis quomodo determinetur, 1004.

Tempus medium. Definitio, 712. quomodo in apparet convertatur, 715.

Tempus obscurationis maximæ in eclipsi terrestri quomodo inveniatur, 1084.

Temporum periodicorum planetarum circa Solem ratio, a. 779. satellitum Jovis & Saturni circa suum primarium, 885.

Tenebræ. Definitio, o. 122.

Terra num moveatur motu vertiginis & motu

& motu annuo circa Solem , a. 622.
 quando in umbram Lunæ incurrere
 nequeat, 1026. quando incurrat, 1027.
Terræ hemisphærium quomodo in Luna
 appareat , 1014.
Terræ motæ systema qualia admittat phæ-
 nomena , 585. & seqq.
Terræ motus a quibusnam fuerit defen-
 sus, 625. num S.S. adversus, 626. num
 a membro Ecclesiæ Romanæ salva con-
 scientia admitti possit, 628.
Terræ obscuratio quando maxima, 1071.
Terræ quiescentis systema qualia admittat
 phænomena , 611. & seqq.
Tessellate imagines quomodo construun-
 tur, quæ in partes dissectæ oculo in-
 tegre appareant , o. 312.
Tetraëdri super angulo solido constituti sce-
 nographia , p. 68. scenographice deli-
 neati umbra , 89.
Tetragonus qualis sit adspectus , a. 928.
 signum , 929.
Theatrorum figura optima , o. 230. 231.
Theoria planetarum , a. 631. & seqq.
Transitus cometæ per eclipticam quomo-
 do invenitur , 1140. item per æqua-
 torem , 1141.
*Tremor circa limbum Lunæ in eclipsi So-
 lis totali observatus* , a. 454.
Trianguli apparentia quomodo invenia-
 tur , p. 38.
Triangulum æquatorium quodnam a KE-
 PLERO in theoria planetarum elliptica
 dicatur , a. 688.
Triangulum opticum. Definitio , p. 4.
Triangulum sphericum. Definitio , s. 3.
 proprietates , 55. & seqq.
Triangulorum rectangulorum proprietates,
 s. 49.
Triangulum sphericum. Definitio , 3. pro-
 prietates, 136. & seqq. 144. 146. 148.
 & seqq. 354. & seqq.
Trianguli spherici æquicruri proprietas ,
 147.
Triangulorum sphericorum obliquangulorum

proprietates , s. 154. & seqq. resolutio,
 158. & seqq.
Triangulorum sphericorum rectangulorum
 proprietates , 98. & seqq. 165. &
 seqq. resolutio , 114. & seqq. 134.
Tridecilis quinam sit adspectus , a. 931.
Trigonometria catholica , s. 103. 111.
Trigonometria spherica. Definitio , 2.
Trigonus , sive *Trinus.* Definitio , 928.
 signum , 929.
Triostilis , quinam adspectus dicatur ,
 931.
Tritura vitrorum quomodo fiat , d. 533.
 535.
Tropici. Definitio , a. 181. distantia quan-
 ta , 182.
Tropicus caneri. Definitio , 181.
 capricorni , 181.
Tubus. Definitio , d. 326.
Tubus astronomicus. Definitio , 333. con-
 structio , 358. proprietates , 359. &
 seqq. quomodo construatur , 376. quo-
 modo in terrestrem convertatur , 388.
Tubus ductilius in usum telescopii quo-
 modo construatur , d. 337.
Tubus Galileanus. Definitio , 331. constru-
 ctio , 340. proprietates , 341. & seqq.
Tubus Hollandicus. Vide *Galileanus.*
Tubi Newtoniani constructio , 376.
Tubus terrestris. Definitio , 334. con-
 structio , 387.
Tunica Ruyschiana num in oculo detur,
 o. 32.

V.

Valles in Luna num dentur , a. 479.
Variatio in motu Lunæ quid dica-
 tur , 857. quomodo invenitur , 860.
Variatio maxima quanta sit , 859. quo-
 modo invenitur , 858.
Vas hydromanticum. Definitio , d. 462.
 constructio , 470.
Venus. Definitio , a. 35. quale corpus ,
 524. num Terræ similis , 525.
Veneris digressiones maxima a Sole quomo-
 do observentur , a. 740.

Veneris distantia a Terra, a. 901.

macula, 494.

motus vertiginis, 496. 497.

Veneris phases, quomodo appareant, 491.

538. quales sint in conjunctione, 491.

Venus Jovialis, 501.

Vertex coni umbrosi, 1041.

Verticalis primarius. Definitio, 72.

Via cometae quomodo in globo designetur, 1141.

Via Lunæ a Sole, 1061.

Via penumbrae. Definitio, 1061. qualis sit, 1064.

Via umbræ quænam sit, 1061.

Vicina cur distinctius videantur remotis, o. 72. cur majora appareant remotioribus, 211.

Vicinius quando celerius moveri videatur, 358. quomodo ad alia remotiora relatum appareat, 333.

Virgo, a. 160.

Visibile quomodo in oculo delineetur, o. 76. quando non videatur, 71. quando clarius, 390. cur non prorsus distincte, 72. quando moveri, 68. augeri, 371. minui 372. proprius accessisse videatur, 373. quando majus, quando minus appareat, 66. quomodo per lentem convexam, d. 248. 252. & seqq. quoduplex videatur per polyhedrum, 166. 168. quomodo radiet, o. 59. 60. cur duobus oculis unicum videatur, 345. quando geminatum, 350. & seqq. quomodo appareat per lentem concavam, d. 193. oblique oppositum quantum appareat, o. 268. & seqq.

Visibilia quando æqualia appareant, o. 67.

Visibilis locus ubinam sit, 344. & seqq.

Visibilium in camera obscura representatio, o. 110. & seqq. d. 236. & seqq. per lentes convexas visorum theoria, 239. & seqq.

Visio quando eadem, o. 43. 44.

Visionis principium, 70.

Visio magnitudinis quo fundamento nitatur, o. 66. 67.

Visionis motus principium, 68.

Visio confusa. Definitio, o. 41.

distincta, 40.

directa, 3.

reflexa, c. 2.

refracta, d. 3.

Vitra caustica quænam sint, d. 198. & seqq. phenomena, 199.

Vitra quomodo ad poliendum apta seligantur, 532. ad trituram aptentur, 533. poliantur, 527. & seqq.

Vitrum quid dicatur in Perspectiva, p. 7.

Vitrum concavum quomodo poliat, d. 540.

Vitrum utrinque concavum seu concavo-concavum. Definitio, 19.

Vitrum utrinque æqualiter concavum, ibid. *inaequaliter concavum*, ibid.

Vitrum convexum quomodo atteratur & ad poliendum disponatur, 535. poliat, 539.

Vitrum convexo-convexum, sive utrinque convexum. Definitio, 17.

Vitrum utrinque æqualiter convexum, ibid.

Vitrum utrinque inæqualiter convexum, ibid.

Vitrum obiectivum. Definitio, d. 328. *oculare*, 329.

Vitra plana quomodo poliantur, 541.

Vitrum plano-concavum. Definitio, 18. *plano-convexum*, 16.

Vitrum polyedrum quomodo poliat, 543.

Umbra. Definitio, o. 122. theoria, 123.

& seqq. quomodo multiplicetur, 130. quando crescat & decrescat, 157.

Umbræ apparentia, sive projectio, p. 83. & seqq. 94. & seqq.

Umbræ a sphaera projectæ longitudo quomodo inveniatur, o. 143.

Umbræ intensitas, 131. & seqq. figura, 134. & seqq.

Umbræ longitudo quomodo in plano horizontali inveniatur, 146. quando altitudini corporis æqualis, 148.

Umbræ

Umbra lumini per fenestram projecto convenientis projectio, p. 102.

Umbra mera quid dicatur, o. 122.

Umbra montium lunarium, a. 483.

Umbrarum perpendicularium opacorum longitudines quam habeant proportionem, o. 156.

Umbra recta. Definitio, 159. theoria, 163. & seqq. ad versam ratio, 165. 170. usus, 171.

Umbra satellitum Jovis observata, a. 506. 507. figura ejus, 508.

Umbra versa. Definitio, 161. theoria. 166. & seqq. usus, 171.

Umbra Lunæ. Definitio, a. 1029. quo dirigatur, 485. num Terram totam tegere

possit, a. 1035. quantam Terræ partem tegat quomodo inveniat, 1036.

Umbra lunaris diameter vera quomodo inveniat, 1034. via in globo terrestri, vel mappa geographica quomodo delineatur, 1095.

Umbra terrestris semidiameter apparens in loco transitus Lunæ quomodo inveniat, 941.

Volantes quando nos conspiciamus in speculo plano, c. 74.

Uvea tunica. Definitio, o. 24. Z.

Z *Enith*. Definitio, a. 58.

Zodiacus. Definitio, 188.

Zodiacus cometarum, 1157.

FINIS INDICIS SECTI.

VII.

INDEX RERUM ET VERBORUM TOMO IV.

CONTENTORUM.

Notes velim, literam g. Geographiam & Hydrographiam, c. Chronologiam, f. Gnomonicam, sive Sciatericam, p. Pyrotechniam, m. Architecturam militarem, a. Architecturam civilem, & numeros §§. designare; ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

A B, c. 112. 121. 123.
Abacus, a. 104.

Abend, g. 215.

Aben meh, c. 113.

Abib, 121.

Accessus. Definitio, m. 239. quomodo paratur, 244.

Acroteria. Definitio, a. 275. situs, 276. dimensiones, 277. & seqq. quomodo construenda, 281. & seqq.

Acus magnetica. Definitio, g. 291. quomodo paratur, 297.

Adar, c. 112. 121. 123.

Adar meh, c. 113.

Adar prior, 121.

posterior, ibid.

Ædes

Ædes in antis. Definitio, a. [236.](#) quales sint, [239.](#)
Ædificia quomodo extruenda, a. [4.](#)
Ædificii area quam habere debeat figuram, a. [421.](#) & seqq.
Ædificii dimensiones quomodo reperiantur, [428.](#) & seqq.
Ædificii firmitas. Definitio, a. [6.](#)
Ædificium quale esse debeat, [18.](#) & seqq.
Æquator. Definitio, g. [13.](#) proprietates, [14.](#)
Æra. Definitio, c. [81.](#)
Æra Aethiaca, [268.](#)
 Hegira, [227.](#)
 Hispanica, [265.](#)
 Judaica, [212.](#)
 Martyrum, [225.](#)
 Persica, [225.](#)
 Yezdegerdica, [255.](#)
Æstas. Definitio, g. [76.](#) ubinam bis sit, [200.](#) quando sub æquatore, [101.](#) quando in zona temperata & frigida, [112.](#) cur in zona torrida non ubivis eodem tempore, [105.](#)
Æstatis initium & finis. Definitio, [76.](#) in zona torrida quomodo inveniantur, [106.](#)
Die außere Böschung, m. [52.](#)
Die außere Polygon, m. [52.](#)
Affirer meh, c. [113.](#)
Africus quinam dicatur ventus, g. [215.](#) [216.](#)
Aiyar, c. [112.](#)
Ala. Definitio, m. [32.](#) num concava fieri debeat, [74.](#) quamam melior, [68.](#) & seqq.
Alarum multiplicatio, [75.](#)
 retractio, [69.](#) & seqq.
Ala secundaria. Definitio, [43.](#)
Alfanus quinam ventus, g. [215.](#) [216.](#)
Altitudo objecti ad distantiam datam conspiciendi quomodo inveniantur, [50.](#)
Altitudo Solis quomodo ope globi inveniantur, [235.](#)
Ambitus Telluris quomodo inveniantur, g. [35.](#) [40.](#) quantus sit, [41.](#)
Ambulacrum valli. Definitio, m. [25.](#) latitudo, [26.](#)
Amphiprostylos. Definitio, a. [236.](#) qualis sit ædes, [241.](#)

Amphiscii. Definitio, g. [152.](#) ubinam dentur, [153.](#)
Amplitudo occidua Solis quomodo ope globi inveniantur, g. [235.](#)
Amplitudo ortiva Solis quomodo ope globi inveniantur, [235.](#)
Analemma. Definitio, f. [132.](#)
Analemma signiferum. Definitio, [132.](#) constructio, [133.](#)
Angulus centri. Definitio, m. [51.](#)
Angulus defendens exterior, [50.](#)
 interior, [49.](#)
Anguli horarii, quomodo inveniantur in horologio horizontali, f. [50.](#) in meridionali, [58.](#)
Angulus humeri. Definitio, m. [46.](#)
Angulus imminutus, [47.](#)
Angulus loxodromiae, loxodromicus. Definitio, g. [318.](#) quomodo inveniantur, [322.](#)
Angulus polygoni. Definitio, m. [44.](#)
Angulus propugnaculi. Definitio, [30.](#) [45.](#) magnitudo, [79.](#)
Annuli solaris universalis constructio, f. [165.](#)
Annuli solaris particularis constructio, [167.](#)
Annus. Definitio, c. [66.](#)
Anni epochæ unius quomodo reducantur ad annos epochæ alterius, [84.](#)
Antæci quales habeant vicissitudines tempestatum, g. [186.](#) temporis, [177.](#) [192.](#)
Annus abundans. Definitio, c. [333.](#) ejus character, [334.](#)
Annus Ægyptiacus. Definitio, [106.](#) quale ejus principium, [107.](#)
Annus æræ Aethiacæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, [271.](#)
Annus æræ Hispanicæ quomodo reducatur ad annum CHRISTI, [267.](#)
Annus Æthiopicus. Definitio, [111.](#)
 Arabum, [125.](#)
 Atticus, [117.](#)
Annus CHRISTI quomodo reducatur ad annum Gratiae, [226.](#) ad Judaicum, [216.](#) ad annum Olympiadum, [238.](#) ad annum Græcorum & Rufforum, [198.](#) ad annum mundi, [209.](#) ad annum periodi Julianæ, [185.](#)

c. 185. ad annum urbis conditæ, 246.
Annus ante CHRISTUM quomodo reducat-
 tur ad annum periodi Julianæ, *c.* 187.
Annus deficiens. Definitio, 331. character,
 332.
Annus Eusebianus, quomodo reducat-
 ur ad annum periodi Julianæ, 220. ad annum
 CHRISTI, 222.
Annus fixus. Definitio, 66.
Annus Galatæus. Definitio, 113. ejus præ-
 stantia, 115.
Annus Græcorum. Definitio, 117.
Annus Græcorum recentiorum quomodo re-
 ducatur ad annos CHRISTI, 197. ad an-
 nos periodi Julianæ, 194.
Annus Gratiæ. Definitio, 225. quomodo
 reducat-ur ad annum CHRISTI, 226.
Annus Gregorianus. Definitio, 101. diffe-
 rentia ab astronomico, 102. a Juliano,
 103. num sit bissextilis quomodo inveni-
 atur, 105.
Annus Hebræorum antiquus, 121.
Annus Julianæ Epochæ quomodo reduca-
 tur ad annum CHRISTI, 263.
Annus Julianus. Definitio, 97. quantum
 deficiat ab astronomico, 98. num sit
 bissextilis quomodo inveniatur, 105.
Anni Juliani dies quomodo reducat-ur ad
 diem Judaici, 346.
Annus Judæorum recens, sive Judaicus. De-
 finitio, 123. quomodo reducat-ur ad an-
 num CHRISTI, 217. ejus species, 331.
 333. quomodo species inveniatur, 345.
Anni Judaici dies quomodo reducat-ur ad
 diem Juliani, 345.
Annus lunaris cælestis. Definitio, *c.* 72.
 quantitas, 73.
Annus lunaris civilis communis. Definitio,
 74. quantitas, 75.
Annus lunaris civilis embolimeus. Defini-
 tio, 74. quantitas, 75. 76.
Annus Macedonicus. Definitio, 119.
Anni mundi conditi epochæ Alexandrinæ quo-
 modo reducantur ad annos CHRISTI,
 210.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

Anni mundi conditi Græcorum historicorum
 quomodo reducantur ad annos CHRIS-
 TI, *c.* 206. quomodo ad annos periodi
 Julianæ, 204.
Annus Nabonassareus quomodo reducat-
 ur ad annum CHRISTI, 254. quomodo ad
 annum periodi Julianæ, 251.
Annus nativitatis CHRISTI num sit certus,
 190.
Annus Numæus. Definitio, 91. quantitas, *ib.*
Annus olympiadum quomodo reducat-ur ad
 annos CHRISTI, 238.
Annus ordinarius. Definitio, 329. charac-
 ter, 330.
Annus periodi Julianæ quomodo ex datis
 cyclis Solis, Lunæ & Indictionum inveni-
 atur, 181. quomodo reducat-ur ad an-
 num ante CHRISTUM, 188. ad annum
 CHRISTI, 186. Judaicum, 213. Eusebia-
 num, 220. annum urbis conditæ, 242.
 annum Rufforum & Græcorum, 194.
Annus Persicus. Definitio, 113. quomo-
 do reducat-ur ad annum CHRISTI, 259.
 quomodo initium in anno Juliano inveni-
 atur, 260.
Annus Romanorum veterum. Definitio,
 88. quantitas, 89.
Annus Rufforum quomodo reducat-ur ad
 annum CHRISTI, 197. quomodo ad
 annum periodi Julianæ, 194.
Annus secularis ad quodnam seculum refe-
 rat-ur, 87.
Annus solaris. Definitio, 67.
Anni solaris civilis quantitas, 68.
Annus solaris bissextillis, 71.
communis, 69. 70.
Annus Syriacus, 112.
Annus Turcarum. Definitio, 125. quomo-
 do reducat-ur ad annum CHRISTI, 352.
 initium ejus quomodo computetur,
 353. 355.
Annus vagus. Definitio, 66.
Annus Urbis conditæ quomodo reducat-ur
 ad annum CHRISTI, 245. quomodo ad
 annum periodi Julianæ, 241.

P p p

Annus

Annus Yezdegerdicus. Definitio, c. 113. cum quo conveniat, 114.
Antepagmenta, a. 133.
Antipodes. Definitio, g. 180. quod dentur, 181. quinam sint, 182. 183. quomodo ope globi inveniantur, 237. quales habeant vicissitudines diei ac noctis, 185. tempestatum, 186.
Antæci. Definitio, 176. quinam sint, 177. quibus nulli sint, 195. quomodo ope globi inveniantur, 237. cum antipodibus comparati, 186. & seqq. 206.
Apeliotes quinam sit ventus, g. 215.
Apophygis. Definitio, a. 111. delineatio, 117.
Aprilis, c. 97.
Aquilo quinam ventus, g. 215. 216.
Architecti officium, a. 2. 3.
Architectura civilis. Definitio, 1. regulæ ejus quomodo inveniantur, 5.
Architectura militaris. Definitio, m. 1. ejus prima principia, 2. & seqq.
Archapeliotes qualis ventus, g. 215.
Arcus. Definitio, a. 253. delineatio, 257. partes & membra, 258. 259.
Arcuum Dispositio, 274.
Arcus æquatoris inter Loxodromiæ initium in æquatore & meridianum datum interceptus quomodo inveniat, g. 336.
Araostylon, a. 215.
Ardhascht meh, c. 113.
Area subdialis necessitas, a. 442. 443. 444.
Arenæ qualitates, 59. examen, 60.
Argestes qualis ventus, g. 215. 216.
Artilleria, p. 2.
Arx. Definitio, m. 201.
Ascensio obliqua Solis quomodo ope globi inveniat, g. 235.
Ascensio recta Solis quomodo ope globi inveniat, ibid.
Ascii. Definitio, g. 149. quinam sint, 150. ubinam non dentur, 151. quinam sint dato die, quomodo inveniat, 168.
Afrudia meh, c. 113.

Astragalus, Definitio, a. 105. delineatio, 113.
Athyr, c. 106.
Atlantes. Definitio, a. 81.
Augustus, c. 97.
Auricula. Definitio, m. 72.
Aussenwercke, 109.
Auster, g. 211. 215.
Austro-Africus qualis ventus, 215.
Autumni initium & finis. Definitio, 79.
Autumnus quando sub æquatore, 103. ubi in zona torrida, 109.
Axis Telluris. Definitio, 12.

B.

Das Bæcklein, m. 52.
Basis columnæ, a. 96. & seqq.
Basi columnæ & stylobatæ quænam membra conveniant, 132.
Basis columnæ & capituli Tuscani & Dorici, 198.
Basis stylobatæ, 95.
Basis & Coronidis stylobatæ ichnographia quomodo delineetur, 193.
Batterie, m. 227.
der Bedeckte Weg, 52.
Behen meh, c. 113.
Berne, m. 109.
Bestrichener Winckel, 52.
Bogenstellungen, a. 253.
Bollewerck, m. 52.
Bollwercks Winckel, 52.
Bomba. Definitio, p. 31. quomodo paratur, 42. & seqq.
Borapeliotes, g. 215. 216.
Boreas, 215.
Borolybicus, 215.
Brille, m. 109.
Brustwehre, ibid.

C.

Cæcias, quinam ventus, g. 215. 216.
Cementorum virtutes quomodo explorantur, a. 48.
Calendæ quid sint, c. 95.
Calendarium quomodo conscribatur, 316.
Calen-

Calendarium correctum. Definitio, c. 314.
Calendarium Gregorianum. Definitio, 291.
Calendarium Gregorianum perpetuum, 392.
Calendarium Julianum. Definitio, 272.
Calendarium Julianum perpetuum, 282.
Calibra. Definitio, p. 101.
Calx quomodo coquenda, a. 65. & seqq.
 quomodo examinetur, 71. conservetur, 72.
Camera. Definitio, 468. constructio, 471.
Camini constructio, 482.
Canun prior, c. 112.
 posterior, ibid.
Capital - Linie, m. 52.
Capitulum columnæ. Definitio, a. 96. quænam ei convenient membra, 171.
Capituli Corinthii ichnographia, 207.
 Ionici ichnographia, 202.
 Romani ichnographia, 205.
Carbas quinam ventus dicatur, g. 215. 216.
Carbones ad pulverem pyrium conficiendum idonei quomodo parentur, p. 13. & seqq.
Carbonum qualitates, 19. 20. 21.
Cardi meh. c. 113.
Carthaune, p. 100.
Caryatides. Definitio, a. 82.
Casleu, c. 121. 123.
Castellum. Definitio, m. 201. delineatio, 207. quomodo condi debeat, 202. & seqq.
Caurus quinam ventus, g. 215. 216.
der Centri-Winckel, m. 52.
Charaæter anni, mensis, enneadecaëteridos. Definitio, c. 324. mensis quinam, 325. anni quinam, 326. enneadecaëteridos quinam, 327.
Charaæteres artificiales chronologici sive instituti. Definitio, 130.
Charaæteres astronomici chronologici sive naturales. Definitio, 128. quales sint, 129.
Charaæteres chronologici. Definitio, 127.
Charaæteres historici chronologici. Definitio, 132.

Charta quomodo super tabula expandenda, a. 174.
Chartæ reductionis in hydrographia. Definitio, g. 363.
Chojac, c. 106.
Chorda. Definitio, m. 31.
Chronologia. Definitio, c. 1.
Circius qualis sit ventus, g. 215. 216.
Circuli horarii sive horarum. Definitio, f. 28.
Circulus æquinoctialis. Definitio, g. 13.
 polaris antarcticus, 19.
 polaris arcticus, ibid.
Circumvallatio exterior. Definitio, m. 235.
 interior, 236.
Clima. Definitio, g. 114.
Climatis initium, 115. medium, 117. finis, 116.
Climatum Tabulæ quomodo construantur, 138. exhibentur, ibid.
Cochlidium. Definitio, a. 515. nazvi, 516. delineatio, 517.
Colli dimidium. Definitio, m. 37.
Columellæ. Definitio, a. 80.
Columna. Definitio, 75. quomodo super alia columna erigatur, 289. & seqq.
Columnæ conjugatæ. Definitio, a. 216. quomodo conjugatio fieri debeat, 217. & seqq.
Columna parietina. Definitio, 75.
Commoditas ædificii. Definitio, a. 7.
Compassus nauticus. Definitio, g. 296.
Computi vulgaris Autor, c. 189.
Conclavium altitudo, a. 435. & seqq. communicatio, 440. figura, ibid. locus, 441.
Corona, a. 104.
Coronis stylobatæ, 95. quænam membra ei convenient, 131.
Coronix, 100. qualis esse debeat, 102. quænam membra ei convenient, 131.
die Cortine, m. 52.
Contre - Mine, 109.
Contregarde, ibid.
Corus, g. 215. 216.
Craticula ad firmitatem fundamenti quomodo paranda, a. 328.

Crepusculi matutini initium quomodo ope globi inveniatur, g. 235.
Crepusculi vespertini finis quomodo ope globi inveniatur, 235.
Creutz Gewölbe, a. 469.
Crucis gnomonica constructio, f. 163.
Cuniculi subterranei. Definitio, m. 154. quid de iis observatum, 155. & seqq. quomodo parentur, 160. 163.
Cyclus Indictionum. Definitio, c. 151. quomodo inveniatur, 153.
Cyclus Lunæ. Definitio, 147. quantus sit & quamdiu valeat, 148.
Cyclus Solis. Definitio, c. 140. quomodo inveniatur, 143.
Cycli Solis pro annis Gregorianis quomodo condantur, 145.
Cycli Solis, Lunæ & Indictionum anni dati periodi Julianæ quomodo inveniuntur, 180.
Cylindrus pyrotechnicus. Definitio, p. 35.
Cylindricum horologium, f. 152. & seqq.
Cymatium Doricum. Definitio, a. 107. delineatio, 115.

D.

D*ecember*, c. 97.
Declinatio plani quomodo inveniatur, f. 90. 101.
Defensionis quantitas quomodo mensuretur, m. 58. & seqq.
Delineatio acus magnetica. Definitio, g. 293. quomodo observetur, 302.
Denticuli quid sint, a. 133. quomodo delineentur, 180.
Diameter Columnæ quomodo inveniatur, a. 155. 156.
Diameter globi unius libræ quomodo inveniatur, p. 110.
Diameter globorum pro singulis semunciis libræ quomodo inveniatur, p. 109.
Diastylon opus, a. 225.
Dies. Definitio, g. 118. ubinam unicus, 128. ubi perpetuo nocti æqualis, 126. quandonam ubivis terrarum noctis æqualis, 132.

Dies iidem ubinam æquales, g. 135.
Diei longitudo quomodo variet pro locorum latitudine, 134.
Diei brevissimi & longissimi longitudo quomodo inveniatur, 136. 142.
Dies bissextilis seu intercalaris. Definitio, c. 71.
Dies civilis. Definitio, 3.
Dies naturalis. Definitio, 5. quantitas quomodo inveniatur, 6.
Dies rejiculæ. Definitio, 336.
Dies mensis anni Nabonassarei quomodo reducatur ad diem anni Juliani, 202.
Dierum hebdomadis nomina, 45.
Di meh, 113.
Dipteros, a. 236. quale sit opus, 244.
Distantia locorum quomodo ope globi inveniatur, g. 264.
Distantia locorum magno intervallo distantium quomodo inveniatur, 29.
Distantia locorum geographica. Definitio, 51. quomodo inveniatur, 63. & seqq.
Distantiæ Solis a vertice mensura, 264.
Dulheggia, c. 125.
Dulkaadah, ibid.

E.

E*chinus*. Definitio, a. 106. delineatio, 114.
Ecliptica. Definitio, g. 15. situs, 16.
Eclipticæ declinatio maxima quomodo inveniatur, 140.
Ecphora. Definitio, a. 150.
Einbohrende Defens-Linie, m. 52.
Einfallendes Licht, a. 390. 391.
Elul, c. 112. 121. 123.
Enneadecaëteris Judaica. Definitio, c. 322. quot sit dierum, 323.
Epactæ annuæ. Definitio, 296. quantæ sint, 297. & seqq.
Epactæ mensuræ. Definitio, 294.
Epactæ quomodo per Calendarium disponendæ, 302.
Epactarum officium, 300.
Epactarum cyclus quando expiret, 299. cur non omni ævo satisfaciatur, 301. 303.
Epactæ

Epactarum expansa Tabula quomodo construatur, c. 306.

Epacta Juliana & Gregoriana anni dati quomodo inveniatur, 310.

Epiphi, 106.

Epistylum quid sit, a. 100. quale esse debeat, 101.

Epocha. Definitio, c. 81. quod sit arbitraria, 82.

Epocha Constantinopolitana, 171.

Diocletiana, 225.

Juliana, 261.

Muhamedica, 227.

Mundi conaiti Judæorum, 212.

Mundi Alexandrina, 207.

Mundi Eusebiana, 219.

Mundi recentiorum Græcorum & Russorum, 192.

Mundi Græcorum Historicorum, 201. 202.

Nabonassarea, 247.

Olympiædica, 232.

Urbis conditæ, 239.

Epocha vulgaris CHRISTI nati quomodo reducat ad annum periodi Julianæ, 183.

Epocha diei civilis. Definitio, 10. quomodo constituatur, 11. & seqq.

Etesia, g. 216.

Ethanim, c. 121.

Euroauster quinam ventus, g. 215.

Euronotus quinam ventus, 216.

Europææ horæ quomodo in Babylonicas convertantur, c. 34.

Eurus quinam ventus, g. 215. 216.

Eurythmia. Definitio, a. 31. & seqq.

Eustylon opus, 225.

F.

F*acies*. Definitio, m. 30.

Facierum magnitudo, 63.

Falconet, p. 100.

Famulus pyrotechnicus. Definitio, 37. quomodo fiat, 63.

Fascia, a. 104.

Fastigium. Definitio, 262.

Favonius quinam ventus, g. 215. 216.

Februarius, c. 97.

Fenestra. Definitio, a. 381. quomodo construenda, 382. & seqq. 389. 390. dimensiones, 387. 388. 395. situs, 400. & seqq. figura, 393. ornatus, 402. 404. quot fenestræ conclavi unicuique convenient, 425.

Fenestra podio septa. Definitio, a. 414. quomodo construenda, 415. & seqq.

Festa immobilia. Definitio, 274. quænam sint, 275.

Judaica quænam sint, 549.

Festa mobilia. Definitio, c. 276. quænam sint, 277.

Figura irregularis quomodo ad regularitatem reducat, m. 185. quomodo muniatur, 186. 188. & seqq.

Finitor. Definitio, g. 28.

Flores capitulorum quomodo delineentur, a. 210.

Focus quomodo exstruatur, a. 495. 496. & seqq.

Folia acanthina cum cauliculis, 133.

Forcipula composita. Definitio, m. 105. an utilis, 106. quomodo delineatur, 138. 179.

Forcipula simplex. Definitio, 103. an utilis, 104. quomodo delineatur, 137. 179.

Fornaces quomodo construendæ, a. 486. & seqq.

Fornices. Definitio, a. 468. quomodo construantur, 471.

Fossæ necessitas, m. 15. latitudo, 16. latitudo quænam melior, 86. quales terminos habere debeat, 87.

Fossæ operum externorum magnitudo, 122.

Frons primaria ædium quam plagam respicere debeat, a. 445. & seqq.

Frontispicium. Definitio, 262. figura, 264. 266. locus, 265. navi, 267. 268. quomodo delineatur, 272.

Fulcrum. Definitio, 74. quodnam perfectius, 84. quale esse debeat, 85. & seqq.

Fumarii exstructio, 499. & seqq.

Fundamentum adificii. Definitio, a. 311.
necessitas, 313: quale esse debeat, 314.
& seqq. dimensiones, 332. 333. quomodo ponatur, 332. & seqq. 334. quomodo in loco aquoso ponatur, 339.

G.

G *Allicus*, quinam ventus, g. 215. 216.
Gangeticus quinam ventus, 215.

Geographia. Definitio, 1.

Gefichts-Linie, m. 52.

Gewälbe, a. 469.

Ginbat, c. 111.

Glacis, m. 52.

Globus aëreus. Definitio, p. 71. quomodo componatur, 92.

Globus aquaticus. Definitio, 72. quomodo componatur, 96.

Globus fœrens. Definitio, 41. quomodo componatur, 68.

Globus fumans. Definitio, 40.

Globi incendiarii. Definitio, 38. qua materia repleantur, 52. quomodo repleti ligentur, 54. baptizentur, 55. granatis manuariis impleantur, 57.

Globus lucens. Definitio, 39. 74. quomodo componatur, 66. 96.

Globus obscurans quomodo componatur, 67.

Globus terrestris. Definitio, 73. quomodo componatur, 97.

Globus terrestris in *Geographia.* Definitio, g. 231. constructio, 233. 234. usus, 235. & seqq. quomodo ita constitutatur, ut Sol omnes regiones illuminet, quæ in ipsa Tellure illuminantur, 261.

Gnomonica. Definitio, f. 1.

Gradus Meridiani terrestris quomodo mensurentur, g. 40.

Gradus parallelis quantitas quomodo inveniantur, 45. 46.

Græcus quinam ventus dicatur, 28.

Granata. Definitio, p. 31.

Granata manualis, ibid.

Grando pyrotechnica. Definitio, p. 32. quomodo paretur, 48.

H.

H *Aase*, c. 111.

Halber Mond, m. 109.

Hamle, c. 111.

Haugender Mærser, p. 142.

Haupt-Linie, 52.

Haziram, c. 112.

Hebdomas. Definitio, 43.

Helakim, 40.

Hellepontius qualis ventus, g. 215.

Hemisphæria. Definitio, a. 468.

Heteroscii. Definitio, g. 155. ubinam dentur, 156.

Hexastylon quale sit opus, a. 214.

Hiemis initium & finis. Definitio, g. 77.

Hiems ubinam unica, 17. quando sub æquatore, 101.

Hora. Definitio, c. 17.

Hora composita. Definitio, 17.
simplex, ibid.

Hora antiquæ, 24.

Hora astronomica. Definitio, 21. quomodo in *Babylonicas* convertantur, 31.

Hora Babylonica. Definitio, 19. quomodo in *astronomicas* convertantur, 31. quomodo in *Europæas*, 34. quomodo horologio inscribantur, f. 149.

Hora Europææ. Definitio, c. 22. quomodo convertantur in *astronomicas*, 30. *Italicas*, 35. *Judaicas*, 37.

Hora Italica. Definitio, 20. quomodo convertantur in *Europæas*, 35. quomodo horologio inscribantur, f. 149.

Hora Judaica. Definitio, c. 24. quales sint, 25. & seqq. quomodo in *Europæas* convertantur, 37.

Hora Norimbergenses, Definitio, 28.

Hora planetaria, 24.

Horizon. Definitio, g. 28.

Horizon physicus, 28.

sensibilis, ibid.

Hornwerck, m. 109.

Horologigraphia, f. 2.

Horologi

Horologii descriptio generalis, f. 36. in baculo, 160.

Horologium æquinoctiale. Definitio, 5. quomodo eidem signorum paralleli inscribantur, 140.

Horologium æquinoctiale inferius. Definitio, 5. descriptio, 33. quot horas indicet, 7.

Horologium æquinoctiale superius. Definitio, 5. quot horas indicet, 6. quomodo describatur, 30.

Horologium æquinoctiale universale quomodo construatur, 34.

Horologium astrale. Definitio, 176. constructio, 184.

Horologii cylindrici descriptio, 152. & seqq. 161.

Horologia declinantia. Definitio, 76. descriptio, 94. 96. 102. 104.

Horologia deklinata. Definitio, 82. descriptio, 109.

Horologium horizontale. Definitio, 10. quo tempore ejus usus, 11. ejus perfectio, 12. quomodo describatur, 38. & seqq. quomodo sub sphaera parallela, 129. quomodo sub recta, 124. & seqq. quomodo paralleli signorum eidem inscribantur, 135.

Horologii horizontalis sine centro descriptio, 119. & seqq.

Horologii horizontalis universalis descriptio, 170.

Horologia inclinata. Definitio, 78. descriptio, 106.

Horologium lunare. Definitio, 75. descriptio, 180. 182.

Horologium meridionale. Definitio, 14. quasnam horas indicet, 15. quomodo describatur, 54. & seqq.

Horologium nocturnale. Definitio, 177.

Horologium occidentale. Definitio, 22. quas horas indicet, 23. quomodo describatur, 68.

Horologium orientale. Definitio, 20. quas horas indicet, 21. quomodo de-

lineetur, f. 66.

Horologium polare. Definitio, 25.

Horologium polare inferius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo describatur, 72. & seqq.

Horologium polare superius. Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo describatur, 69. & seqq.

Horologia reclinata. Definitio, 80. descriptio, 108.

Horologium septentrionale. Definitio, 16. quasnam horas indicet, 17. quo tempore nullus ejus usus, 18. quomodo describatur, 63. 64.

Horologium solare. Definitio, 3. diversitas unde, 4. quomodo vicem lunaris sustineat, 178. quomodo in superficie globi describatur, 150.

Horologia solaria primaria quomodo eidem trunco inscribantur, 74.

Horologia sine centro. Definitio, 115. ubi construenda, 116. & seqq.

Horologium verticale. Definitio, 13. quomodo sub sphaera recta describatur, 127. quomodo sub parallela, 130. quomodo sine centro, 122. & seqq.

Horologii universalis in Tabula quadam portatili descriptio, 172.

Hydar, c. 111.

Hydrographia. Definitio, g. 2.

Hypathros. Definitio, a. 236. quale sit opus, 247.

Hypasricus qualis sit ventus, g. 215.

Hypaquilo qualis sit ventus, 215.

Hypargestes, qualis sit ventus, 215.

Hyperboreas qualis sit ventus, 215.

Hypereurus qualis ventus, *ibid.*

Hypcurus, 215.

Hypocacias qualis sit ventus, 215.

Hypocircius qualis ventus, *ibidem.*

Hypocornus, *ibidem.*

Hypolibs, *ibidem.*

Hypophænix, *ibidem.*

Hypothrascias Scirem, 215.

I.

J *Acatit*, c. 111.
Janua. Definitio, a. 372. dimensiones, 373. & seqq. figura, 378. locus, 410. 411. ornatus, 402. 404.
Januarius, c. 97.
Japyx, g. 215.
Ichnographia ædificii. Definitio, a. 524. quomodo fiat, 528.
Ichnographia munimenti. Definitio. m. 131.
Ichnographia partis alicujus columnæ. Definitio, a. 188.
Idus quid sint, c. 95. quot in quolibet mense, *ibid*.
Jiar, 121. 123.
Imbrices, a. 522.
Inclinatio acus magnetica. Definitio, g. 294. quomodo observetur, 307.
Inclinatio plani quomodo inveniatur, f. 88. 89.
Incolæ ejusdem paralleli quomodo inter se comparentur, g. 196. & seqq. 202.
Incumba. Definitio, a. 255. membra, 256.
Initium diei civilis. Definitio, c. 10. quomodo constituatur, 11. & seqq.
Die innere Beschung, m. 52.
Drossirung, *ibid*.
Polygon, *ibid*.
Instrumentum, quo pulvis pyrius in tormentum immittitur, p. 127. in arcum spatium redigitur, 128. tormenta repurgantur, 129.
Instrumentum declinatorium. Definitio, f. 85. constructio, 86. usus, 88.
Intercolumnium. Definitio, a. 225. prope januas & portas quantum esse debeat, 232.
Jomada prior, c. 125.
posterior, *ibidem*.
Itineris quantitas quomodo in mari æstimeretur, g. 351.
Iter confectum in mari quomodo inveniatur, 386. 389.
Iter conficiendum in mari quomodo inveniatur, 384.
Junius, c. 97.

K.

K *Artetsche*, p. 32.
Eine Katze, m. 109.
Kebie quid sint, c. 376.
Die Kehle, m. 52.
Der kleine Winkel, *ibid*.
Ein Kron-Werck, 109.

L.

L *Acunar* quomodo construendum, a. 466.
Lagenæ pyrotechnicæ. Definitio, p. 34.
Laquear gypseum quomodo perficiatur, a. 467.
Lateres quomodo ducantur, 51. & seqq. examinentur, 58.
Latitudo loci. Definitio, g. 54. quomodo inveniatur, 55. 137. 143. quomodo ope globi inveniatur, 237. quomodo observetur, 344. & seqq.
Latitudinum locorum Tabulæ, 60.
Latitudinis mutatio in navigatione quomodo inveniatur, 321. quomodo se habeat ad latus mecodynamicum, 327.
Latus exterius. Definitio, m. 35.
interius, 36.
Latus mecodynamicum. Definitio, g. 317. quale sit, 329. quomodo inveniatur, 325. 328. 330. 383.
Lauffgraben, m. 240.
Leuco-notus qualis ventus, g. 215.
Libonotus qualis ventus, 215. 216.
Libs qualis ventus, 215.
Ligna qualia esse debeant, a. 43. quomodo cædenda, 46. exsiccanda, 47.
Ligni parsimonie principia, 474. & seqq.
Limen quantum esse debeat, 380.
Linea quid dicatur in Architectura militari, m. 233. quid in Geographia, g. 13.
Linea capitalis. Definitio, m. 40.
Linea communicationis. Definitio, 241.
Linea defensionis major. Definitio, m. 41. magnitudo, 55. 56.
Linea defensionis minor, sive *stringens*. Definitio, 42.
Linea semicolli quænam melior, 77.

Linea

Linea substylaris. Definitio, f. 91. quænam sit, 92. 93.

Literæ ardentes quomodo efformentur, p. 98.

Litera dominicalis. Definitio, c. 133. quomodo variet, 136. & seqq. quando ordo restituatur, 139. quomodo inveniat, 143.

Loca quænam in zona torrida sita, g. 69. quænam in temperata, 72. quænam in frigida, 75.

Loca secreta ne fatore sint molesta quomodo impediatur, a. 448. & seqq.

Loca Terræ, ubi simul meridiem, g. 23.

Loca Terræ quomodo ope globi inveniantur, in quibus dies est datarum horarum, 251. 252. quibus Sol oritur, vel occidit, quæ meridiem, quæ mediam noctem, quæ diem, quæ noctem habent, 255. quæ vident eclipses medium, 256. quibus planeta, 257. stella vel aliud phænomenon sit verticale, 258. 259. quibus hoc oriatur, vel occidat, 260. quibus Sol, 261. vel Luna lucet, 262. quibus Sol & Luna oriuntur, vel occidunt, 263.

Loca zonæ frigide quomodo inveniantur ope globi, in quibus dierum dato numero Sol non occidit, 254.

Locus ad fluxum situs quomodo muniat, m. 208.

Longitudo dici quomodo ope globi inveniat, g. 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, f. 142.

Longitudo jactus tormentorum quanta sit, p. 137.

Longitudo loci. Definitio, g. 52. quomodo inveniat, 56. & seqq. quomodo ope globi inveniat, 137.

Longitudinum locorum differentia quomodo inveniat, 58. 59.

Longitudinum locorum Tabulæ, 60.

Longitudo maris quomodo inveniat, 335. 334. 385.

Longitudinum in mari differentia quomodo
Wolfii Oper. Mathem. Tom. V.

modo inveniat, g. 386.

Longitudinis mutatio quomodo inveniat, g. 337. 338. 387.

Longitudo noctis quomodo ope globi inveniat, 235.

Lorica. Definitio, m. 21. crassities, 22. altitudo, 23. 24.

Lorica fenestrarum. Definitio, a. 431. dimensiones, 432. & seqq.

Loricæ transverse utilitas, m. 124.

Loxodromia. Definitio, g. 309. proprietates, 310. 311. 313. & seqq. quomodo inveniat, 320.

Loxodromia longitudo quomodo se habeat ad latus mecodynamicum, 324. quomodo ad mutationem latitudinis, 319. 323.

Lunula. Definitio, m. 99. delineatio, 136. M.

M *Agabit*, c. 111.

Maius, 97.

Mappæ compositæ per rhombos & distantias. Definitio, g. 367.

Mappæ geographica. Definitio, 266.

Mappæ hydrographica. Definitio, 356.

Mappæ planæ. Definitio, 358. quales sint, 359. & seqq. quomodo construantur, 368.

Mappæ particularis. Definitio, 268. quomodo construat, 278.

Mappæ reductæ. Definitio, 363. quales sint, 364. 365. quomodo construantur, 375.

Mappæ universales. Definitio, 267.

Marchesum, c. 121. 123.

Mare circumfluit terram, g. 7. latitudo in mari quomodo observetur, 340. inveniat, 342.

Margo fossæ. Definitio, m. 27.

Martius, c. 97.

Mascaran, 111.

Materia adificiorum. Definitio, a. 342. qualis sit seligenda, 35. & seqq.

Materia liquefacta quid dicatur, p. 61.

Mecheir, 106.

Qq

Meha

Meha meh, c. 113.

Membra Ordinum architectonicorum. Definitio, a. 103. divisio, 103. altitudines eorum quomodo determinentur, 151.

Membra essentialia. Definitio, 125. quanam sint, 126. & seqq.

Mensis astronomicus. Definitio, c. 58.

Mensis civilis. Definitio, 60.

Mensis illuminationis. Definitio, c. 55. quantus, 56.

Mensis lunaris periodicus. Definitio, 51. quantus sit, 52.

Mensis lunaris synodicus. Definitio, 53. quantitas, 54.

Mensis lunaris astronomicus. Definitio, 58.

Mensis lunaris civilis. Definitio, 60. quantus sit, 61. & seqq.

Menses Numai quales fuerint, 93.

Mensis solaris. Definitio, 48. quod omnes non sint æquales, 50. quantus statuatur, 50.

Mensis solaris civilis. Definitio, 60. quantitas, 64. 65.

Menses Romulei quales fuerint, 93.

Mensium Turcicorum initium in anno Juliano quomodo reperiatur, 356.

Merded meh, c. 113.

Meridianus. Definitio, g. 20. situs, 21. officium, 23. numerus Meridianorum, 24.

Meridiani diversorum locorum quomodo eidem horologio inscribantur, f. 144.

Meridianus primus. Definitio, g. 26. quanam sit, 27. 61.

Meridies quanam plaga dicatur, g. 215.

Meridies cur citius in locis orientioribus, quam occidentalioribus, 25. ubi nam sit dato momento quomodo ope globi inveniat, 174.

Mesquilo quanam ventus, g. 215.

Mesargestes, ibid.

Meseurus, ibid.

Mesoboreas, ibid.

Mesocacias, ibid.

Mesocircius, ibid.

Mesocorus, quanam ventus, g. 215.

Mesolibonotus, ibid.

Mesolibs, ibid.

Mesophænix, ibid.

Mesori, c. 106.

Mesozephyrus, quanam ventus, g. 215.

Mijazia, c. 111.

Milliaria longitudinis. Definitio, g. 317. quomodo inveniantur, 383.

Minutum primum. Definitio, c. 39. secundum, ibid.

Mittag, g. 215.

Mitternacht, ibid.

Modulus. Definitio, a. 148.

Modulus ornatus januarum & fenestrarum, 403.

Molad Tohu. Definitio, c. 320. character, 328.

Monopteros ædes rotunda, a. 251.

Mörser, p. 142.

Mortarii præparatio, a. 361.

Mortarium in Artilleria. Definitio, p. 140. quomodo delineetur, 143. & seqq. oneretur, 148. dirigatur, 150.

Muharram, c. 125.

Muniendi forma Belgica. Definitio, m. 126. calculus geometricus, 128. 129. delineatio ichnographica, 133. 141. orthographica, 142.

Muniendi forma Blondelliana. Definitio, 151. calculus geometricus, 152. delineatio, 153.

Muniendi forma Paganiana. Definitio, 145. calculus geometricus, 146. delineatio, 148.

Muniendi forma Scheiteriana. Definitio, 170. calculus geometricus, 171. delineatio, 173.

Muniendi forma Vaubaniana. Definitio, 157. calculus geometricus, 159. delineatio, 161.

Muniendi forma Vaubaniana recentior. Definitio, 166. delineatio, 168.

Munimenti forma qualis esse debeat, 61. & seqq.

Muni-

Munimenta campestria. Definitio, m. 217.
orthographia, 219. delineatio, 220.
& seqq.

Munimentum irregulare. Definitio, 180.
undenam tale sit, 183. 184.

Munimentum regular. Definitio, 125.

Munimentum stellatum quomodo delineatur, m. 121.

Muri quomodo construendi, a. 341. & seqq. quomodo anchoris firmentur, 370. quomodo rectorio vestiantur, 363.

Murus ante fenestram qualis esse debeat, 411.

Mutuli compositi. Definitio, 133. delineatio, 182.

Mutuli simplices. Definitio, 133. delineatio, 181.

N.

Navigatio circularis. Definitio, g. 381. theoria, 391. & seqq.

Navigatio MERCATORIS. Definitio, 380.

Navigatio plana. Definitio, 379.

Neben - Streiche, m. 52.

Neomenie omnium mensium quomodo inveniuntur, c. 344.

Neomenia Tisri quomodo inveniatur, 339. & seqq.

der Niedrige Wall, m. 52.

Nisan, c. 112. 121. 123.

Nitri qualitates, p. 17. 20. 22. defæcatio & pulverisatio, 5. & seqq.

Nonæ quid sint, c. 95. quot sint in quolibet mense, ibid.

Nord, g. 211.

Nord gen Osten, 215.

Nord gen Westen, ibid.

Nord - Nord - Ost, ibid.

Nord - Nord - West, ibid.

Nord - Ost, ibid.

Nord - Ost gen Osten, ibid.

Nord - Ost gen Norden, ibid.

Nord - Ost gen Westen, ibid.

Nord - West, ibid.

Nord - West gen Norden, ibid.

Nord - West gen Westen, g. 215.

Notapeliotes, ibid.

Notolybicus, ibid.

Nozephyrus, ibid.

Notus, ibid.

November, c. 97.

Nox. Definitio, g. 118. c. 8. quomodo quantitas inveniatur, 9. ubinam unica, g. 128.

Numerus aureus. Definitio, c. 149. quomodo inveniatur, 150.

O.

Obsidionis processus, m. 249. defensio contra eandem, 250.

Occasus Solis quomodo ope globi inveniatur, 235. quomodo in horologio indicetur, f. 142.

Occidens. Definitio, g. 211. 215.

Octastylon, a. 214.

October, c. 97.

Olympias, g. 215.

Opera campestria. Definitio, m. 216.

Opus coronatum. Definitio, 108. quomodo delineetur, 140. 178.

Opus cornutum. Definitio, 107. quomodo delineetur, 131. 176.

Opera externa. Definitio, 94. utilitas, 95. qualia esse debeant, 96.

Opus rusticum. Definitio, a. 366. quibus ædificiis conveniat, 367. & seqq.

Ordo architectonicus. Definitio, a. 90. divisio, 153. quomodo componantur, 160. & seqq. 137. quomodo delineentur, 176. 178.

Ordo Corinthius, 145. quod sit ornatus, 146.

Ordo Doricus, 140.

Ionicus, 141.

Romanus, sive compositus, 143.

Tuscanus, 139.

Oriens. Definitio, g. 211.

Ornatus ædificii. Definitio, a. 15.

Ornithias qualis ventus, g. 216.

Orthographia externa ædificii. Definitio; a. 525. quomodo fiat, 529.

Q q q 2

Ortho;

Orthographia interna aedificii. Definitio, a. 256. quomodo fiat, 530.

Orthographia munimenti. Definitio, m. 132.

Orthographia partis alicujus columnæ. Definitio, a. 188.

Ortus Solis quomodo ope globi inveniantur, g. 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, f. 142.

Ost, g. 211. 215.

Ost gen Norden, 215.

Ost gen Shden, ibid.

Ost - Nord - Ost, ibid.

Ost - Ssd - Ost, ibid.

P.

P*Achon*, c. 106.

Pagomen, 111.

Paophi, 106.

Paralleli locorum quomodo horologio solaris inscribantur, f. 146.

Parastata. Definitio, a. 78.

Parmula. Definitio, m. 98. usus, 110. qualis esse debeat, 111. & seqq. quomodo delineetur, 135.

Partes ordinum quomodo componantur, 137.

Pascha quomodo celebrandum, c. 279.

Pascha Gregorianum quomodo computetur, 112.

Pascha Judaicum quomodo computetur, 347.

Pascha Julianum quomodo computetur, 288.

Pavimenta qualia esse debeant, 457.

Pauni, 206.

Perfectio aedificii. Definitio, a. 8.

Periodus Calippica. Definitio, c. 154. quanta sit, 156. quot lunationum, 157. quamdiu valeat, 158.

Periodus Hipparchi. Definitio, c. 161. quanta sit, 164. quot lunationum, 165. quamdiu valeat, 166.

Periodus Juliana. Definitio, 175. quanta sit, 176. ejus usus, 178. inventor, 179.

Periodus Victoriana. Definitio, 167. quot

sit lunationum, c. 173. quantum valeat, 171. quamdiu valeat, 174.

Periaci. Definitio, g. 178. quinam sint, 179. quibus nulli sint, 195. 205. quomodo numerent horas, 204. quomodo ope globi inveniantur, 237.

Peripteros. Definitio, a. 236. quale sit opus, 242.

Peripteros ædes rotunda, 251.

Periscii. Definitio, g. 157. ubinam dentur, 158. quinam sint dato loco, quomodo inveniantur, 169. 170.

Perystilium. Definitio, a. 112. genera apud veteres, 236.

Petarde, p. 151.

Phamenot, c. 106.

Phænicias qualis ventus, g. 215.

Phænix, ibid.

Photosciaterica, f. 2.

Pila. Definitio, a. 77.

Pila parietina, ibid.

Plaga. Definitio, g. 207. quot sint, 208. quomodo indicentur, 210. quomodo determinentur, 217.

Plagæ cardinales. Definitio, 211.

Plagæ collaterales, vel *intermedia.* Definitio, 211. *species*, ibid.

Plagæ collaterales primariae, ibid.

secundariae, ibid.

secundariae primi ordinis, ibid.

secundariae secundi ordinis, ibid.

Plinthus, a. 104.

Pluvia ignea quomodo efficiatur, p. 61.

Pluvia pyrotechnica. Definitio, 33.

Podium. Definitio, a. 414.

Poli Telluris. Definitio, g. 12.

Polus Terræ antarcticus, sive *australis*, ibid.

Polus Terræ arcticus, sive *borealis*, ibid.

Poli elevatio ubi nulla, 125. quomodo inveniantur, 143.

Polygonorum distantia in methodo munienti recentiore quomodo inveniantur, m. 209.

Poly-

Polygon - Winckel, m. 52.
Postes. Definitio, a. 79.
Poslicum, 236.
Principium anni. Definitio, c. 78. ubi statuendum, 79. 80.
Profunditas Solis quomodo ope globi inveniatur, g. 235.
Projectio sphaerae. Definitio, g. 269. quomodo fiat, 272. 275.
Projectio orthographica, 270.
Projectio stereographica, ibid.
Projectura, sive *Projectio*. Definitio, a. 94.
Pronaus qualis ædes, 236.
Prostylus. Definitio, 236. quale sit opus, 240.
Propugnaculum. Definitio, m. 29. forma, 62.
Propugnaculi exterius vallum. Definitio, 101. usus, 116. 117.
Pseudodipteros. Definitio, a. 236. quale sit opus, 243. 244.
Pseudodipteros ædes. Definitio, 249. qualis sit, 250.
Pulchritudo. Definitio, a. 10. principia, 11. & seqq.
Pulvis pyrius. Definitio, p. 4. compositio, 24. & seqq. examen, 29. 30.
Pycnostylon opus, a. 225.
Pyropologia, p. 2.
Pyrobolus. Definitio, 69. quomodo conficiatur, 77. qua materia impleatur, 78. quomodo terebretur, 79.
Pyroboli forma quomodo paretur, 75. 76.
Pyrobolus aquaticus quomodo componatur, 94.
Pyrotechnia. Definitio, p. 1.
Pyxis nautica, seu *magnetica*. Definitio, 296. quomodo construatur, 297.

Q.

Quadra, a. 104.
Quadrantis horodisticti constructio, s. 157.
Quintilis, c. 88.

R.

Rabia prior, c. 125.
 posterior, ibid.
Rajab, ibid.
Radius major. Definitio, m. 39.
 minor, 38.
Rationum symptoma, g. 84.
Ravelin, m. 109.
Reductus quomodo delineetur, 224. & seqq.
Refractio horizontalis Solis quomodo inveniatur, g. 144.
Regula quale membrum in Ordinibus, a. 104.
Regula ad delineandum Ordines atque edificium utilis quomodo construatur, 175.
Regula Calibrae. Definitio, p. 102. quomodo paretur, 103. usus, 105. & seqq. examen, 111.
Rhombus. Definitio, g. 286. quomodo inveniatur, 387. 388. quomodo inveniatur, in quo navigandum, 384. juxta quem facta navigatio, 322. 326.
Rosa nautica. Definitio, 289.
Rosa pyrotechnica quomodo fiat, p. 82. 83.
Ruderatio quomodo fiat, a. 461. & seqq.

S.

Sabat, sive Shebat, c. 121. 123.
Saccus globi incendiarii quomodo delineetur, p. 49. 51.
Saccus pyrotechnicus. Definitio, 36.
Samadan, c. 125.
Saphar, ibid.
Sappa, sive *suffessio*. Definitio, m. 242. quomodo paretur, 246.
Säulenstellungen, a. 213.
Saxa quomodo cædenda, 49.
Saxorum virtutes quomodo cognoscantur, 48.
Scala. Definitio, a. 502. quomodo construenda, 503. & seqq. delineanda, 514.
Scalæ constructio ad delineandos Ordines necessaria, a. 172. quæ errores distantiarum in mappis planis corrigit, g. 372.

- Scapus columnæ*, a. 96. quomodo contrahatur, 183.
- Scenographia ædium*. Definitio, a. 527.
- Scharis meß*, c. 113.
- Scheere*, sive *Scheer-Werck*, m. 109.
- Schieß-Scharten*, 109.
- Schlangen*, p. 100.
- Schuler-Winkel*, m. 52.
- Sciaterica*, Y. 2.
- Sciatericum*. Definitio, 3.
- Scintilla pyrotechnica* quomodo conficiantur, p. 87.
- Scrupulum Chaldaicum*. Definitio; c. 40. quomodo in horaria convertatur, 42.
- Seculum*. Definitio, c. 86.
- Semidiameter Terræ* quanta sit, g. 41. & seqq. quomodo inveniat, 30. 32. & seqq. 38.
- September*, c. 97.
- Septentrio*. Definitio, g. 211.
- Septimana*. Definitio, c. 43.
- Serpentinel*, p. 100.
- Sextilis*, c. 88.
- Shaaban*, 125.
- Shabat*, ibid.
- Shawal*, ibid.
- Signorum paralleli* quomodo horologiis solaribus inscribantur. f. 135. & seqq.
- Sima*. Definitio, a. 110. delineatio, 119.
- Sivan*. c. 121.
- Sol* ubinam fiat verticalis, ubinam non, g. 93. quando hoc fiat, 94. ubinam dato momento verticalis, quomodo inveniat, 173. quando in zona torrida loco alicui fiat verticalis quomodo ope globi inveniat, 242. & seqq. quando mediam distantiam a vertice in zona torrida habeat, quomodo inveniat, 95. & seqq. ubinam ter per annum mediam distantiam a vertice habeat, 98. ubinam bis, 99. quo momento planum declinans illustrare incipiat, quomodo determinetur, f. 110. & seqq. quando in zona torrida appareat retrogradus, g. 171. ubinam dato momento oriatur & occidat, quomodo inveniat, g. 175. quando in zona torrida non occidat, quo nodo ope globi inveniat, 248. item quando non amplius oriatur 249. Solis non occidentis mora supra horizontem quomodo inveniat, 146.
- Solis meridiani a vertice distantia* quanta sit, g. 159.
- Solanus* quinam ventus, 215. 216.
- Soli conditio* quomodo exploranda, a. 320.
- Soliditas Terræ* quanta sit, g. 44.
- Sphæra obliqua*. Definitio, 121. ubinam sit, 124.
- Sphæra parallela*. Definitio, 120. ubinam sit, 123. phænomena ejus, 125. 128. & seqq.
- Sphæra recta*. Definitio, 119. phænomena, 125 & seqq. ubinam sit, 122.
- Spreng-Kugel*, p. 58.
- Statio vallaris*. Definitio, m. 25.
- Stehender Mörsel*, p. 142.
- Stellula pyrotechnica* quomodo conficiantur, 84.
- Die Streiche*, m. 52.
- Die streichende Defens-Linie*, ibid.
- Der Streich Winkel*, ibid.
- Structura Græca*, a. 354.
 incerta, 352.
 isodoma, 356.
 pseudisodoma, 357.
 revincta, 359.
 reticulata, 349.
- Stupa pyrotechnica* præparatio, p. 59.
- Stylobata*. Definitio, a. 95.
- Sublanus* qualis ventus, g. 215.
- Substructio*, a. 311.
- Subvesperus* qualis ventus, g. 215. 216.
- Sud*, c. 211.
- Süd gen Osten*, g. 215.
- Süd gen Westen*, ibid.
- Süd-Ost*, ibid.
- Süd-Ost gen Osten*, ibid.
- Süd-Ost gen Norden*, ibid.
- Süd-Süd-Ost*, ibid.

Süd-Süd-West, g. 215.
Süd-West, ibid.
Süd-West gen *Süden*, ibid.
Süd-West gen *Westen*, ibid.
Suggestus mortariorum. Definitio, m. 228.
Suggestus tormentorum. Definitio, 227. delineatio, 229.
Sulphuris depuratio, p. 10. qualitates, 18. 21. 22.
Supercilia, a. 104.
Superficies Terræ quanta sit, 44. quomodo se habeat ad zonam frigidam, 88. & seqq. quomodo ad temperatam, 85. torridam, 80. 81.
Supernas quinam ventus, g. 215. 216.
Symmetria quid sit & in quo consistat, a. 24. & seqq.
Syne, c. 111.
Systylon opus, a. 225.

T.

T*Abulæ loxodromica*. Definitio, g. 331. quomodo construantur, 333.
Tania, a. 104.
Tamuz, c. 112.
Teberth, 123.
Testa quomodo construenda, a. 519. & seqq. 523.
Tegulæ hamatæ, 522. imbricatæ, ibid.
Tekuphæ quid sint, c. 337. quomodo inveniuntur, 348.
Tempestates annuæ quomodo se habeant sub æquatore, g. 100. & seqq. quomodo in zona torrida extra æquatorem, 104. & seqq.
Tempestates vagæ. Definitio, g. 227. causæ, 229.
Templi Cella sive *Corpus*, a. 236.
Temporis momentum quomodo ex altitudine Solis ope globi inveniatur, g. 236.
Termini paschales. Definitio, c. 284.
Terminorum paschalium Tabulæ Gregoriana quomodo construat, 309.

Terra cur circumnavigari potuerit, g. 5.
Terræ figura qualis sit, 3. 4.
Terræ figura spherica num in Tellure citra errorem sensibilem assumi possit, 10.
Testudines. Definitio, a. 468.
Tetrastylon, 214.
Thamuz, c. 121. 123.
Thir meh, 113.
Thisri, 121. 123.
Thor, 106.
Thrascias qualis ventus, g. 215. 216.
Tishrin prior, c. 112. posterior, ibid.
Tonnen-Gewölbe, a. 469.
Tormentum. Definitio, p. 99. species, 100. delineatio, 115. & seqq.
Tormentum quomodo oneretur, p. 130. dirigatur, 133. 134. cur explosum retrocedat, 138.
Tormentum insititium. Definitio, 151. quomodo pareretur & oneretur, 152.
Torus, a. 105. quomodo delineetur, 113.
Trabeatio. Definitio, a. 100. quænam cui-libet intercolumnio conveniat quomodo inveniatur, 227. & seqq.
Traversen, m. 109.
Trenbéeen-Kugel, p. 58.
Triacontaëteris Muhammedana. Definitio, c. 350.
Triglyphi cum guttis quid sint, a. 133. quomodo delineentur, 179.
Trochilus, a. 108. quomodo delineetur, 116.
Tropicus cancri. Definitio, g. 17. situs, 18.
Tropicus Capricorni. Definitio, 17. situs, 18.
Truncus stylobatæ, a. 95.
Tybi, c. 106.
Tykymt, 111.
Tympani altitudo, a. 270. 272.
Tyr, c. 111.
Tysbas, ibid.

V.

- V** *Allum*. Definitio, m. 13. cur munimentis conveniat, 14. altitudo, 18. 82. declivitas, 19. defensio qualis esse debeat, 53.
- Valli operum externorum* dimensiones, 120.
- Veadar*, c. 123.
- Ventus*. Definitio, g. 215. divisio, 215. qualis sit, qui per terram continentem spirat, 222. 225. qualis, qui per maria spirat, 220.
- Ventus cardinalis*, 215.
collateralis, ibid.
collateralis primarius, ibid.
collateralis secundarius primi vel secundi ordinis, ibid.
- Venustas*. Definitio, a. 10.
- Veris initium & finis*. Definitio, g. 78.
- Ver quando sub æquatore*, 103. ubinam bis, 109.
- Versorium*. Definitio, 296.
- Versuræ compositæ* quomodo delineandæ, a. 408.
- Versuræ simplices* quomodo delineandæ, 407.
- Vertex objectorum* cur iter facientibus prius videatur quam radix & contra, g. 8. 9.
- Via navis* qualis sit, 339.
- Vinea*. Definitio, m. 243. quomodo pareretur, 248.
- Visus distantia*, quam in superficie maris vel planitie terræ attingit, quomodo inveniat, g. 47.
- Umbra meridianæ* quo die altitudini corporis æqualis, g. 166. quando quolibet die, 167. quomodo variet in diversis locis, 164.
- Umbra solstitiales* quomodo se habeant in diversis locis, 164.
- Umbra rectæ* ratio ad altitudinem opaci, 160.

Umbra versa ratio ad altitudinem opaci, g. 161.

Voluta. Definitio, a. 133. quomodo delineetur, 135.

Urna pyrotechnica. Definitio, p. 34.

Utilitas ædificii. Definitio, a. 7.

Vulturnus quinam ventus, g. 15. 16.

W.

W *Affen-Plätze*, m. 109.

der Wall, m. 52.

der Wallgang, ibid.

West, g. 212.

West gen Norden, 215.

West gen Süden, ibid.

West-Nord-West, ibid.

West-Süd-West, ibid.

Winckel der Flanck und Cortine, m. 52.

Z.

Z *Ephyroboreas* qualis ventus, g. 215.

Zephyrus, ibid.

Zius, c. 121.

Zonæ inter se collatæ quoad magnitudinem, g. 91. 92.

Zonæ frigida australis. Definitio, 73. latitudo, 74.

Zonæ frigida borealis. Definitio, 73. latitudo, 74.

Zonæ temperatæ ratio ad superficiem Terræ, 85. 86. magnitudo, 87.

Zonæ temperata australis. Definitio, g. 70. latitudo, 72.

Zonæ temperata borealis. Definitio, 70. latitudo, 72.

Zonæ torrida. Definitio, 66. latitudo, 68. magnitudo, 82. ratio ad superficiem Terræ, 80. 81. quomodo ab æquatore dividatur, 68.

Zophorus. Definitio, a. 100. qualis esse debeat, 101.

der Zwischen-Wall, m. 52.

VIII.

INDEX

Rerum in Commentatione de Studio Mathematico recte
instituendo contentarum, quæ legitur Tomo V
Elementorum Matheseos.

A.

A Equatio ad parabolam quomodo educatur ex sectione coni, 205.

Equatio curvæ particularis quomodo educatur ad generalem, 197.

Equationes ad curvam, in qua origo abscissarum non est in aliquo puncto curvæ, quomodo tractentur, 206.

Equationis cubicæ & biquadraticæ constructio, quod supponat inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas, 223.

Equationum inventio cur subinde non uno modo tentanda, 174.

Equationum usus in curvis mechanicis ostenditur, 207.

Aerometriæ studium quomodo instituendum, 164. & seqq.

Agrimensores an theoriâ Geometriæ recte negligant, 129. & seqq.

Algebra quomodo tractanda, 143. & seqq. quomodo ad Geometriam applicanda, 173. & seqq. qualis primum fuerit & quomodo deinceps ulterius perfectâ, 165. quousque perfectâ, 188. cur ad tertium cognitionis gradum adspiranti cognitu necessaria, 681. quod subinde suppeditet absque ulla ambage constructiones problematum veterum, 183.

Algebraicum studium quomodo faciliatur, 166.

Analysis mathematica quomodo exercenda, 143. & seqq. cur ad tertium cognitionis gradum adspiranti cognitu necessaria, 681. quod subinde suppeditet absque ulla ambage constructiones problematum veterum, 183.

Wolffii Oper. Mathem. Tom. V.

cessaria, 81.

Analysis Diophantea quomodo tractanda, 171. 172.

Analysis infinitorum quomodo tractanda, 226. & seqq.

Analysis Veterum qualis fuerit, 145.

Approximationes quomodo per series infinitas inveniantur, 244. & seqq.

Architecti militares an theoriâ Geometriæ tuto negligant, 129. & seqq.

Architecturæ civilis studium, 337. & seqq.

Architecturæ militaris studium, 333. & seqq. scientifica cognitio num profit Architecto militari, 335.

Arithmetica quomodo in usum Artis inveniendi tractanda, 121.

Arithmetica infinitorum in infinitum extensa, 251.

Arithmetica literalis quomodo tractanda, 146. & seqq.

Arithmetica literalis usus in inveniendi, 154.

Arithmetica practica quomodo tractanda, 113. & seqq.

Arithmetica practica compendium quomodo ex Elementis Autoris exscribendum, 120.

Arithmetica theoretica quomodo tractanda, 118.

Ars inveniendi quomodo ope Architecturæ civilis exerceatur, 339.

Artificia analytica cur probe notanda, 166. 167. 192. inter se conferenda, 191.

Artis characteristica notio quomodo acquiratur,

R r r

ratur, 147. usus in inveniendi, 156.
Artis inveniendi regula abstrahendæ ab
 Arithmetica communi, 121. a literali,
 157. 163. 164.
Artis inveniendi causa quomodo Mathesis
 tractanda, 106.
Artium scientiam excolenti quid notasse
 profit, 329.
Astronomiæ studium, 290. & seqq. cogni-
 tio historica quomodo acquirenda,
 293. & seqq.
Astronomia quid conferat ad Artem inve-
 niendi, 302. & seqq.
Astronomia practica quomodo addiscatur,
 297. & seqq.
Asymptotos determinandi methodus quo
 principio nitatur, 231.

C.

C*alculus algebraicus* a perplexitate libe-
 ratus, 187. num theoriam supponat
 in solvendis problematis, 145.
de Calculi differentialis inventore controver-
sia quomodo intelligenda, 228.
Calculi integralis notio explicata, 235.
Calculus literalis in Algebra quomodo per
 numeros explicetur servata universa-
 litate, 168.
Calculus numerosus quomodo ad formam
 universalis reducatur, 154. quomodo
 in locum literalis surrogari possit, 169.
Calculus situs quid sit, 144. quales sup-
 ponat in Geometria definitiones, 155.
Catoptrica studium, 274. & seqq.
Chronologiæ studium, 323. & seqq.
Circulus cur per æquationem algebraicam
 definiri possit, 195.
Circuli proprietates algebraice erutæ, 193.
 & seqq. 206.
Circuli quadratura per series infinitas ex-
 plicata, 238.
Citationes in demonstrationibus quem ha-
 beant usum, 45.
Cognitionis humanæ gradus quot dentur, 1.
 quod non eadem facilitate acquiran-
 tur, 2. quomodo acquirantur, 3.

Cogitandi modus naturalis quomodo ser-
 vetur in studio mathematico, 108.
Conchoidis proprietates quomodo ex æqua-
 tione ad eandem deducantur, 203.
 constructio facillima inde deducta, *ibid.*
 tangens quomodo ducenda, 232.
Constructio æquationum quomodo ad Ana-
 lylin Veterum propius adducatur, 181.
Constructiones æquationum superiorum quo-
 modo inventæ, 218. 219. cur analyti-
 cas dederit Autor, 220.
Constructiones geometricæ formularum alge-
braicarum num pure enunciandæ, 180.
 an semper synthetice demonstrandæ,
 177. quodnam inter elegantes & inele-
 gantes intercedat discrimen, 185.
Corollaria quid sibi velint, 58. quomodo
 expendenda, 59. quomodo symbo-
 lica repræsentanda eorum demonstra-
 tio, 60.
Curiositatis gratia quomodo Astronomia
 tractanda, 292.
Curvæ quænam per æquationes algebrai-
 cas definiri nequeant, 196. quænam ab
 Autore considerentur in Elementis suis,
 209. quomodo ad curvas alias referan-
 tur, 208. quænam in constructione pro-
 blematis alteri præferenda, 221.
Curvarum doctrina quantum adhuc distet
 a perfectione sua, 217.
Curvarum proprietates. quomodo per
 æquationes eruantur, 193.
Curvarum quadraturæ a quadratura para-
 bolæ pendentes, 237. quod reducantur
 ad quadraturam circuli & hyperbolæ,
 239.
Cycloidis proprietas singularis, 250.

D.

D*efinitiones* quomodo expendendæ, 5.
 quomodo expendendæ in usum Ar-
 tis inveniendi, 82. & seqq. cur ab iis in-
 cipiendum, 4. cur exemplis & quomo-
 do illustrandæ, 5. quo ordine collo-
 candæ & legendæ, 6.
Definitiones arithmeticae quomodo exem-
 plis

plis illustrentur, 11. 12. objectio quædam removeretur, 16.
Definitiones geometricæ quomodo ad evidentiam sensus reducendæ, 13.
Definitiones nominales quales esse debeant, 10.
Definitiones reales quomodo inveniantur præsuppositis nominalibus, 87. 88. num nominalibus præferendæ, 89.
Definitionum repræsentatio symbolica, 11. & seqq.
Demonstrandi principia qualia supponantur, 71.
Demonstrationes quando sint naturales, 62. quales ab Autore exhibeantur, 63. quales vulgo, 64. quomodo resolvendæ, 31. 38. 40. & seqq. 47. quomodo faciant ad perficiendum intellectum, 99. & seqq. 102. & seqq. quomodo libris inserantur, 46. quomodo in Hydrostatica facilitandæ, 263.
Demonstrationes arithmeticæ cur servent universalitatem ad exempla applicatæ, 50.
Demonstrationes astronomicæ quatenus recedant a rigore, 301.
Demonstrationes catoptricæ num sint superflue, 277.
Demonstrationes dioptricæ quod pluribus modis fieri possint, 281.
Demonstrationes mechanicæ quales sint, 32. cur in locum cæterarum non surrogandæ, 33. quod æquipolcant exemplis numericis, 34. quibusnam satisfaciant, 36. quomodo ad tertium cognitionis gradum conducant, 72. 73.
Demonstrationes problematum quomodo resolvendæ, 52. quomodo symbolice repræsententur, 53. 55.
Demonstrationes syntheticæ num recte negligantur, 101. num ex calculo algebraico erui possint, 178. quænam cum iis non confundendæ, 179. cur analyticis misceantur ab Autore, 260.
Demonstrationum forma, 31. 37. symbo-

lica repræsentatio, 39. 42. quem habeat usum, 44. 48. 49.

Dioptrica studium, 280. & seqq.

E.

Ellipseos constructio ex æquatione elicitæ, 215. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 200.
Experientia ac rationis connubium cur perpetuum esse debeat, 312.

F.

Fractionum in calculo algebraico usus, 189.
Figuræ in Mathesi quales requirantur, 10.
Formulæ algebraicæ quomodo applicandæ, 158. & seqq.

G.

Geographiæ studium, 317. & seqq.
Geographiæ historica cognitio quomodo acquiratur, 318.
Geometria quomodo in usum Matheſeos reliquæ tractanda, 162. usus in reliquæ Mathesi stabilitus, 133. 136. quomodo intellectus perficiendi gratia tractanda, 134.
Geometria elementaris supplementum in usum Algebrae conscribendum, 186.
Geometria practica quomodo tractanda, 122. & seqq. quomodo ex Elementis Autoris extrahenda, 128.
Gnomonica studium, 326. & seqq.

H.

Hydraulica studium quomodo instituendum, 267. & seqq.
Hydrographiæ studium, 322.
Hydrostatica studium, 261. & seqq. usus in Philosophia naturali, 262.
Hyperbolæ constructio ex æquatione elicitæ, 216. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 201. 202.
Hypotheses quomodo excolendæ, 309. 310. qualibus in Philosophia locus, 311.

I.

- I**nductio quomodo pariat, 35.
Integratio differentialium cur subinde requirat quantitatem adjiciendam, 236.
Intellectus cur & quomodo studio Matheseos perficiatur, 92. & seqq. quomodo perficiatur, si ad primum tantummodo cognitionis gradum adspires, 94. & seqq.
Intellectus perfectio quænam maxima, 106.
Intellectus perficiendi gratia quomodo in Geographia versandum, 321.
Intellectui quæ patent quomodo ad evidentiam sensus reducantur, 11. & seqq.
Irrationalium existentia, 225. ad formam rationalium reductio quem habeat usum, 152.

L.

- de **L**oci geometricis notanda, 210. & seqq.
Logica genuina unde agnoscatur, 104.
Logica studio quodnam præmittendum, 105.

M.

- M**athesis an in usum Artis invenienti tractari possit, 314. & seqq. quomodo in hunc usum tractetur, 106.
Matheseos studium quomodo intellectus perficiendi causa tractandum, 90.
Matheseos sublimioris studiosi quænam ex Mechanicis addiscere debeant, 259.
Mechanica quantum a Veteribus promota, 252. quantum a Recentioribus, ibid. quomodo tractanda in usum tertii gradus cognitionis, 255. 256.
Mechanicæ praxis quomodo addiscenda, 253. 254.
Mechanicæ principia ad phænomena naturæ explicanda, utilia, 258.
Mechanicæ studium quomodo tractandum, 251.
Methodus mathematica num Theologiæ,

Jurisprudentiæ & Medicinæ conveniat, 107.

Methodus de maximis & minimis quonitatur principio, 234.

Methodus tangentium inversa quomodo expendenda, 248.

N.

Notiones ontologicæ quomodo ex Mathesi derivandæ, 340.

O.

Optica studium quomodo instituentum, 271. & seqq. quod ad Physicam conducatur, 272.

P.

Parabola proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 198.

Perspectiva quomodo tractanda, 273.

Philosophiæ naturalis principia mathematica quænam proprie dicantur, 257.

Philosophus quomodo versari debeat in Catoptrica, 276. quomodo in Dioptrica, 282.

Præparatio ad demonstrationem cur necessaria, 74. 75. quomodo ad eam perveniatur, 76.

Præparatio ad tertium gradum cognitionis per secundum, 71.

Praxis quomodo reddatur oculata, 140.

Problemata quomodo in theorematum convertantur, 51. 54. quomodo tractanda, ac si resolutio invenienda esset, 77. & seqq.

Problematum symbolica representatio, 26. 27.

de *Problematis physico-mechanicis* notanda, 257.

Propositiones quomodo rite exponendæ, 17. quomodo a nobis enunciandæ, 18. 19. quomodo a Veteribus & Clavio, 20. cur pure enunciandæ, 21. 57.

Pyrotechniæ studium, 330. quid conferat ad artem inveniendi, 332.

Q^Uadraturæ per series infinitas pendet a quadratura infinitarum Parabolarum, 239.

R.

Radices due in contactu æquales, 199.
Rationum doctrina quomodo facilitetur, 160. 161.

Rationum inequalitatis tractatio ad modum æquationum, 191.

Regressus serierum explicatur, 241.

Regulæ arithmeticae cur formulis algebraicis ab Autore non fuerint adscriptæ, 175.

Resolutiones problematum quomodo illustrandæ, 22. quomodo in potestatem redigendæ, 23. quomodo sola attentione ad theorematum innotescant, 80.

Resolutiones problematum numerica quomodo exemplis illustrandæ, 29.

Resolutionum spuriarum examina quomodo subinde instituantur, 180.

S.

Saltus in ratiocinando expenditur, 61.
Scientiæ conjunctis viribus excolendæ, 313.

Sensus quid adjumenti afferant intellectui in veritate intelligenda, 7. 8. 9.

Series magis convergentes pro circulo quomodo deducantur ex minus divergentibus, 242. 243.

Sphæricorum studium, 285. & seqq.

Studium mathematicum quibusnam difficile videatur, 98.

Subnormalium formulæ algebraicæ quomodo geometricè construuntur, 230.

Subtangentiæ notio explicata, 233.

Subtangentiæ formulæ algebraicæ quomodo geometricè construuntur, 229.

T.

Tabulæ astronomicae expendantur, 298.

Tangentium methodus Barrowiana, 227. 228. quomodo inde prodeat differentialis, 228.

Theorematum quomodo in usum Artis inveniendi expendenda, 68. quod eodem modo inveniri potuerint, quo demonstrantur, 70. quomodo in problemata resolvenda convertantur, 67.

Theorematum symbolica repræsentatio, 24. 25.

Theorica Planetarum quomodo ab autore tradita, 309.

Trigonometria in quem usum primum inventa, 137. quomodo in usum praxeos tractanda, 138. & seqq.

Trigonometriæ sphericae studium, 286. & seqq.

V.

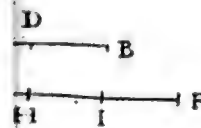
Veritas invenienda quod alias cognitæ supponat, 71.

Veritatis inveniendæ utilitas cur non attendenda, 176.

Vulgarium meditatio quem habeat usum, 170.

FINIS TOMI V. ELEMENTORUM MATHHESEOS.





9.5 v

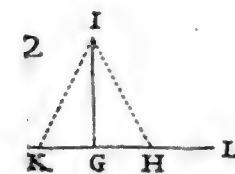
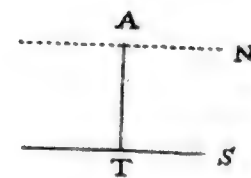
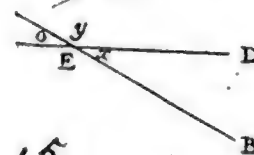
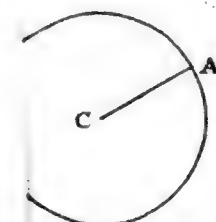


Fig. 9



15



1

Digitized by Google



